B. G. TEUBNERS LEHRBÜCHER
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN XXVIII, 1

R. v. LILIENTHAL
VORLESUNGEN ÜBER DIFFERENTIALGEOMETRIE
I

B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen.



… Titel in … assenden … atischen

Die … bis jetzt erschienen … Wissenschaften … von der Deutschen … egebenen eingehend… zu teil geworden … ltate der wissensch… müht ist, sich das … d macht, durch wel… hiedenen Gebieten … spunkten geordnet …

Die … Referate in den … ung beabsichtige… ntierung bestimmte… sicherten Resultaten … aben die historisch… aus aber muß auf … wie sie zum selbs… gen Eindringen i… e solche ausführlic… eschichtlichen un… nd neben den rein … htigt, erscheint a… zu einem großen T… wichtig, zumal, in … land die mathemat… iete der mathemat…

Die … Hoffnung hin, daß sich recht zahlreiche Mathematiker, Physiker und Astronomen, Geodäten und Techniker, sowohl des In- als des Auslandes, in deren Forschungsgebieten derartige Arbeiten* erwünscht sind, zur Mitarbeiterschaft an dem Unternehmen entschließen möchten. Besonders nahe liegt die Beteiligung den Herren Mitarbeitern an der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Die umfangreichen literarischen und speziell fachlichen Studien, die für die Bearbeitung von Abschnitten der Enzyklopädie vorzunehmen waren, konnten in dem notwendig eng begrenzten Rahm… …dergelegt werden. Hier aber, bei den Werken d… …ng, ist die Möglichkeit gegeben

den Stoff freier zu gestalten und die individuelle Auffassung und Richtung des einzelnen Bearbeiters in höherem Maße zur Geltung zu bringen. Doch ist, wie gesagt, jede Arbeit, die sich dem Plane der Sammlung einfügen läßt, im gleichen Maße willkommen.

Bisher haben die folgenden Gelehrten ihre geschätzte Mitwirkung zugesagt, während erfreulicherweise stetig neue Anerbieten zur Mitarbeit an der Sammlung einlaufen, worüber in meinen „Mitteilungen" fortlaufend berichtet wird (die bereits erschienenen Bände sind mit zwei **, die unter der Presse befindlichen mit einem * bezeichnet):

**P. Bachmann, niedere Zahlentheorie I. (Band X 1 der Sammlung.) M. 14.—
**E. Blaschke, Vorlesungen über mathem. Statistik. (Band XXIII.) M. 7.40.
M. Bôcher, über die reellen Lösungen der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
H. Broecker, Versicherungsmathematik.
**H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. (Band XVII.) M. 8.40.
**G. H. Bryan, Thermodynamics. An introductory treatise dealing mainly with first principles and their direct applications. [In englischer Sprache.] (Band XXI.) M. 7.—
G. Castelnuovo und F. Enriques, Theorie der algebraischen Flächen.
**E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik u. Lebensversicherung. (Band IX.) M. 24.—
M. Dehn und P. Heegaard, Lehrbuch der Analysis situs.
**L. E. Dickson, Linear Groups with an exposition of the Galois Field theory. [In englischer Sprache.] (Band VI.) M. 12.—
F. Dingeldey, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme.
——— Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung.
G. Eneström (in Verbindung mit anderen Gelehrten), Handbuch der Geschichte der Mathematik.
F. Engel u. G. Kowalewski, Einführung in die Theorie der Transformationsgruppen.
F. Enriques, Prinzipien der Geometrie.
**O. Fischer, theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper. (Band XXII.) M. 14.—
R. Fuëter, komplexe Multiplikation.
Ph. Furtwängler, die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate.
**A. Gleichen, Lehrbuch der geometrischen Optik. (Band VIII.) M. 20.—
M. Grübler, Lehrbuch der hydraulischen Motoren.
J. Harkness, elliptische Funktionen.
L. Henneberg, Lehrbuch der graphischen Statik.
K. Heun, die kinetischen Probleme der modernen Maschinenlehre.
G. Jung, Geometrie der Massen.
G. Kohn, rationale Kurven.
**A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen. (Band XII.) M. 24.—
H. Lamb, Akustik.
**H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. (Band XXVI.) M. 20.—
*R. v. Lilienthal, Differentialgeometrie.
H. A. Lorentz, on the theory of Electrons and its application to the phenomena of Light and Radiant Heat. [In englischer Sprache.]

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
BAND XXVIII, 1.

VORLESUNGEN ÜBER DIFFERENTIALGEOMETRIE

VON

R. v. LILIENTHAL

ERSTER BAND:
KURVENTHEORIE

MIT 26 FIGUREN IM TEXTE

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908

Vorwort.

Die Vorlesungen über Kurventheorie, die ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, verfolgen nicht die Absicht, eine vollständige Darlegung aller Aufgaben und Entwickelungen zu bieten, die im Anschluß an die Elemente dieser Theorie gestellt und durchgeführt sind; sie sollen vielmehr hauptsächlich eine einheitliche Mitteilung der Begriffe und Methoden enthalten, die in den weiteren Vorlesungen über Flächentheorie zur Anwendung kommen, wobei aber auf die Behandlung wichtiger und zum Teil neuer Einzelheiten nicht verzichtet wurde. Die geometrischen Fragestellungen sind in den Vordergrund gerückt und in der zu ihrer Lösung angewandten analytischen Methode ist nach möglichster Strenge gestrebt worden. An die Seite der geometrischen Fragestellungen sind die kinematischen getreten, die bereits bei den Scharen von Kurven in einer Ebene ihre Fruchtbarkeit erweisen, aber besonders bei den Kurven im Raume zu bemerkenswerten Ergebnissen führen, deren Umfang durch die hier gebotene Darstellung noch bei weitem nicht erschöpft ist.

Es war ursprünglich meine Absicht, den einzelnen Kapiteln meiner Vorlesungen historische Skizzen beizufügen; doch erwies sich dies namentlich im Anfang unausführbar. Mit der bloßen Anführung älterer historischer Tatsachen ist wenig geleistet, die Schilderung der früheren Anschauungen und Methoden aber erfordert Raum und bildet eine Aufgabe für sich. Bei neueren Problemen ist die Literatur nach Möglichkeit mitgeteilt.

Das Kennzeichnende der im folgenden gebotenen Entwickelungen liegt in der gänzlichen Vermeidung des Unendlichkleinen und in der ausschließlichen Benutzung von Grenzübergängen, die bei den gemachten Voraussetzungen auf Grund elementarer Sätze über Potenzreihen möglich werden. Damit verbot es sich von selbst, die sogenannten Berührungen verschiedener Ordnungen als ein Mittel zur Erforschung der Krümmungsverhältnisse einer Kurve zu gebrauchen. — In der Anwendung der analytischen Methode sind nur die einfachsten Hilfsmittel der analytischen Geometrie benutzt. Um hier formale Weitläufigkeiten zu vermeiden, ist einerseits, wenn drei sich auf die Koordinatenachsen beziehende Gleichungen auftreten, meistens nur die erste hingeschrieben, und anderseits ist von dem Summenzeichen Σ reichlich Gebrauch gemacht worden, wobei hinter das Zeichen Σ nur das erste Glied der gemeinten Summe gesetzt ist. Diese Bezeichnungsweise ist leicht verständlich und bedarf keiner besonderen Erklärung, wie die Vektoranalysis, die für die Mechanik ein weit natürlicheres Hilfsmittel ist, wie für die Geometrie.

In der Differentialgeometrie ist eine glückliche Fragestellung, die zu einer Erweiterung unseres anschaulichen Erkennens und zur Vermehrung der Mittel führt, mit denen wir die Mannigfaltigkeit der Erscheinungsformen zu beherrschen vermögen, die Hauptsache. Aber eine Frage ist hier erst vollständig beantwortet, wenn die analytische Lösung nach allen Seiten hin geometrisch durchleuchtet ist und anschauliche Form gewonnen hat. Dabei ist ein beständiges Zurückgreifen auf die grundlegenden Fragestellungen unvermeidlich. Wenn ich daher der Tangente, dem Krümmungsmittelpunkt, der Berührenden, der Einhüllenden usw. eingehende Erörterungen widme, so bedenke man, daß es mit den Grundbegriffen einer Wissenschaft geht, wie mit dem Frühling, hier wird es immer noch etwas zu singen, dort noch etwas zu sagen geben.

R. von Lilienthal.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Ebene Kurven.

I. Die einzelne Kurve.

II. Einfach unendliche Schar ebener Kurven.

Zweiter Teil.

Kurven im Raum.

I. Die Umgebung eines gewöhnlichen Punktes.

ERSTER TEIL.

EBENE KURVEN.

I. Die einzelne Kurve.

§ 1. Die Tangente.

Es gibt zwei Grundbegriffe, zu denen die Betrachtung der Krümmung ebener Kurven geführt hat, nämlich den Begriff der Tangente und den des Krümmungsmittelpunkts. Um den ersteren zu entwickeln, betrachten wir einen sich nirgends durchschneidenden, stetigen und ganz im Endlichen gelegenen Kurvenzug und beziehen die Punkte desselben auf ein rechtwinkliges Koordinatenkreuz, das der x- und y-Achse. Wir legen ferner auf der Kurve eine Richtung fest, so daß es zu jedem, nicht mit einem Endpunkt des Kurvenzugs zusammenfallenden, Punkte der Kurve auf ihr vorwärts und rückwärts gelegene Punkte gibt. Es seien nun x, y und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ die Koordinaten zweier Punkte des Kurvenzugs, von denen der erste nicht mit einem Endpunkte des Zugs zusammenfällt. Die Halbgerade, die von dem ersten Punkte ausgehend den zweiten trifft, bilde mit der positiven x-Achse den Winkel α_1. Dann ist:

$$\cos \alpha_1 = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}, \quad \sin \alpha_1 = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}},$$

wo die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist.

Nähert sich die Halbgerade, wenn sich der zweite Punkt auf derselben Seite des ersten bleibend dem ersten nähert, einer bestimmten Grenzlage, so nennen wir sie in dieser Grenzlage eine Halbtangente der Kurve. Da nun der zweite Punkt hinsichtlich des ersten sowohl ein nach vorwärts wie nach rückwärts gelegener Punkt sein kann, so wird entweder gar keine Grenzlage auftreten, oder nur eine, oder es werden zwei vorhanden sein. Im letzten Falle können sie einen Winkel $< \pi$, $= \pi$, oder $= 0$ miteinander bilden.

Es gibt nun eine weitumfassende Voraussetzung, unter der sich die fraglichen Grenzlagen bestimmen lassen, nämlich die folgende.

Die Koordinaten x und y sollen endliche und stetige Funktionen einer Veränderlichen t sein,

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t),$$

von der Art, daß 1. jedem Wert von t innerhalb des Intervalls $t_0 \ldots t_1$ nur ein Punkt der Kurve entspricht, 2. daß zwei verschiedenen Werten von t innerhalb des fraglichen Intervalls auch zwei verschiedene Kurvenpunkte entsprechen, 3. daß für jeden innerhalb des Intervalls liegenden Wert von t die Ausdrücke $f_1(t + \Delta t)$, $f_2(t + \Delta t)$ sich in gewöhnliche, also nach ganzen, positiven Potenzen von Δt fortschreitende, Potenzreihen entwickeln lassen, die für ein absolut genommen hinreichend kleines Δt konvergieren. Denken wir uns die Werte von t durch die Punkte einer geraden Strecke versinnbildet, so besagt die Bedingung 1., daß diese Strecke eindeutig auf das Kurvenstück abgebildet ist, und die Bedingung 2. besagt, daß auch umgekehrt das Kurvenstück eindeutig auf die gerade Strecke abgebildet ist. Infolge dieser gegenseitig eindeutigen Abbildung entspricht einem wachsenden t nur eine Fortschreitungsrichtung auf der Kurve, einem abnehmenden t die ihr entgegengesetzte. Die Potenzreihen:

$$\Delta x = \sum \frac{1}{n!} \overset{(n)}{f_1}(t) \Delta t^n, \quad \Delta y = \sum \frac{1}{n!} \overset{(n)}{f_2}(t) \Delta t^n$$

fangen im allgemeinen mit der ersten Potenz von Δt an; denn wäre längs eines Stückes der t-Geraden $f_1'(t)$ und $f_2'(t)$ gleich Null, so entspräche dem Stück ein Punkt, nicht ein Kurvenstück. Die Punkte, für die $f_1'(t)$ und $f_2'(t)$ gleichzeitig verschwinden, können daher nur vereinzelt auftreten, so daß sich in hinreichend kleiner Umgebung jedes einzelnen von ihnen kein weiterer solcher Punkt befindet.

Wir nennen einen Punkt der betrachteten Kurve, für den $f_1'(t)$ und $f_2'(t)$ nicht gleichzeitig verschwinden, einen gewöhnlichen Punkt der Abbildung des Kurvenstücks auf die t-Gerade oder kurz einen gewöhnlichen Punkt der Abbildung. Die übrigen Punkte seien außergewöhnliche Punkte der Abbildung genannt.

Die Ausdrucksweise Punkt der Abbildung soll anzeigen, daß das unter Umständen auftretende Außergewöhnliche in der Beschaffenheit der Abbildung seinen Grund haben kann und nicht notwendig auch etwas geometrisch Außergewöhnliches anzuzeigen braucht. Es wird geradezu unsere Aufgabe sein, zu ermitteln, unter welchen Bedingungen ein außergewöhnlicher Punkt der Abbildung auch ein geometrisch außergewöhnlicher Punkt der Kurve ist.

Um die Grenzwerte von $\cos \alpha_1$ und $\sin \alpha_1$ in allen Fällen leicht aufzufinden, bezeichnen wir mit ν den kleinsten Wert von m, für den die Ableitungen $\overset{(m)}{f_1}(t)$ und $\overset{(m)}{f_2}(t)$ nicht gleichzeitig verschwinden. Ferner

sei ε gleich $+1$ oder -1, je nachdem der Zuwachs Δt von t positiv oder negativ ist.

1. Halbtangente, Spitze. Infolge der Festsetzung über die Zahl ν ist:

$$\Delta x = \sum_{n=0} \frac{1}{(\nu+n)!} f_1^{(\nu+n)}(t)\, \Delta t^{\nu+n}, \qquad \Delta y = \sum_{n=0} \frac{1}{(\nu+n)!} f_2^{(\nu+n)}(t)\, \Delta t^{\nu+n}.$$

Eine obere Grenze von n ist hier nicht angebbar, da die fraglichen Summen sowohl aus endlich vielen Summanden zusammengesetzt sein als auch unendliche Reihen darstellen können.

Jetzt wird:

$$\cos \alpha_1 = \frac{\sum\limits_{n=0} \frac{1}{(\nu+n)!} f_1^{(\nu+n)}(t)\, \Delta t^{\nu+n}}{\sqrt{\left\{\sum\limits_{n=0} \frac{1}{(\nu+n)!} f_1^{(\nu+n)}(t)\, \Delta t^{\nu+n}\right\}^2 + \left\{\sum\limits_{n=0} \frac{1}{(\nu+n)!} f_2^{(\nu+n)}(t)\, \Delta t^{\nu+n}\right\}^2}}.$$

Die Potenzreihe unter dem Wurzelzeichen beginnt mit dem Gliede:

$$\frac{1}{\nu!\,\nu!}\left(f_1^{(\nu)}(t)^2 + f_2^{(\nu)}(t)^2\right) \Delta t^{2\nu}.$$

Da die Wurzel positiv ist, darf nur der absolute Betrag von Δt^ν d. h. $\varepsilon^\nu \Delta t^\nu$, aus der Wurzel herausgesetzt werden. Nehmen wir noch:

$$w_\nu(t) = \sqrt{f_1^{(\nu)}(t)^2 + f_2^{(\nu)}(t)^2},$$

wo das Zeichen $\sqrt{\ }$, wie stets im folgenden, den positiven Wert der Wurzel bedeuten soll, so erhalten wir:

$$\lim_{(\Delta t = 0)} \cos \alpha_1 = \frac{\varepsilon^\nu f_1^{(\nu)}(t)}{w_\nu(t)},$$

und entsprechend:

$$\lim_{(\Delta t = 0)} \sin \alpha_1 = \frac{\varepsilon^\nu f_2^{(\nu)}(t)}{w_\nu(t)}.$$

Unsere Voraussetzung über die Funktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ schließt hiernach den Fall, daß sich die beiden von einem Punkt ausgehenden Halbtangenten unter einem von Null und π verschiedenen Winkel schneiden, aus.

Ist ν ungerade, so erhalten wir, je nachdem Δt als positiv oder negativ angesehen wird, zwei nach entgegengesetzten Richtungen hin vom Kurvenpunkt ausgehende Halbtangenten, die zusammen die Tangente der Kurve bilden. Ist ν gerade, so gibt es, gleichviel auf welcher Seite des Kurvenpunkts man sich ihm nähert, nur eine Halbtangente. Dieser letzte Fall bildet eine geometrische Besonderheit. Ein Punkt, in dem dieser Fall eintritt, soll eine Spitze der Kurve genannt werden.

2. Positive Halbtangente, positive Halbnormale, Wendetangente, Hellebardenspitze, Schnabelspitze. Als positive Halbtangente in einem Punkt der Kurve bezeichnen wir diejenige, die einem wachsenden t entspricht. Hier ist also während des Grenzübergangs Δt beständig positiv, ε beständig gleich Eins. Den Winkel, den die positive Halbtangente mit der positiven x-Achse bildet, nennen wir α. Dann folgt:

$$\cos\alpha = \frac{f_1^{(\nu)}(t)}{w_\nu(t)}, \quad \sin\alpha = \frac{f_2^{(\nu)}(t)}{w_\nu(t)}.$$

Als eine Normale der Kurve pflegt man eine Gerade zu bezeichnen, welche auf einer Tangente im Berührungspunkt senkrecht steht. Um in der Normalen zwei Halbnormalen festzulegen, verstehen wir unter positiver Drehung der Ebene um einen Punkt eine solche, deren Richtung der Richtung derjenigen Drehung von der Größe $\frac{\pi}{2}$ parallel ist, welche die positive x-Achse in die positive y-Achse überführt. Als positive Halbnormale soll diejenige betrachtet werden, die aus der positiven Halbtangente durch eine positive Drehung der Ebene von der Größe $\frac{\pi}{2}$ um den Berührungspunkt der Tangente erhalten wird. Alle Punkte der Ebene, die mit denen der positiven Halbnormale auf derselben Seite der Tangente liegen, sollen als auf der positiven Seite der Tangente liegend angesehen werden. Ebenso sollen alle Punkte der Ebene, die mit denen der positiven Halbtangente auf derselben Seite der Normalen liegen, als auf der positiven Seite der Normalen liegend angesehen werden.

Es ist naturgemäß, die Punkte der Umgebung eines Kurvenpunkts auf das zu diesem gehörende Kreuz der Tangente und Normale zu beziehen. Setzen wir:

$$(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\sin\alpha = u,$$
$$-(\xi - x)\sin\alpha + (\eta - y)\cos\alpha = v,$$

so bedeutet u die positiv oder negativ genommene Maßzahl des senkrechten Abstandes des Punktes (ξ, η) von der Normalen, je nachdem der Punkt auf der positiven oder negativen Seite der Normalen liegt; es bedeutet v die positiv oder negativ genommene Maßzahl des senkrechten Abstandes des Punktes (ξ, η) von der Tangente, je nachdem der Punkt auf der positiven oder negativen Seite der Tangente liegt.

Wir erhalten die dem Werte $t + \Delta t$ entsprechenden Werte von u und v, wenn wir in den vorigen Gleichungen statt ξ und η setzen $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$. Bedeutet λ den kleinsten Wert von n, für den die Determinante $f_1^{(\nu)}(t) f_2^{(\nu+n)}(t) - f_2^{(\nu)}(t) f_1^{(\nu+n)}(t)$ nicht verschwindet, so ergibt sich:

$$u = \frac{1}{\nu!} w_\nu \varDelta t^\nu + \cdots,$$

$$v = \frac{f_1^{(\nu)}(t) f_2^{(\nu+\lambda)}(t) - f_2^{(\nu)}(t) f_1^{(\nu+\lambda)}(t)}{(\nu+\lambda)!\, w_\nu} \varDelta t^{\nu+\lambda} + \cdots$$

Wir nehmen nun den absoluten Betrag von $\varDelta t$ so klein, daß die Reihen für u und v das Vorzeichen ihres ersten Gliedes erhalten. Dann wird die Zahl u, wenn $\varDelta t$ von negativen Werten zu positiven übergeht, ihr Vorzeichen wechseln oder nicht, je nachdem ν ungerade oder gerade ist. Im ersten Fall schneidet die Kurve im betrachteten Punkt ihre Normale, im zweiten berührt sie dieselbe, und es liegt eine Spitze vor. Diese Definition einer Spitze dürfte zuerst von G. Peano gegeben sein. (Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, Torino, 1887, S. 62.)

Die Zahl v wechselt, wenn $\varDelta t$ vom Negativen zum Positiven übergeht, ihr Vorzeichen, oder sie behält es bei, je nachdem $\nu + \lambda$ ungerade oder gerade ist. Im ersten Falle schneidet die Kurve ihre Tangente in dem betrachteten Punkt, im zweiten liegt sie in hinreichender Nähe des betrachteten Punktes auf ein und derselben Seite der Tangente. Ist ν ungerade und λ ungerade, so sagen wir, daß die Kurve an der betrachteten Stelle eine gewöhnliche Tangente besitze; ist ν ungerade, λ gerade, so nennen wir die betreffende Tangente eine Wendetangente; ist ν gerade, so soll die entsprechende Spitze eine Hellebardenspitze heißen, wenn λ ungerade ist, aber eine Schnabelspitze, wenn λ gerade ist. Diese Benennungen sind anschaulicher wie die älteren: Spitze erster Art für Hellebardenspitze, Spitze zweiter Art für Schnabelspitze.

Von besonderer Wichtigkeit ist nun die Beantwortung der Frage, wie sich die Zahlen ν und λ ändern, wenn man statt t eine neue Veränderliche einführt. Es sei $t = \varphi(\tau)$ und:

$$\varDelta t = \frac{1}{\mu!} \varphi^{(\mu)}(\tau) \varDelta \tau^\mu + \cdots,$$

$$f_1(t) = \varphi_1(\tau), \quad f_2(t) = \varphi_2(\tau).$$

Damit unsere allgemeinen Forderungen für die Darstellung der Koordinaten x und y durch eine Veränderliche erfüllt bleiben, müssen sich bei absolut genommen hinreichend kleinem $\varDelta\tau$ für $\varDelta t$ sowohl positive wie negative Werte ergeben, da wir ja t als innerhalb des Intervalls $t_0 \ldots t_1$ befindlich, nicht mit einer Grenze t_0 oder t_1 zusammenfallend, betrachtet haben. Daher muß μ eine positive, ungerade ganze Zahl sein. Es wird:

$$\varDelta \varphi_1(\tau) = \frac{1}{\nu!} f_1^{(\nu)}(t) \left(\frac{1}{\mu!} \varphi^{(\mu)}(\tau)\right)^\nu \varDelta \tau^{\mu\nu} + \cdots,$$

$$\varDelta \varphi_2(\tau) = \frac{1}{\nu!} f_2^{(\nu)}(t) \left(\frac{1}{\mu!} \varphi^{(\mu)}(\tau)\right)^\nu \varDelta \tau^{\mu\nu} + \cdots$$

An die Stelle der Zahl ν tritt also die Zahl $\mu\nu$.

Um die Zahl zu finden, welche an die Stelle von λ tritt, berücksichtigen wir, daß aus dem Verschwinden der Determinanten:

$$f_1^{(\nu)} f_2^{(\nu+n)} - f_2^{(\nu)} f_1^{(\nu+n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots \lambda - 1)$$

die Darstellungen folgen:

$$\begin{aligned} f_1^{(\nu+1)} &= k_1 f_1^{(\nu)}, & f_2^{(\nu+1)} &= k_1 f_2^{(\nu)}, \\ f_1^{(\nu+2)} &= k_2 f_1^{(\nu)}, & f_2^{(\nu+2)} &= k_2 f_2^{(\nu)}, \\ &\ldots & &\ldots \\ f_1^{(\nu+\lambda-1)} &= k_{\lambda-1} f_1^{(\nu)}, & f_2^{(\nu+\lambda-1)} &= k_{\lambda-1} f_2^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Daher ist:

$$f_1(t + \varDelta t) = f_1^{(\nu)} \left(\frac{\varDelta t^{\nu}}{\nu!} + k_1 \frac{\varDelta t^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \cdots + k_{\lambda-1} \frac{\varDelta t^{\nu+\lambda-1}}{(\nu+\lambda-1)!} \right) + \frac{1}{(\nu+\lambda)!} f_1^{(\nu+\lambda)} \varDelta t^{\nu+\lambda} \ldots$$

Ersetzen wir nun $\varDelta t$ durch die angenommene Entwicklung nach Potenzen von $\varDelta \tau$, so folgen Darstellungen von der Form:

$$\varphi_1(\tau + \varDelta \tau) = f_1^{(\nu)} (c_0 \varDelta \tau^{\mu\nu} + c_1 \varDelta \tau^{\mu\nu+1} \ldots) + f_1^{(\nu+\lambda)} (d_0 \varDelta \tau^{\mu(\nu+\lambda)} + \cdots),$$
$$\varphi_2(\tau + \varDelta \tau) = f_2^{(\nu)} (c_0 \varDelta \tau^{\mu\nu} + c_1 \varDelta \tau^{\mu\nu+1} \ldots) + f_2^{(\nu+\lambda)} (d_0 \varDelta \tau^{\mu(\nu+\lambda)} + \cdots),$$

in denen die Zahlen c_0 und d_0 von Null verschieden sind.

Ist nun k eine Zahl $< \mu\lambda$, so hat man:

$$\frac{\varphi_1^{(\mu\nu+k)}}{(\mu\nu+k)!} = f_1^{(\nu)} c_k, \quad \frac{\varphi_2^{(\mu\nu+k)}}{(\mu\nu+k)!} = f_2^{(\nu)} c_k.$$

Es verschwindet somit die Determinante:

$$\varphi_1^{(\mu\nu)} \varphi_2^{(\mu\nu+k)} - \varphi_2^{(\mu\nu)} \varphi_1^{(\mu\nu+k)}.$$

Ist aber $k = \mu\lambda$, so hat man:

$$\frac{\varphi_1^{(\mu\nu+\mu\lambda)}}{(\mu\nu+\mu\lambda)!} = f_1^{(\nu)} c_{\mu\lambda} + f_1^{(\nu+\lambda)} d_0, \quad \frac{\varphi_2^{(\mu\nu+\mu\lambda)}}{(\mu\nu+\mu\lambda)!} = f_2^{(\nu)} c_{\mu\lambda} + f_2^{(\nu+\lambda)} d_0,$$

somit ist die Determinante:

$$\varphi_1^{(\mu\nu)} \varphi_2^{(\mu\nu+\mu\lambda)} - \varphi_2^{(\mu\nu)} \varphi_1^{(\mu\nu+\mu\lambda)}$$

von Null verschieden, und an die Stelle der Zahl λ tritt die Zahl $\mu\lambda$. Da μ ungerade, so sind die Zahlen $\mu\nu$ und $\mu\lambda$ mit ν und λ gleichzeitig gerade oder ungerade; unsere Kennzeichen für eine gewöhnliche Tangente, eine Wendetangente, oder eine Art von Spitzen bleiben also erhalten.

Im allgemeinen, d. h. nach Ausschluß getrennt liegender Punkte, ist $\nu = 1$ und $\lambda = 1$, wenn wir es mit einer krummen und nicht mit einer geraden Linie zu tun haben. Angenommen nämlich, es wäre innerhalb des Intervalls $t_0 \ldots t_1$ längs

einer Strecke beständig $f_1'f_2'' - f_2'f_1''$ gleich Null. Dann bestimmen wir innerhalb dieser Strecke eine zweite derartig, daß für keinen ihrer Punkte f_1' oder f_2' verschwindet. Längs der zweiten Strecke ist:

$$\frac{f_1''}{f_1'} = \frac{f_2''}{f_2'},$$

woraus sich durch Integration $f_2' = cf_1'$ und damit $y = cx + c_1$ ergibt. Unsere Voraussetzung kann daher nur längs einer geraden Linie erfüllt sein.

3. **Zyklische Abbildung der Tangenten.** Um die Richtungsänderungen der positiven Halbtangenten zu veranschaulichen, zieht man in einem Kreise, den man am einfachsten mit dem Halbmesser Eins um den Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt legt, lauter Halbmesser, die den positiven Halbtangenten der Kurve parallel sind. Der Halbmesser, welcher der im Kurvenpunkt P berührenden positiven Halbtangente parallel ist, endige im Punkte Q. Der Winkel α, den der fragliche Halbmesser mit der positiven x-Achse bildet, werde, als Funktion von t betrachtet, mit $\alpha(t)$ bezeichnet. Wir beschränken nun die Werte $t + \Delta t$ auf ein so kleines Intervall, daß in ihm mit Ausnahme des dem Werte t selbst ($\Delta t = 0$) entsprechenden Punktes nur gewöhnliche Punkte der Abbildung liegen. Dann ist:

$$\cos\alpha(t+\Delta t) = \frac{f_1'(t+\Delta t)}{w_1(t+\Delta t)}, \quad \sin\alpha(t+\Delta t) = \frac{f_2'(t+\Delta t)}{w_1(t+\Delta t)}.$$

Aber:

$$f_1'(t+\Delta t) = \sum_{n=0} \frac{1}{(\nu+n-1)!} f_1^{(\nu+n)}(t)\Delta t^{\nu+n-1},$$

$$f_2'(t+\Delta t) = \sum_{n=0} \frac{1}{(\nu+n-1)!} f_2^{(\nu+n)}(t)\Delta t^{\nu+n-1},$$

$$w_1(t+\Delta t) = \frac{\varepsilon^{\nu-1} w_\nu(t)}{(\nu-1)!}\Delta t^{\nu-1} + \cdots,$$

folglich:

$$\lim_{(\Delta t=0)} \cos\alpha(t+\Delta t) = \varepsilon^{\nu-1}\cos\alpha(t), \quad \lim_{(\Delta t=0)} \sin\alpha(t+\Delta t) = \varepsilon^{\nu-1}\sin\alpha(t).$$

Bei ungeradem ν ist somit der Winkel α stetig an der Stelle $\Delta t = 0$, bei geradem ν aber macht er einen Sprung von der Größe π. Der Punkt Q beschreibt, wenn Δt vom Negativen zum Positiven übergeht, bei ungeradem ν einen Kreisbogen; bei geradem ν nähert er sich einem Grenzpunkt Q_1 und springt dann in den diametral gegenüberliegenden Punkt Q_2 über. Wir fragen nun, ob die Bewegung des Punktes Q bei negativem Δt in demselben Sinne oder in dem entgegengesetzten Sinne erfolgt, wie bei positivem Δt, mit anderen Worten, ob der Winkel α beständig zu- oder abnimmt, oder ob er vom Zu-

nehmen oder Abnehmen zum Abnehmen oder Zunehmen übergeht, wenn $\varDelta t$ die Null durchschreitet. Zur Entscheidung dieser Frage bilden wir die Ableitung des Ausdrucks:

$$\alpha(t+\varDelta t) = \operatorname{arctg} \frac{f_2'(t+\varDelta t)}{f_1'(t+\varDelta t)}$$

nach $\varDelta t$ und erhalten:

$$\frac{d\alpha(t+\varDelta t)}{d\varDelta t} = \frac{f_1'(t+\varDelta t)f_2''(t+\varDelta t) - f_2'(t+\varDelta t)f_1''(t+\varDelta t)}{f_1'(t+\varDelta t)^2 + f_2'(t+\varDelta t)^2}.$$

Die Entwicklung des hier auftretenden Zählers beginnt mit der $2\nu+\lambda-3^{\text{ten}}$ Potenz von $\varDelta t$, und dies ist ein Satz, der für unsere Betrachtungen eine grundlegende Bedeutung besitzt.

Verstehen wir unter $\frac{1}{0!}$ die Eins, unter $\frac{1}{(-1)!}$ die Null, so ist stets, auch für $\nu = 1$:

$$f_\mu'(t+\varDelta t) = f_\mu^{(\nu)}\left(\frac{\varDelta t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + k_1\frac{\varDelta t^\nu}{\nu!} + \cdots + k_{\lambda-1}\frac{\varDelta t^{\nu+\lambda-2}}{(\nu+\lambda-2)!}\right)$$
$$+ \frac{1}{(\nu+\lambda-1)!}f_\mu^{(\nu+\lambda)}\varDelta t^{\nu+\lambda-1} + \cdots,$$

$$f_\mu''(t+\varDelta t) = f_\mu^{(\nu)}\left(\frac{\varDelta t^{\nu-2}}{(\nu-2)!} + k_1\frac{\varDelta t^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\cdots + k_{\lambda-1}\frac{\varDelta t^{\nu+\lambda-3}}{(\nu+\lambda-3)!}\right)$$
$$+ \frac{1}{(\nu+\lambda-2)!}f_\mu^{(\nu+\lambda)}\varDelta t^{\nu+\lambda-2} + \cdots,$$

wo μ eine der Zahlen 1, 2 bedeuten soll.

Somit:

$$f_1'(t+\varDelta t)f_2''(t+\varDelta t) - f_2'(t+\varDelta t)f_1''(t+\varDelta t)$$
$$= (f_1^{(\nu)}f_2^{(\nu+\lambda)} - f_2^{(\nu)}f_1^{(\nu+\lambda)})\left(\frac{1}{(\nu-1)!(\nu+\lambda-2)!} - \frac{1}{(\nu-2)!(\nu+\lambda-1)!}\right)\varDelta t^{2\nu+\lambda-3} + \cdots$$
$$= \frac{\lambda}{(\nu-1)!(\nu+\lambda-1)!}(f_1^{(\nu)}f_2^{(\nu+\lambda)} - f_2^{(\nu)}f_1^{(\nu+\lambda)})\varDelta t^{2\nu+\lambda-3} + \cdots,$$

wir erhalten daher:

$$\frac{d\alpha(t+\varDelta t)}{d\varDelta t} = \frac{(\nu-1)!\,\lambda}{(\nu+\lambda-1)!}\,\frac{f_1^{(\nu)}f_2^{(\nu+\lambda)} - f_2^{(\nu)}f_1^{(\nu+\lambda)}}{w_\nu^2}\varDelta t^{\lambda-1} + \cdots$$

Nimmt man den absoluten Wert von $\varDelta t$ so klein, daß diese Entwicklung das Vorzeichen ihres ersten Gliedes besitzt, so ändert die links stehende Ableitung, wenn $\varDelta t$ die Null durchschreitet, ihr Vorzeichen, oder sie behält es bei, je nachdem λ gerade oder ungerade ist. Falls $f_1^{(\nu)}f_2^{(\nu+\lambda)} - f_2^{(\nu)}f_1^{(\nu+\lambda)}$ positiv ist, nimmt bei geradem λ und wachsendem negativem $\varDelta t$ der Winkel α ab, bei geradem λ und wachsendem positivem $\varDelta t$ nimmt er zu, ebenso bei ungeradem λ und

wachsendem Δt. Falls $f_1^{(\nu)} f_2^{(\nu+\lambda)} - f_2^{(\nu)} f_1^{(\nu+\lambda)}$ negativ ist, nimmt bei geradem λ und wachsendem negativem Δt der Winkel α zu, bei geradem λ und wachsendem positivem Δt nimmt er ab, ebenso bei ungeradem λ und wachsendem Δt.

Für ein ungerades ν, d. h. für ein an der Stelle $\Delta t = 0$ stetiges α, folgt aus der vorigen Entwicklung, daß die erste an der Stelle t nicht verschwindende Ableitung von $\alpha(t)$ nach t die λ^{te} ist, da:

$$\frac{d^\mu \alpha(t)}{dt^\mu} = \lim_{(\Delta t = 0)} \frac{d^\mu \alpha(t + \Delta t)}{d \Delta t^\mu}.$$

Bei ungeradem ν besitzt also an der Stelle t der Winkel α ein Maximum oder Minimum, wenn λ gerade, sonst nicht.

Wir können jetzt die oben betrachteten Fälle mit Hilfe des Winkels α folgendermaßen kennzeichnen:

1. An einem Punkte mit einer gewöhnlichen Tangente ist der Winkel α stetig und nimmt vor und nach der Stelle entweder zu oder ab.

2. An einem Punkt mit einer Wendetangente ist der Winkel α stetig; er geht in ihm entweder vom Wachsen zum Abnehmen, oder vom Abnehmen zum Wachsen über.

3. An einer Hellebardenspitze macht der Winkel α einen Sprung von der Größe π und nimmt vor und nach der Stelle entweder zu oder ab.

4. An einer Schnabelspitze macht der Winkel α einen Sprung von der Größe π; er geht in ihr entweder vom Wachsen zum Abnehmen, oder vom Abnehmen zum Wachsen über.

§ 2. Der Krümmungsmittelpunkt.

Zu dem Wert t gehöre ein gewöhnlicher oder außergewöhnlicher Punkt der Abbildung. Den hinreichend wenig von t verschiedenen Zahlen $t + \Delta t$ entsprechen gewöhnliche Punkte der Abbildung. Die zu t gehörende Kurvennormale hat die Gleichungen:

$$\xi = x - h \sin \alpha(t), \quad \eta = y + h \cos \alpha(t),$$

die zu $t + \Delta t$ gehörende Normale hat die Gleichungen:

$$\xi = x + \Delta x - h' \sin \alpha(t + \Delta t), \quad \eta = y + \Delta y + h' \cos \alpha(t + \Delta t);$$

der dem Schnittpunkt beider Normalen entsprechende Wert von h ist bestimmt durch die Gleichung:

$$h = \frac{\Delta x \cos \alpha(t + \Delta t) + \Delta y \sin \alpha(t + \Delta t)}{\cos \alpha(t) \sin \alpha(t + \Delta t) - \sin \alpha(t) \cos \alpha(t + \Delta t)}.$$

Hier ist:

$$\cos\alpha(t)=\frac{f_1^{(\nu)}(t)}{w_\nu(t)},\qquad \sin\alpha(t)=\frac{f_2^{(\nu)}(t)}{w_\nu(t)},$$

$$\cos\alpha(t+\Delta t)=\frac{f_1'(t+\Delta t)}{w_1(t+\Delta t)},\quad \sin\alpha(t+\Delta t)=\frac{f_2'(t+\Delta t)}{w_1(t+\Delta t)}.$$

Daher:

$$h=\frac{\frac{1}{\nu!(\nu-1)!}\,w_\nu(t)^2\Delta t^{2\nu-1}+\cdots}{\frac{1}{(\nu+\lambda-1)!}\left(f_1^{(\nu)}(t)f_2^{(\nu+\lambda)}(t)-f_1^{(\nu+\lambda)}(t)f_2^{(\nu)}(t)\right)\Delta t^{\nu+\lambda-1}+\cdots},$$

wo ν und λ dieselbe Bedeutung wie im vorigen Paragraphen besitzen.

Ist $\nu=\lambda$, so erhält h für $\Delta t=0$ einen endlichen bestimmten Grenzwert, der ϱ genannt werden soll. Im allgemeinen ist $\nu=\lambda=1$ und:

$$\varrho=\frac{w_1(t)^2}{f_1'(t)f_2''(t)-f_2'(t)f_1''(t)},$$

aber für $\nu=\lambda>1$ ist:

$$\varrho=\frac{(2\nu-1)!\,w_\nu(t)^2}{\nu!(\nu-1)!\left(f_1^{(\nu)}(t)f_2^{(2\nu)}(t)-f_2^{(\nu)}(t)f_1^{(2\nu)}(t)\right)}.$$

Der letzte Fall kann an einem Punkt mit gewöhnlicher Tangente eintreten (ν ungerade), oder an einer Schnabelspitze (ν gerade).

Ist $\nu<\lambda$, so wird für $\Delta t=0$ der absolute Betrag von h unendlich groß. Für ein gerades $\lambda-\nu$ erhalten wir einen einzigen unendlich großen Grenzwert von h. Tritt dieser Fall an einem Punkte mit einer gewöhnlichen Tangente ein, so liegt eine weitere geometrische Besonderheit vor. Die betreffende Tangente soll stationäre Tangente genannt werden. Im übrigen kann der betrachtete Fall nur an einer Schnabelspitze auftreten. Für ein ungerades $\lambda-\nu$ erhalten wir für $\Delta t=0$, je nachdem die Annäherung an den betrachteten Punkt auf der einen oder anderen Seite erfolgt, einen positiv unendlichen oder einen negativ unendlichen Grenzwert von h. Dieser Fall tritt entweder an einem Punkt mit einer Wendetangente oder an einer Hellebardenspitze auf.

Ist $\nu>\lambda$, so ist der Grenzwert von h für $\Delta t=0$ gleich Null. Dieser Fall kann an einem gewöhnlichen Punkt der Abbildung nicht auftreten. Tritt er für einen Punkt mit einer gewöhnlichen Tangente ein, so liegt eine geometrische Besonderheit vor, für die es an einer passenden Bezeichnung fehlen dürfte.

Durch die vorstehende Betrachtung sind die außergewöhnlichen Punkte der Abbildung geometrisch gekennzeichnet mit Ausnahme des Falles ν ungerade und gleich λ, der später im § 8 S. 31 seine Erledigung finden wird.

Wir nennen den Endpunkt von ϱ den zum betrachteten Kurvenpunkt gehörenden Krümmungsmittelpunkt der Kurve

und erhalten, wenn wir seine Koordinaten mit x_1, y_1 bezeichnen, im allgemeinen:

$$x_1 = x - \frac{(f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2) f_2'(t)}{f_1'(t) f_2''(t) - f_2'(t) f_1''(t)},$$

$$y_1 = y + \frac{(f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2) f_1'(t)}{f_1'(t) f_2''(t) - f_2'(t) f_1''(t)}.$$

Die obigen Ergebnisse müssen sich auch dadurch finden lassen, daß wir die Ausdrücke von x_1 und y_1 für eine Stelle $t + \Delta t$ bilden, der ein gewöhnlicher Punkt der Abbildung entspricht, und dann mit Δt zur Null übergehen bei beliebig gewähltem t. Wir haben:

$$x_{1(t+\Delta t)} = f_1(t + \Delta t) - \frac{\{f_1'(t+\Delta t)^2 + f_2'(t+\Delta t)^2\} f_2'(t+\Delta t)}{f_1'(t+\Delta t) f_2''(t+\Delta t) - f_2'(t+\Delta t) f_1''(t+\Delta t)},$$

$$y_{1(t+\Delta t)} = f_2(t + \Delta t) + \frac{\{f_1'(t+\Delta t)^2 + f_2'(t+\Delta t)^2\} f_1'(t+\Delta t)}{f_1'(t+\Delta t) f_2''(t+\Delta t) - f_2'(t+\Delta t) f_1''(t+\Delta t)}.$$

Auf Grund der in § 1 S. 8 gegebenen Entwicklungen folgt:

$$x_{1(t+\Delta t)} = f_1(t + \Delta t) - \frac{(\nu + \lambda - 1)!\, w_\nu(t)^2 f_2^{(\nu)}(t)}{\lambda(\nu - 1)!\,(\nu - 1)!\, d_{\nu\lambda}} \Delta t^{\nu - \lambda} + \cdots,$$

$$y_{1(t+\Delta t)} = f_2(t + \Delta t) + \frac{(\nu + \lambda - 1)!\, w_\nu(t)^2 f_1^{(\nu)}(t)}{\lambda(\nu - 1)!\,(\nu - 1)!\, d_{\nu\lambda}} \Delta t^{\nu - \lambda} + \cdots,$$

wenn:

$$d_{\nu\lambda} = \overset{(\nu)}{f_1}(t) \overset{(\nu+\lambda)}{f_2}(t) - \overset{(\nu)}{f_2}(t) \overset{(\nu+\lambda)}{f_1}(t).$$

Die Grenzlage des betrachteten Punktes für $\Delta t = 0$ fällt also in die Kurve, wenn $\nu > \lambda$; sie besitzt die Koordinaten:

$$x_1 = x - \frac{(2\nu - 1)!\, w_\nu(t)^2 f_2^{(\nu)}(t)}{(\nu - 1)!\, \nu!\, d_{\nu\nu}},$$

$$y_1 = y + \frac{(2\nu - 1)!\, w_\nu(t)^2 f_1^{(\nu)}(t)}{(\nu - 1)!\, \nu!\, d_{\nu\nu}},$$

wenn $\nu = \lambda$; für $\nu < \lambda$ erhalten wir eine unendlich ferne Grenzlage, oder zwei nach entgegengesetzten Richtungen hin unendlich ferne Grenzlagen, je nachdem $\lambda - \nu$ gerade oder ungerade ist, alles dies in Übereinstimmung mit den vorigen Ergebnissen.

§ 3. Der Drehungsmittelpunkt.

Bringen wir eine in einer bestimmten Ebene gedachte Strecke irgendwie in eine neue, derselben Ebene angehörende Lage, so kann die Überführung stets durch eine Drehung der Ebene um einen ihrer Punkte bewerkstelligt werden, vorausgesetzt, daß die zweite Lage der ersten nicht parallel ist. Die Strecke werde in ihrer ersten Lage durch

die Punkte A $(x = \xi, y = \eta)$ und A_1 $(x = \xi_1, y = \eta_1)$ begrenzt. Durch eine Drehung der Ebene gelange A nach A' $(x = \xi + \Delta\xi, y = \eta + \Delta\eta)$ und A_1 nach A_1' $(x = \xi_1 + \Delta\xi_1, y = \eta_1 + \Delta\eta_1)$.

Die Gerade G_1, welche die Strecke AA' in ihrem Mittelpunkt senkrecht schneidet, hat die Gleichungen:

$$x = \xi + \frac{\Delta\xi}{2} + h\Delta\eta, \quad y = \eta + \frac{\Delta\eta}{2} - h\Delta\xi.$$

Die Gerade G_2, welche die Strecke A_1A_1' in ihrem Mittelpunkte senkrecht schneidet, hat die Gleichungen:

$$x = \xi_1 + \frac{\Delta\xi_1}{2} + h_1\Delta\eta_1, \quad y = \eta_1 + \frac{\Delta\eta_1}{2} - h_1\Delta\xi_1.$$

Der Schnittpunkt der Geraden G_1 und G_2 ist der gesuchte Drehungsmittelpunkt $(x = \xi_0, y = \eta_0)$.

Aus den Gleichungen:

$$\xi + \frac{\Delta\xi}{2} + h\Delta\eta = \xi_1 + \frac{\Delta\xi_1}{2} + h_1\Delta\eta_1,$$

$$\eta + \frac{\Delta\eta}{2} - h\Delta\xi = \eta_1 + \frac{\Delta\eta_1}{2} - h_1\Delta\xi_1$$

folgt:

$$h(\Delta\eta\Delta\xi_1 - \Delta\xi\Delta\eta_1)$$
$$= (\xi_1 - \xi)\Delta\xi_1 + (\eta_1 - \eta)\Delta\eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\xi_1\Delta(\xi_1 - \xi) + \frac{1}{2}\Delta\eta_1\Delta(\eta_1 - \eta),$$

somit:

$$\xi_0 = \xi + \frac{\Delta\xi}{2} + \Delta\eta\,\frac{(\xi_1 - \xi)\Delta\xi_1 + (\eta_1 - \eta)\Delta\eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\xi_1\Delta(\xi_1 - \xi) + \frac{1}{2}\Delta\eta_1\Delta(\eta_1 - \eta)}{\Delta\eta\Delta\xi_1 - \Delta\xi\Delta\eta_1},$$

$$\eta_0 = \eta + \frac{\Delta\eta}{2} - \Delta\xi\,\frac{(\xi_1 - \xi)\Delta\xi_1 + (\eta_1 - \eta)\Delta\eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\xi_1\Delta(\xi_1 - \xi) + \frac{1}{2}\Delta\eta_1\Delta(\eta_1 - \eta)}{\Delta\eta\Delta\xi_1 - \Delta\xi\Delta\eta_1}.$$

Wir denken uns nun, daß die Punkte A und A_1 Kurven beschreiben und sehen ξ, η, ξ_1, η_1 als Funktionen einer Veränderlichen ϑ an. Die Lagen A' und A_1' sollen dem Zuwachs $\Delta\vartheta$ von ϑ entsprechen. Geht man mit $\Delta\vartheta$ zur Grenze Null über, so gelangt der Drehungsmittelpunkt in eine Grenzlage, deren Koordinaten:

$$\xi_0 = \xi - \frac{d\eta}{d\vartheta}\,\frac{(\xi_1 - \xi)\frac{d\xi_1}{d\vartheta} + (\eta_1 - \eta)\frac{d\eta_1}{d\vartheta}}{\frac{d\xi}{d\vartheta}\frac{d\eta_1}{d\vartheta} - \frac{d\eta}{d\vartheta}\frac{d\xi_1}{d\vartheta}},$$

$$\eta_0 = \eta + \frac{d\xi}{d\vartheta}\,\frac{(\xi_1 - \xi)\frac{d\xi_1}{d\vartheta} + (\eta_1 - \eta)\frac{d\eta_1}{d\vartheta}}{\frac{d\xi}{d\vartheta}\frac{d\eta_1}{d\vartheta} - \frac{d\eta}{d\vartheta}\frac{d\xi_1}{d\vartheta}}$$

sind, vorausgesetzt, daß die Determinante:

$$\frac{d\xi}{d\vartheta}\frac{d\eta_1}{d\vartheta}-\frac{d\eta}{d\vartheta}\frac{d\xi_1}{d\vartheta}$$

von Null verschieden ist.

Unter dem zu dem Kurvenpunkt P gehörenden Drehungsmittelpunkt wollen wir die Grenzlage des Mittelpunkts derjenigen Drehung verstehen, durch die die positive Halbtangente in eine benachbarte Lage übergeht. Um alle möglichen Fälle zu umfassen, bestimmen wir den zu dem Werte $t+\Delta t$ gehörenden Drehungsmittelpunkt. Dabei werde der absolute Betrag von Δt so klein genommen, daß sich in dem dem Wertintervall $t-\Delta t$ bis $t+\Delta t$ entsprechenden Kurvenstück mit Ausnahme des Punktes $(\Delta t = 0)$ nur gewöhnliche Punkte der Abbildung befinden. Der Punkt A ist der Berührungspunkt der zu $t+\Delta t$ gehörenden positiven Halbtangente, der Punkt A_1 kann als der im Abstande Eins vom Berührungspunkt befindliche Punkt dieser Halbtangente angesehen werden. Dann ist:

$$\xi = f_1(t+\Delta t), \qquad \eta = f_2(t+\Delta t),$$

$$\xi_1 = f_1(t+\Delta t)+\frac{f_1'(t+\Delta t)}{w_1(t+\Delta t)}, \quad \eta_1 = f_2(t+\Delta t)+\frac{f_2'(t+\Delta t)}{w_1(t+\Delta t)},$$

und die Veränderliche ϑ wird gleich Δt.

Wir erhalten:

$$\xi_0 = f_1(t+\Delta t)-\frac{w_1(t+\Delta t)^2 f_2'(t+\Delta t)}{f_1'(t+\Delta t)f_2''(t+\Delta t)-f_2'(t+\Delta t)f_1''(t+\Delta t)},$$

$$\eta_1 = f_2(t+\Delta t)+\frac{w_1(t+\Delta t)^2 f_1'(t+\Delta t)}{f_1'(t+\Delta t)f_2''(t+\Delta t)-f_2'(t+\Delta t)f_1''(t+\Delta t)}.$$

Der Drehungsmittelpunkt fällt also mit dem Krümmungsmittelpunkt zusammen.

Unter der Voraussetzung, daß der zu dem Kurvenpunkt P gehörende Drehungsmittelpunkt um eine endliche, von Null verschiedene Strecke von dem Punkte P entfernt ist, können wir uns die Kurve in der Umgebung des Punktes P angenähert als ein kleines Bogenstück eines Kreises vorstellen, dessen Mittelpunkt der Krümmungsmittelpunkt ist. Je kleiner der absolute Wert des Krümmungshalbmessers ist, desto stärker wird der Kreisbogen gekrümmt sein, daher sind die Benennungen „Krümmungshalbmesser“, „Krümmungsmittelpunkt“ gerechtfertigt. Aber in den Ausnahmefällen, wo der Krümmungsmittelpunkt *auf der Kurve* oder *unendlich fern* von ihr liegt, ist die Vorstellung eines kleinen Kurvenstücks als eines Kreisbogens nicht statthaft.

§ 4. Der Krümmungskreis.

1. Erste Herleitung des Krümmungskreises. Zum Werte t gehöre ein gewöhnlicher Punkt der Abbildung. Wir geben t einmal den Zuwachs h, dann den Zuwachs k und erhalten so auf der Kurve drei Punkte, durch die ein Kreis gelegt werde. Es fragt sich, ob der Kreis eine bestimmte Grenzlage annimmt, wenn h und k in die Null übergehen. Die absoluten Beträge von h und k werden so klein angenommen, daß die auftretenden Reihenentwicklungen konvergieren. Wir setzen:

$$x' = f_1(t+h) = x + \Delta_1 x, \quad x'' = f_1(t+k) = x + \Delta_2 x,$$
$$y' = f_2(t+h) = y + \Delta_1 y, \quad y'' = f_2(t+k) = y + \Delta_2 y.$$

Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises habe die Koordinaten x_1', y_1'; sein Halbmesser sei r. Aus den jetzt geltenden Gleichungen:

$$(x - x_1')^2 + (y - y_1')^2 = r^2,$$
$$(x + \Delta_1 x - x_1')^2 + (y + \Delta_1 y - y_1')^2 = r^2,$$
$$(x + \Delta_2 x - x_1')^2 + (y - \Delta_2 y - y_1')^2 = r^2$$

folgt:

$$2(x_1' - x) = \frac{\Delta_2 y\{(\Delta_1 x)^2 + (\Delta_1 y)^2\} - \Delta_1 y\{(\Delta_2 x)^2 + (\Delta_2 y)^2\}}{\Delta_1 x \Delta_2 y - \Delta_2 x \Delta_1 y},$$

$$2(y_1' - y) = \frac{-\Delta_2 x\{(\Delta_1 x)^2 + (\Delta_1 y)^2\} + \Delta_1 x\{(\Delta_2 x)^2 + (\Delta_2 y)^2\}}{\Delta_1 x \Delta_2 y - \Delta_2 x \Delta_1 y}.$$

Man hat

$$\begin{aligned}\Delta_1 x \Delta_2 y - \Delta_2 x \Delta_1 y &= \sum_{m=1} \frac{1}{m!} f_1^{(m)}(t) h^m \sum_{n=1} \frac{1}{n!} f_2^{(n)}(t) k^n \\ &\quad - \sum_{m=1} \frac{1}{m!} f_2^{(m)}(t) h^m \sum_{n=1} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(t) k^n \\ &= \sum_{m+n=3} \frac{1}{m!\,n!} \left(f_1^{(m)}(t) f_2^{(n)}(t) - f_2^{(m)}(t) f_1^{(n)}(t)\right)(h^m k^n - h^n k^m),\end{aligned}$$

wenn in der Summe $m + n$ der erste Summand als der kleinere angesehen wird. Setzen wir die Determinante $f_1'(t) f_2''(t) - f_2'(t) f_1''(t) = d$ als von Null verschieden voraus, so beginnt unsere Entwicklung mit $\frac{d}{2} hk(k-h)$, und da: $h^m k^n - h^n k^m = h^m k^m (k^{n-m} - h^{n-m})$, so sind sämtliche Glieder unserer Entwicklung durch $hk(k-h)$ teilbar.

Um auch die Zähler der Ausdrücke von $2(x_1' - x)$ und $2(y_1' - y)$ nach Potenzen von Δt zu entwickeln, setzen wir:

$$(\Delta_1 x)^2 + (\Delta_1 y)^2 = \sum_{n=0} \varphi_n(t) h^{2+n}, \quad (\Delta_2 x)^2 + (\Delta_2 y)^2 = \sum_{n=0} \varphi_n(t) k^{2+n}$$

und erhalten:

$$\Delta_2 y\{(\Delta_1 x)^2 + (\Delta_1 y)^2\} - \Delta_1 y\{(\Delta_2 x)^2 + (\Delta_2 y)^2\}$$
$$= \sum_{m=1} \frac{1}{m!} \overset{(m)}{f_2}(t) \sum_{n=0} \varphi_n(t)(k^m h^{2+n} - h^m k^{2+n}).$$

Wenn $m < 2 + n$, so ist:

$$k^m h^{2+n} - h^m k^{2+n} = k^m h^m (h^{2+n-m} - k^{2+n-m}),$$

wenn $m > 2 + n$, so ist:

$$k^m h^{2+n} - h^m k^{2+n} = h^{2+n} k^{2+n} (k^{m-2-n} - h^{m-2-n}),$$

somit ist jedes Glied unserer Doppelsumme durch $kh(h-k)$ teilbar.

In derselben Weise zeigt sich, daß auch der Zähler des für $2(y_1' - y)$ aufgestellten Ausdrucks durch $kh(h-k)$ teilbar ist. Hebt man in den fraglichen Ausdrücken den gemeinsamen Faktor fort, und geht dann mit h und k zur Grenze Null über, so fällt der Mittelpunkt unseres Kreises mit dem Krümmungsmittelpunkt, der Halbmesser unseres Kreises mit dem absoluten Wert von ϱ zusammen. Der betrachtete Kreis in seiner Grenzlage für $h = 0$, $k = 0$ führt den Namen Krümmungskreis.

2. Zweite Herleitung des Krümmungskreises. Auf einfachere Art, wie vorhin, und zugleich allgemeinere Art, indem auch die außergewöhnlichen Punkte der Abbildung berücksichtigt werden, gelangt man zum Krümmungskreis folgendermaßen. Man betrachte einen Kreis, der durch den Kurvenpunkt $P(x, y)$ geht und in ihm dieselbe Tangente besitzt, wie die Kurve. Bedeutet r den positiv oder negativ genommenen Halbmesser des Kreises, je nachdem der Kreismittelpunkt in der positiven oder negativen Halbnormale liegt, so ist die Gleichung des Kreises:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + 2r\{(\xi - x)\sin\alpha - (\eta - y)\cos\alpha\} = 0.$$

Falls der Kreis durch den Kurvenpunkt mit den Koordinaten:

$$x' = f_1(t + \Delta t), \quad y' = f_2(t + \Delta t)$$

hindurchgehen soll, muß die Beziehung:

$$\Big(\sum_{n=1} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(t) \Delta t^n\Big)^2 + \Big(\sum_{n=1} f_2^{(n)}(t) \Delta t^n\Big)^2$$
$$+ 2r\Big\{\sin\alpha \sum_{n=1} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(t) \Delta t^n - \cos\alpha \sum_{n=1} f_2^{(n)}(t) \Delta t^n\Big\} = 0$$

erfüllt sein. Sind die ν^{ten} Ableitungen von $f_1(t)$ und $f_2(t)$ die ersten nicht gleichzeitig verschwindenden, so erhält die letzte Gleichung die Form:

$$\frac{1}{\nu!\,\nu!}\left(f_1^{(\nu)}(t)^2 + f_2^{(\nu)}(t)^2\right)\Delta t^{2\nu} + \cdots$$
$$+ 2r\frac{\sum\limits_{m=1}\frac{1}{(\nu+m)!}\left(f_2^{(\nu)}(t)f_1^{(\nu+m)}(t) - f_1^{(\nu)}(t)f_2^{(\nu+m)}(t)\right)\Delta t^{\nu+m}}{\sqrt{f_1^{(\nu)}(t)^2 + f_2^{(\nu)}(t)^2}} = 0.$$

Wird, wie früher, mit λ der kleinste Wert von m bezeichnet, für den die Determinante $f_2^{(\nu)}(t)f_1^{(\nu+m)}(t) - f_1^{(\nu)}(t)f_2^{(\nu+m)}(t)$ nicht verschwindet, so kommt:

$$\frac{1}{\nu!\,\nu!}\left(f_1^{(\nu)}(t)^2 + f_2^{(\nu)}(t)^2\right)\Delta t^{\nu} + \cdots$$
$$+ 2r\frac{f_2^{(\nu)}(t)f_1^{(\nu+\lambda)}(t) - f_1^{(\nu)}(t)f_2^{(\nu+\lambda)}(t)}{(\nu+\lambda)!\sqrt{f_1^{(\nu)}(t)^2 + f_2^{(\nu)}(t)^2}}\Delta t^{\lambda} + \cdots = 0.$$

Hiermit ist r als Funktion von Δt festgelegt. Wir gehen mit Δt zur Grenze Null über. Für $\lambda < \nu$ ist $\operatorname{Lim} r = 0$. Für $\lambda > \nu$ wird $\operatorname{Lim} r$ unendlich und zwar auf eine Weise oder auf zwei Weisen, je nachdem $\nu + \lambda$ gerade oder ungerade ist. Für $\lambda = \nu$ erhalten wir:

$$\operatorname{Lim} r = \frac{(2\nu-1)!\left(\sqrt{f_1^{(\nu)}(t)^2 + f_2^{(\nu)}(t)^2}\right)^3}{\nu!\,(\nu-1)!\left(f_1^{(\nu)}(t)f_2^{(2\nu)}(t) - f_2^{(\nu)}(t)f_1^{(2\nu)}(t)\right)}.$$

Im ersten Fall artet der Kreis für $\Delta t = 0$ in den Kurvenpunkt P, im zweiten Fall in die zu P gehörende Kurventangente aus, im dritten Fall fällt sein Mittelpunkt in der Grenzlage mit dem Krümmungsmittelpunkt zusammen.

§ 5. Die Bogenlänge als unabhängige Veränderliche.

Die bisher mit t bezeichnete unabhängige Veränderliche braucht für die Kurve nicht die geringste geometrische Bedeutung zu haben. In der Mechanik z. B. stellen wir die Koordinaten von Kurven als Funktionen der Zeit dar; letztere bleibt für die Kurve selbst ohne jede Bedeutung und gewinnt eine solche erst bei der Betrachtung einer Bewegung in der Kurve. Um nun mit einer unabhängigen Veränderlichen zu rechnen, die eine geometrische Bedeutung für die Kurve besitzt, führen wir statt t die Bogenlänge s der Kurve als unabhängige Veränderliche ein. Die Hauptfrage ist hier, ob die über die Funktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ gemachten Voraussetzungen bei Einführung von s erhalten bleiben oder nicht. Die Maßzahl der Bogenlänge einer Kurve ist bestimmt, falls 1. ein Nullpunkt für die Bogenlänge, und 2. eine Richtung auf der Kurve festgelegt ist, in der die Bogenlänge wachsen

soll. Zum Nullpunkt wählen wir irgendeinen gewöhnlichen Punkt der Abbildung, dem der Wert t' im Intervall von $t_0 \ldots t_1$ entspreche; die Bogenlänge werde mit wachsendem t als wachsend angesehen. Dann ist:

$$s = \int_{t'}^{t} \sqrt{f_1'(\vartheta)^2 + f_2'(\vartheta)^2}\, d\vartheta.$$

Durch diese Gleichung ist theoretisch t als Funktion von s bestimmt, praktisch nur dann, wenn 1. die Ausführung der Integration gelingt, wodurch $s = \varphi(t)$ erhalten werde, und 2. wenn sich aus der letzten Gleichung t als Funktion von s berechnen läßt, wodurch sich $t = \psi(s)$ ergebe. Setzt man diesen Ausdruck von t in $f_1(t)$ und $f_2(t)$ ein, so entstehe $g_1(s)$ und $g_2(s)$. Auf diesem Wege läßt sich wohl in einem einzelnen Fall, nicht aber allgemein das analytische Verhalten der Funktionen $g_1(s)$ und $g_2(s)$ verfolgen; namentlich läßt sich nicht allgemein die Frage beantworten, ob auch $g_1(s + \Delta s)$, $g_2(s + \Delta s)$ nach ganzen Potenzen von Δs entwickelbar sind. Wir behalten daher bei der Berechnung von $g_1(s)$ und $g_2(s)$, sowie ihrer Ableitungen nach s die Zahl t als Mittel der Berechnung bei und erhalten zunächst:

$$g_1(s) = f_1(t), \quad g_2(s) = f_2(t).$$

Da t durch obige Integralgleichung als Funktion von s festgelegt ist, kann jede analytische Funktion von t, etwa $f(t)$, auch als Funktion von s betrachtet werden, so daß $f(t) = g(s)$. Entspricht dem Werte t ein gewöhnlicher Punkt der Abbildung, so wird:

$$g'(s) = \frac{f'(t)}{\frac{ds}{dt}}, \quad g''(s) = \frac{\frac{ds}{dt} f''(t) - f'(t)\frac{d^2 s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}, \quad g^{(m)}(s) = \frac{\frac{d g^{(m-1)}(s)}{dt}}{\frac{ds}{dt}};$$

für einen außergewöhnlichen Punkt der Abbildung sind die Ableitungen von $g(s)$ als Grenzwerte zu definieren:

$$g'(s) = \operatorname*{Lim}_{(\Delta t = 0)} \frac{f'(t + \Delta t)}{w_1(t + \Delta t)},$$

$$g''(s) = \operatorname*{Lim}_{(\Delta t = 0)} \frac{w_1(t+\Delta t)^2 f''(t+\Delta t) - f'(t+\Delta t)\{f_1'(t+\Delta t) f_1''(t+\Delta t) + f_2'(t+\Delta t) f_2''(t+\Delta t)\}}{w_1(t+\Delta t)^4},$$

usw.!

Wenden wir dies auf $g_1(s)$ und $g_2(s)$ an, indem wir $f(t)$ zuerst durch $f_1(t)$, dann durch $f_2(t)$ ersetzen, so entsteht:

$$g_1'(s) = \frac{\varepsilon^{\nu - 1} f_1^{(\nu)}(t)}{w_\nu(t)}, \quad g_2'(s) = \frac{\varepsilon^{\nu - 1} f_2^{(\nu)}(t)}{w_\nu(t)},$$

wo ε, wie früher, die positive oder negative Einheit bedeutet, je nachdem Δt positiv oder negativ ist.

Für ein gerades ν, d. h. an einer Spitze, unterscheiden sich die vorwärts gebildeten Ableitungen durch das Vorzeichen von den rückwärts gebildeten, aber stets ist:

$$g_1'(s)^2 + g_2'(s)^2 = 1.$$

Um über die Entwicklungen von $g_1(s + \Delta s)$ und $g_2(s + \Delta s)$ Klarheit zu gewinnen, verstehen wir unter Δs den Zuwachs der Bogenlänge s, der dem Zuwachs Δt von t entspricht, so daß:

$$\Delta s = \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{f_1'(\vartheta)^2 + f_2'(\vartheta)^2}\, d\vartheta,$$

oder, wenn wir ϑ durch $t + \vartheta$ ersetzen:

$$\Delta s = \int_0^{\Delta t} \sqrt{f_1'(t+\vartheta)^2 + f_2'(t+\vartheta)^2}\, d\vartheta.$$

Dies Integral läßt sich durch Reihenentwicklung berechnen, falls wir den absoluten Wert von Δt so klein nehmen, daß die Wurzel $\sqrt{f_1'(t+\Delta t)^2 + f_2'(t+\Delta t)^2}$ nach Potenzen von Δt entwickelbar ist. Da:

$$f_1'(t+\vartheta)^2 + f_2'(t+\vartheta)^2 = \left(\frac{1}{(\nu-1)!}\right)^2 w_\nu(t)^2 \vartheta^{2\nu-2} + \cdots,$$

und die Wurzel positiv ist, entsteht:

$$\sqrt{f_1'(t+\vartheta)^2 + f_2'(t+\vartheta)^2} = \frac{\varepsilon^{\nu-1} w_\nu(t)}{(\nu-1)!} \vartheta^{\nu-1} + \cdots,$$

somit:

$$\Delta s = \frac{\varepsilon^{\nu-1} w_\nu(t)}{\nu!} (\Delta t^\nu + a_1 \Delta t^{\nu+1} + \cdots).$$

Für einen absolut genommen hinreichend kleinen Wert von Δt hat die Reihe für Δs das Vorzeichen ihres ersten Gliedes. Die Zahl $\varepsilon^{\nu-1} \Delta t^\nu$ ist mit Δt positiv oder negativ, folglich ist auch Δs unter der geltenden Beschränkung von Δt mit Δt positiv oder negativ in Gemäßheit mit der Integralgleichung für Δs. Wir setzen:

$$\Delta_1 s = \varepsilon^{\nu-1} \Delta s.$$

Dann ist $\Delta_1 s$ positiv, wenn Δs positiv. Bei negativem Δs ist $\Delta_1 s$ negativ für ein ungerades ν, positiv für ein gerades ν, daher ist $\Delta_1 s^{\frac{1}{\nu}}$ reell. Wird nun bei geradem ν unter $\left(\frac{\nu!}{w_\nu(t)}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ der positive Wert dieser ν^{ten} Wurzel, aber unter $\Delta_1 s^{\frac{1}{\nu}}$ der positive oder negative Wert dieser Wurzel verstanden, je nachdem Δs positiv oder negativ ist, so erhalten wir:

$$\Delta t = \left(\frac{\nu!}{w_\nu(t)}\right)^{\frac{1}{\nu}} \Delta_1 s^{\frac{1}{\nu}} + b_1 \Delta_1 s^{\frac{2}{\nu}} + \cdots,$$

und damit weiter:

$$g_1(s + \Delta s) = g_1(s) + g_{10}(s)\Delta_1 s + g_{11}(s)\Delta_1 s^{\frac{\nu+1}{\nu}} + g_{12}(s)\Delta_1 s^{\frac{\nu+2}{\nu}} + \cdots,$$

$$g_2(s + \Delta s) = g_2(s) + g_{20}\Delta_1 s + g_{21}(s)\Delta_1 s^{\frac{\nu+1}{\nu}} + g_{22}(s)\Delta_1 s^{\frac{\nu+2}{\nu}} + \cdots,$$

wo:

$$g_{10}(s) = \frac{f_1^{(\nu)}(t)}{w_\nu(t)}, \quad g_{20}(s) = \frac{f_2^{(\nu)}(t)}{w_\nu(t)}.$$

Für $\nu = 1$, also an einem gewöhnlichen Punkt der Abbildung auf die t-Gerade, erhalten wir nach ganzen Potenzen von Δs fortschreitende Reihen für $g_1(s + \Delta s)$, $g_2(s + \Delta s)$. Für $\nu > 1$ treten nach ganzen Potenzen von $\Delta_1 s$ fortschreitende Reihen auf, wenn alle Funktionen $g_{1m}(s)$ und $g_{2m}(s)$, in denen m kein ganzzahliges Vielfaches von ν ist, verschwinden. Indes kann dieser Fall nur für ein ungerades ν stattfinden, wo dann die Reihen zugleich nach ganzen Potenzen von Δs fortschreiten. Fände er für ein gerades ν statt, so wären die Reihen wegen $\Delta_1 s = \varepsilon^{\nu-1}\Delta s$ für ein positives wie für ein negatives Δs von demselben absoluten Betrage vollkommen gleich, und die vorausgesetzte Eindeutigkeit der Abbildung des Kurvenstücks auf die t-Gerade wäre aufgehoben.

Um die Ableitungen der Funktionen g_1 und g_2 an der Stelle $s + \Delta s$ zu erhalten, muß man die gefundenen Reihen nach Δs differenzieren. Dies ergibt:

$$g_1'(s + \Delta s) = \varepsilon^{\nu-1}\left\{g_{10}(s) + \frac{\nu+1}{\nu} g_{11}(s)\Delta_1 s^{\frac{1}{\nu}} + \cdots\right\},$$

$$g_1''(s + \Delta s) = \frac{\nu+1}{\nu^2} g_{11}(s)\Delta_1 s^{\frac{1-\nu}{\nu}} + \cdots, \text{ usw.!}$$

Wir wollen nun unsere Reihen näher betrachten.

1. Es möge k den kleinsten, von Null verschiedenen, Wert von n bedeuten, für den die Zahlen $g_{1n}(s)$ und $g_{2n}(s)$ nicht gleichzeitig verschwinden. Entwickeln wir den identisch verschwindenden Ausdruck:

$$g_1'(s + \Delta s)^2 + g_2'(s + \Delta s)^2 - 1$$

nach Potenzen von $\Delta_1 s^{\frac{1}{\nu}}$, so kommt:

$$0 = 2\left\{\frac{\nu+k}{\nu}\left(g_{10}(s)g_{1k}(s) + g_{20}(s)g_{2k}(s)\right)\Delta_1 s^{\frac{k}{\nu}} \right.$$
$$\left. + \frac{\nu+k+1}{\nu}\left(g_{10}(s)g_{1,k+1}(s) + g_{20}(s)g_{2,k+1}(s)\right)\Delta_1 s^{\frac{k+1}{\nu}} + \cdots\right\}$$
$$+ \left(\frac{\nu+k}{\nu}\right)^2\left(g_{1k}(s)^2 + g_{2k}(s)^2\right)\Delta_1 s^{\frac{2k}{\nu}} + \cdots$$

Hier ist der Voraussetzung nach der Ausdruck $g_{1k}(s)^2 + g_{2k}(s)^2$ von Null verschieden. Die vorstehende Gleichung kann nur dadurch erfüllt werden, daß in ihr die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von $\Delta_1 s^{\frac{1}{\nu}}$ verschwinden, somit müssen die Ausdrücke:

$$g_{10}(s)g_{1,k+n}(s) + g_{20}(s)g_{2,k+n}(s)$$

für $n = 0, 1, 2, \dots k-1$ verschwinden, und weiter muß:

$$2\,\frac{\nu+2k}{\nu}\left(g_{10}(s)g_{1,2k}(s) + g_{20}(s)g_{2,2k}(s)\right) + \left(\frac{\nu+k}{\nu}\right)^2\left(g_{1k}(s)^2 + g_{2k}(s)^2\right) = 0$$

sein, woraus folgt, daß die beiden Zahlen $g_{1,2k}(s)$ und $g_{2,2k}(s)$ nicht gleichzeitig verschwinden können.

2. Die Zahl k ist gleich der im § 1 definierten Zahl λ.

Da nämlich:

$$g_1(s + \Delta s) = f_1(t + \Delta t), \quad g_2(s + \Delta s) = f_2(t + \Delta t),$$

so folgt:

$$g_{10}(s)\Delta_1 s + g_{1k}(s)\Delta_1 s^{\frac{\nu+k}{\nu}} + \cdots$$
$$= \frac{1}{\nu!} f_1^{(\nu)}(t)\Delta t^\nu + \cdots + \frac{1}{(\nu+\lambda)!} f_1^{(\nu+\lambda)}(t)\Delta t^{\nu+\lambda} + \cdots,$$

$$g_{20}(s)\Delta_1 s + g_{2k}(s)\Delta_1 s^{\frac{\nu+k}{\nu}} + \cdots$$
$$= \frac{1}{\nu!} f_2^{(\nu)}(t)\Delta t^\nu + \cdots + \frac{1}{(\nu+\lambda)!} f_2^{(\nu+\lambda)}(t)\Delta t^{\nu+\lambda} + \cdots$$

Multiplizieren wir die erste dieser Gleichungen mit $-f_2^{(\nu)}(t)$, die zweite $f_1^{(\nu)}(t)$ und addieren dann die Gleichungen, so entsteht:

$$\left(f_1^{(\nu)}(t)g_{2k}(s) - f_2^{(\nu)}(t)g_{1k}(s)\right)\Delta_1 s^{\frac{\nu+k}{\nu}} + \cdots$$
$$= \frac{1}{(\nu+\lambda)!}\left(f_1^{(\nu)}(t)f_2^{(\nu+\lambda)}(t) - f_2^{(\nu)}(t)f_1^{(\nu+\lambda)}(t)\right)\Delta t^{\nu+\lambda} + \cdots$$

Der Koeffizient von $\Delta_1 s^{\frac{\nu+k}{\nu}}$ ist gleich:

$$w_\nu(t)\left(g_{10}(s)g_{2k}(s) - g_{20}(s)g_{1k}(s)\right),$$

wäre er gleich Null, so müßten wegen $g_{10}(s)g_{1k}(s) + g_{20}(s)g_{2k}(s) = 0$ sowohl $g_{1k}(s)$ wie $g_{2k}(s)$ verschwinden, was gegen unsere Voraussetzung ist.

Die Entwicklung von Δt beginnt mit $\Delta_1 s^{\frac{1}{\nu}}$, somit ist k gleich λ. Auf Grund der vorstehenden Bemerkungen erhalten wir:

$$g_1(s + \Delta s) = g_1(s) + g_{10}(s)\Delta_1 s + g_{1\lambda}(s)\Delta_1 s^{\frac{\nu+\lambda}{\nu}} + \cdots,$$
$$g_2(s + \Delta s) = g_2(s) + g_{20}(s)\Delta_1 s + g_{2\lambda}(s)\Delta_1 s^{\frac{\nu+\lambda}{\nu}} + \cdots$$

Hier ist:

$$g_{1\lambda}(s)^2 + g_{2\lambda}(s)^2 > 0, \quad g_{1,2\lambda}(s)^2 + g_{2,2\lambda}(s)^2 > 0.$$

Ferner ist:

$$g_{10}(s)g_{1n}(s) + g_{20}(s)g_{2n}(s) = 0, \text{ wenn } n = \lambda,\ \lambda+1, \ldots 2\lambda - 1,$$

sowie:

$$2\nu(\nu+2\lambda)\big(g_{10}(s)g_{1,2\lambda}(s) + g_{20}(s)g_{2,2\lambda}(s)\big) + (\nu+\lambda)^2\big(g_{1\lambda}(s)^2 + g_{2\lambda}(s)^2\big) = 0.$$

Wir nennen den dem Werte s der Bogenlänge entsprechenden Kurvenpunkt einen **gewöhnlichen Punkt der Abbildung der Kurve auf die s-Gerade**, wenn die Entwicklungen von $g_1(s + \varDelta s)$ und $g_2(s + \varDelta s)$ nach ganzen Potenzen von $\varDelta s$ fortschreiten. In diesem Falle verstehen wir unter k den kleinsten, die Eins übersteigenden, Wert von n, für den $g_1^{(n)}(s)$ und $g_2^{(n)}(s)$ nicht zugleich verschwinden, und erhalten:

$$g_1(s + \varDelta s) = g_1(s) + g_1'(s)\varDelta s + \frac{1}{k!}g_1^{(k)}(s)\varDelta s^k + \cdots,$$

$$g_2(s + \varDelta s) = g_2(s) + g_2'(s)\varDelta s + \frac{1}{k!}g_2^{(k)}(s)\varDelta s^k + \cdots$$

mit den Bedingungen:

$$g_1'(s)g_1^{(n)}(s) + g_2'(s)g_2^{(n)}(s) = 0, \text{ wenn } n = k,\ k+1, \ldots 2k-2,$$

sowie:

$$\frac{2}{(2k-2)!}\Big(g_1'(s)g_1^{(2k-1)}(s) + g_2'(s)g_2^{(2k-1)}(s)\Big) + \left(\frac{1}{(k-1)!}\right)^2\Big(g_1^{(k)}(s)^2 + g_2^{(k)}(s)^2\Big) = 0.$$

Der dem Werte s der Bogenlänge entsprechende Kurvenpunkt soll ein **außergewöhnlicher Punkt der Abbildung der Kurve auf die s-Gerade** heißen, wenn die Entwicklungen von $g_1(s + \varDelta s)$ und $g_2(s + \varDelta s)$ nach gebrochenen Potenzen von $\varDelta_1 s$ fortschreiten.

Hinsichtlich des Winkels α, den die einem wachsenden s entsprechende Halbtangente mit der positiven x-Achse bildet, sei bemerkt, daß für einen gewöhnlichen Punkt der Abbildung auf die s-Gerade:

$$\cos\alpha = g_1'(s), \quad \sin\alpha = g_2'(s),$$

für einen außergewöhnlichen:

$$\cos\alpha = g_{10}(s), \quad \sin\alpha = g_{20}(s)$$

ist.

Der Winkel α, als Funktion von s betrachtet, werde mit $\alpha(s)$ bezeichnet. Dann ist, wenn zu dem Werte $s + \varDelta s$ ein gewöhnlicher Punkt der Abbildung gehört:

$$\cos\alpha(s + \varDelta s) = g_1'(s + \varDelta s), \quad \sin\alpha(s + \varDelta s) = g_2'(s + \varDelta s),$$

also für die Umgebung eines gewöhnlichen Punktes der Abbildung:

$$\cos\alpha(s+\varDelta s)=g_1'(s)+\frac{1}{(k-1)!}g_1^{(k)}(s)\varDelta s^{k-1}+\cdots,$$
$$\sin\alpha(s+\varDelta s)=g_2'(s)+\frac{1}{(k-1)!}g_2^{(k)}(s)\varDelta s^{k-1}+\cdots,$$

für die Umgebung eines außergewöhnlichen:

$$\cos\alpha(s+\varDelta s)=\varepsilon^{\nu-1}\Big(g_{10}(s)+\frac{\nu+\lambda}{\nu}g_{1\lambda}(s)\varDelta s^{\frac{\lambda}{\nu}}+\cdots\Big),$$
$$\sin\alpha(s+\varDelta s)=\varepsilon^{\nu-1}\Big(g_{20}(s)+\frac{\nu+\lambda}{\nu}g_{2\lambda}(s)\varDelta s^{\frac{\lambda}{\nu}}+\cdots\Big).$$

Wir führen die wesentlichsten in den §§ 1 und 2 angestellten Betrachtungen im folgenden unter Benutzung der Bogenlänge s als unabhängiger Veränderlicher durch.

§ 6. Wendetangenten, Spitzen, Krümmungshalbmesser, wenn die Bogenlänge als unabhängige Veränderliche angesehen wird.

Wir bezeichneten im § 1 mit u und v die Koordinaten des Kurvenpunkts $(x+\varDelta x,\ y+\varDelta y)$ in bezug auf das zum Punkte $(x,\ y)$ gehörende Kreuz der Tangente und Normale. Man hat somit hier:

$$u=\big(g_1(s+\varDelta s)-g_1(s)\big)\cos\alpha+\big(g_2(s+\varDelta s)-g_2(s)\big)\sin\alpha,$$
$$v=-\big(g_1(s+\varDelta s)-g_1(s)\big)\sin\alpha+\big(g_2(s+\varDelta s)-g_2(s)\big)\cos\alpha.$$

Gehört zu s ein gewöhnlicher Punkt (P) der Abbildung auf die s-Gerade, so ergibt sich:

$$u=\varDelta s+\cdots$$
$$v=\frac{1}{k!}\Big(g_1'(s)g_2^{(k)}(s)-g_2'(s)g_1^{(k)}(s)\Big)\varDelta s^k+\cdots,$$

wo die Determinante $g_1'(s)g_2^{(k)}(s)-g_2'(s)g_1^{(k)}(s)$ infolge der Bedingungen $g_1'(s)g_1^{(k)}(s)+g_2'(s)g_2^{(k)}(s)=0$ und $g_1^{(k)}(s)^2+g_2^{(k)}(s)^2>0$ von Null verschieden ist.

Die Entwicklung von u zeigt, daß die Kurve von ihrer Normale im Punkte P geschnitten wird, daß also keine Spitze vorliegt; die Entwicklung von v zeigt, daß die in P berührende Tangente eine gewöhnliche oder eine Wendetangente ist, je nachdem k gerade oder ungerade ausfällt.

Für einen außergewöhnlichen Punkt P der Abbildung auf die s-Gerade ergibt sich:

$$u=\varDelta_1 s+\cdots,$$
$$v=\big(g_{10}(s)g_{2\lambda}(s)-g_{20}(s)g_{1\lambda}(s)\big)\varDelta_1 s^{\frac{\nu+\lambda}{\nu}}+\cdots$$

Wenn Δs die Null durchschreitet, wechselt $\Delta_1 s$ sein Zeichen, falls ν ungerade, es bleibt positiv, wenn ν gerade; somit zeigt die erste Gleichung, daß für ein gerades ν eine Spitze vorliegt. Die zweite Gleichung zeigt, daß die Kurve von ihrer Tangente geschnitten wird oder nicht, je nachdem $\nu + \lambda$ ungerade oder gerade ausfällt. Die im § 1 aufgestellten Kennzeichen für eine gewöhnliche Tangente, eine Wendetangente, eine Hellebardenspitze, und eine Schnabelspitze bleiben somit erhalten.

Zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunkts benutzen wir die im § 2 abgeleitete Gleichung:

$$h = \frac{\Delta x \cos \alpha(t + \Delta t) + \Delta y \sin \alpha(t + \Delta t)}{\cos \alpha(t) \sin \alpha(t + \Delta t) - \sin \alpha(t) \cos \alpha(t + \Delta t)}.$$

Für einen gewöhnlichen Punkt der Abbildung auf die s-Gerade entsteht:

$$h = \frac{\Delta s + \cdots}{\frac{1}{(k-1)!}\left(g_1'(s) g_2^{(k)}(s) - g_2'(s) g_1^{(k)}(s)\right) \Delta s^{k-1} + \cdots}.$$

Im allgemeinen, d. h. für $k = 2$, ergibt sich demnach:

$$\varrho = \frac{1}{g_1'(s) g_2''(s) - g_2'(s) g_1''(s)}.$$

Ist $k > 2$, so hat man es bei geradem k mit einem unendlich fernen Krümmungsmittelpunkt zu tun, bei ungeradem k aber mit zwei nach entgegengesetzten Richtungen hin unendlich fernen Krümmungsmittelpunkten.

Für einen außergewöhnlichen Punkt der Abbildung auf die s-Gerade kommt:

$$h = \frac{\Delta_1 s + \cdots}{\frac{\nu + \lambda}{\nu}\left(g_{10}(s) g_{2\lambda}(s) - g_{20}(s) g_{1\lambda}(s)\right) \Delta_1 s^{\frac{\lambda}{\nu}} + \cdots}.$$

Für $\nu < \lambda$ erhalten wir einen oder zwei unendlich ferne Krümmungsmittelpunkte, je nachdem $\lambda - \nu$ gerade oder ungerade ist; für $\nu > \lambda$ liegt der Krümmungsmittelpunkt auf der Kurve. Wenn $\nu = \lambda$ erhalten wir den endlichen Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{1}{2\left(g_{10}(s) g_{2\nu}(s) - g_{20}(s) g_{1\nu}(s)\right)}.$$

Auf Grund des Vorstehenden können wir die folgenden Sätze aussprechen. Ein Punkt mit einer gewöhnlichen Tangente, bei dem $\nu = \lambda$ ist, kann sowohl ein gewöhnlicher wie ein außergewöhnlicher Punkt der Abbildung auf die s-Gerade sein. Dasselbe findet statt bei einem Punkt mit einer stationären Tangente oder einer Wendetangente. Ein Punkt mit einer gewöhnlichen Tangente, bei der

$\nu > \lambda$, also $\varrho = 0$ ist, ebenso eine Spitze, kann nur ein außergewöhnlicher Punkt der Abbildung auf die s-Gerade sein.

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunkts sind im allgemeinen, d. h. wenn dem Werte s ein gewöhnlicher Punkt der Abbildung entspricht und $k = 2$ ist, durch die Gleichungen bestimmt:

$$x_1 = g_1(s) - \frac{g_2'(s)}{g_1'(s)g_2''(s) - g_2'(s)g_1''(s)},$$
$$y_1 = g_2(s) + \frac{g_1'(s)}{g_1'(s)g_2''(s) - g_2'(s)g_1''(s)}.$$

Aus der Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho} = g_1'(s)g_2''(s) - g_2'(s)g_1''(s)$$

folgen durch Multiplikation mit $g_2'(s)$ oder $g_1'(s)$ die sogenannten Frenetschen Formeln:

$$g_1''(s) = \frac{-g_2'(s)}{\varrho},$$
$$g_2''(s) = \frac{g_1'(s)}{\varrho}.$$

§ 7. Die Krümmungsmittelpunktskurve.

Den Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Kurve pflegt man ihre Krümmungsmittelpunktskurve (auch Evolute oder Zentrakurve) zu nennen. Als Gleichungen dieser Kurve treten die folgenden auf:

$$x_1 = x - \varrho g_2'(s), \quad y_1 = y + \varrho g_1'(s).$$

Hier sind x_1 und y_1 als Funktionen der Bogenlänge der Ausgangskurve (x, y) dargestellt; es spielt also s dieselbe Rolle, wie in den ersten Paragraphen die Veränderliche t.

Wir fragen zunächst nach der Bogenlänge der Krümmungsmittelpunktskurve. Dem Wertintervall $s_0 \ldots s$ entspreche ein Kurvenstück, das nur gewöhnliche Punkte der Abbildung auf die s-Gerade mit endlichen Werten von ϱ enthalte. Dann ist die Determinante $g_1'(s)g_2''(s) - g_2'(s)g_1''(s)$ längs des Kurvenstücks von Null verschieden, und die Ableitung $\frac{d\varrho}{ds}$ bleibt längs des Kurvenstücks endlich.

Da:

$$g_2''(s) = \frac{g_1'(s)}{\varrho}, \quad g_1''(s) = -\frac{g_2'(s)}{\varrho},$$

so kommt:

$$\frac{dx_1}{ds} = -\frac{d\varrho}{ds}g_2'(s), \quad \frac{dy_1}{ds} = \frac{d\varrho}{ds}g_1'(s).$$

Bezeichnet s_1 die dem fraglichen Intervall entsprechende Bogenlänge der Krümmungsmittelpunktskurve, so entsteht:

$$s_1 = \int\limits_{s_0}^{s} \left| \frac{d\varrho}{ds} \right| ds,$$

wenn wir die Bogenlänge s_1 mit wachsendem s als wachsend ansehen und unter $\left|\frac{d\varrho}{ds}\right|$, wie üblich, den absoluten Wert von $\frac{d\varrho}{ds}$ verstehen.

Bleibt $\frac{d\varrho}{ds}$ im Intervall $s_0 \ldots s$ beständig größer oder gleich Null, so wird

$$s_1 = \varrho - \varrho_0,$$

wenn wir den Wert von ϱ an der Stelle s_0 mit ϱ_0 bezeichnen. Ist $\frac{d\varrho}{ds}$ im Intervall $s_0 \ldots s$ beständig kleiner oder gleich Null, so entsteht:

$$s_1 = \varrho_0 - \varrho;$$

geht aber $\frac{d\varrho}{ds}$ an einer Stelle unter Zeichenwechsel durch die Null hindurch, so wird diese Stelle für die Integration von Einfluß. Nehmen wir z. B. $s_0 < s' < s$ und setzen die Ableitung $\frac{d\varrho}{ds}$ im Intervall $s_0 \ldots s'$ als positiv, im Intervall $s' \ldots s$ als negativ voraus, so erhalten wir:

$$s_1 = \int\limits_{s_0}^{s} \left| \frac{d\varrho}{ds} \right| ds = \int\limits_{s_0}^{s'} \frac{d\varrho}{ds} ds - \int\limits_{s'}^{s} \frac{d\varrho}{ds} ds = 2\varrho' - \varrho_0 - \varrho,$$

wenn mit ϱ' der Wert von ϱ an der dem Wert s' entsprechenden Stelle bezeichnet wird.

Es fragt sich nun, welche geometrische Bedeutung dem Verschwinden von $\frac{d\varrho}{ds}$ zukommt. Um hierüber Klarheit zu gewinnen, untersuchen wir an der entsprechenden Stelle die Krümmungsmittelpunktskurve und entwickeln $x_1(s + \Delta s)$, $y_1(s + \Delta s)$ nach Potenzen von Δs.

Wir nehmen an, daß die μ^{te} Ableitung von ϱ, also $\varrho^{(\mu)}$, die erste an der Stelle s nicht verschwindende Ableitung von ϱ nach s sei. Durch μ-malige Differentiation der Gleichungen: $g_1''(s) = -\frac{g_2'(s)}{\varrho}$, $g_2''(s) = \frac{g_1'(s)}{\varrho}$ ergibt sich:

$$g_2'''(s) = \frac{g_1''(s)}{\varrho}, \qquad g_1'''(s) = -\frac{g_2''(s)}{\varrho},$$

$$g_2^{(4)}(s) = \frac{g_1'''(s)}{\varrho}, \qquad g_1^{(4)}(s) = -\frac{g_2'''(s)}{\varrho},$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$g_2^{(\mu+1)}(s) = \frac{g_1^{(\mu)}(s)}{\varrho}, \qquad g_1^{(\mu+1)}(s) = -\frac{g_2^{(\mu)}(s)}{\varrho},$$

$$g_2^{(\mu+2)}(s) = -\frac{g_1'(s)}{\varrho^2}\varrho^{(\mu)} + \frac{g_1^{(\mu+1)}(s)}{\varrho}, \qquad g_1^{(\mu+2)}(s) = \frac{g_2'(s)}{\varrho^2}\varrho^{(\mu)} - \frac{g_2^{(\mu+1)}(s)}{\varrho}.$$

Daher:

$$x_1 + \Delta x_1 = g_1(s) + g_1'(s)\Delta s \cdots + \frac{1}{\mu!} g_1^{(\mu)}(s)\Delta s^\mu + \frac{1}{(\mu+1)!} g_1^{(\mu+1)}(s)\Delta s^{\mu+1} + \cdots$$

$$-\left(\varrho + \frac{1}{\mu!}\varrho^{(\mu)}\Delta s^\mu + \frac{1}{(\mu+1)!}\varrho^{(\mu+1)}\Delta s^{\mu+1}\cdots\right)\left(g_2'(s) + \frac{g_1'(s)}{\varrho}\Delta s + \frac{1}{2}\frac{g_1''(s)}{\varrho}\Delta s^2 \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\mu!}\frac{g_1^{(\mu)}(s)}{\varrho}\Delta s^\mu + \frac{1}{(\mu+1)!}\left(\frac{g_1^{(\mu+1)}(s)}{\varrho} - \frac{g_1'(s)}{\varrho^2}\varrho^{(\mu)}\right)\Delta s^{\mu+1} + \cdots\right),$$

$$\Delta x_1 = -\frac{\varrho^{(\mu)}}{\mu!} g_2'(s)\Delta s^\mu - \frac{1}{(\mu+1)!}\left(\mu\frac{g_1'(s)}{\varrho}\varrho^{(\mu)} + g_2'(s)\,\varrho^{(\mu+1)}\right)\Delta s^{\mu+1} + \cdots$$

Entsprechend folgt:

$$\Delta y_1 = \frac{\varrho^{(\mu)}}{\mu!} g_1'(s)\Delta s^\mu - \frac{1}{(\mu+1)!}\left(\mu\frac{g_2'(s)}{\varrho}\varrho^{(\mu)} - g_1'(s)\,\varrho^{(\mu+1)}\right)\Delta s^{\mu+1} + \cdots,$$

so daß:

$$\frac{d^{(\mu)}x_1}{ds^\mu} = -\varrho^{(\mu)}g_2'(s), \qquad \frac{d^{(\mu+1)}x_1}{ds^{\mu+1}} = -\mu\frac{\varrho^{(\mu)}}{\varrho}g_1'(s) - \varrho^{(\mu+1)}g_2'(s),$$

$$\frac{d^{(\mu)}y_1}{ds^\mu} = \varrho^{(\mu)}g_1'(s), \qquad \frac{d^{(\mu+1)}y_1}{ds^{\mu+1}} = -\mu\frac{\varrho^{(\mu)}}{\varrho}g_2'(s) + \varrho^{(\mu+1)}g_1'(s).$$

Die Gleichungen für die μ^{ten} Ableitungen von x_1 und y_1 zeigen, daß die einem wachsenden s entsprechende Halbtangente der Krümmungsmittelpunktskurve der positiven Halbnormale der Ausgangskurve gleichgerichtet oder entgegengesetzt gerichtet ist, je nachdem $\varrho^{(\mu)}$ positiv oder negativ ausfällt.

Wir erhalten weiter aus den letzten Gleichungen:

$$\frac{d^{(\mu)}x_1}{ds^{(\mu)}}\frac{d^{(\mu+1)}y_1}{ds^{\mu+1}} - \frac{d^{(\mu)}y_1}{ds^\mu}\frac{d^{(\mu+1)}x_1}{ds^{\mu+1}} = \mu\frac{(\varrho^{(\mu)})^2}{\varrho}.$$

Für die kennzeichnenden Zahlen ν und λ ergeben sich daher die Werte μ und Eins.

Ist μ gerade, so besitzt ϱ an der betrachteten Stelle ein Maximum oder Minimum, je nachdem $\varrho^{(\mu)}$ negativ oder positiv ist. Die Krümmungsmittelpunktskurve besitzt an der entsprechenden Stelle nach § 1 eine Hellebardenspitze, für die nach § 2 der Krümmungshalbmesser gleich Null ist.

Ist μ ungerade, so sind für $\mu = 1$ Kurvenpunkt und Krümmungsmittelpunkt gewöhnliche Punkte der Abbildungen beider Kurven auf die s- bzw. s_1-Gerade mit endlichen, von Null verschiedenen Krümmungshalbmessern; für $\mu > 1$ liegt nach § 1 die Krümmungsmittelpunktskurve in der Nähe des fraglichen Punktes ganz auf einer Seite der Tangente und ihr Krümmungshalbmesser ist nach § 2 hier gleich Null.

Um die Erzeugung des dem Wertintervall $s_0 \ldots s' \ldots s$ entsprechenden Kurvenstücks aus dem zugehörigen Stück der Krümmungsmittelpunktskurve darzutun (Fig. 1), bezeichnen wir die zu s_0, s', s gehörenden Punkte der Ausgangskurve mit P_0, P', P, die entsprechenden Punkte der Evolute mit Q_0, Q', Q und nehmen wie oben $\frac{d\varrho}{ds}$ im Intervall $s_0 \ldots s'$ als positiv, im Intervall $s' \ldots s$ als negativ, so daß der Punkt Q' eine Hellebardenspitze ist. Ein gespannter Faden von der Länge ϱ' sei so gelegt, daß ein Endpunkt des Fadens auf den Punkt Q' fällt, ein Stück von der Länge $\varrho' - \varrho_0$ das Kurvenstück $Q' Q_0$ bedeckt, und daß das noch übrige Fadenstück ϱ_0 bis zum Endpunkt A des Fadens in der negativen Halbtangente liegt, welche die Krümmungsmittelpunktskurve in Q_0 berührt. Wickeln wir nun den Faden ab, so vergrößert sich der geradlinige Teil desselben; der von A verschiedene Endpunkt des geradlinigen Teiles rückt in der Richtung des wachsenden s weiter. Der Punkt A beschreibt zunächst das Kurvenstück $P_0 P'$; ist der Punkt P' erreicht, so wird der Faden auf das Stück $Q' Q$ aufgewickelt, wobei der geradlinige Teil des Fadens sich verkleinert; ist A in P angelangt, so ist der von A verschiedene Endpunkt des geradlinigen Fadenteils in Q angekommen und hat im ganzen den Weg $s_1 = \varrho' - \varrho_0 + \varrho' - \varrho$ beschrieben.

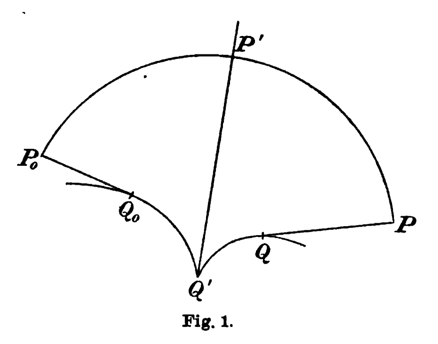


Fig. 1.

§ 8. Fortsetzung.

Die Aufgabe, die Krümmungsmittelpunktskurve in der Umgebung eines Punktes zu untersuchen, der einem außergewöhnlichen Punkt der Abbildung der Ausgangskurve auf die s-Gerade entspricht, soll wenigstens zum Teil gelöst werden. Wir haben hier die Entwicklungen von $g_1(s + \Delta s)$ und $g_2(s + \Delta s)$ nach Potenzen von $\Delta_1 s^{\frac{1}{\nu}}$ zugrunde zu legen, und die Größe ϱ als Null, oder als endlich und von Null verschieden zu betrachten, da sonst der fragliche Punkt der Krümmungsmittelpunktskurve ins Unendliche fiele.

1. $\varrho = 0$. Den Werten von $s - \Delta s$ bis $s + \Delta s$ mit Ausnahme des Wertes $s(\Delta s = 0)$ mögen nur gewöhnliche Punkte der Abbildung der Ausgangskurve auf die s-Gerade entsprechen. Wir erhalten dann:

$$\varrho(s + \Delta s) = \frac{1}{g_1'(s + \Delta s) g_2''(s + \Delta s) - g_2'(s + \Delta s) g_1''(s + \Delta s)},$$
$$x_1 + \Delta x_1 = g_1(s + \Delta s) - \varrho(s + \Delta s) g_2'(s + \Delta s),$$
$$y_1 + \Delta y_1 = g_2(s + \Delta s) + \varrho(s + \Delta s) g_1'(s + \Delta s).$$

Hier ist der Wert von ϱ an der Stelle $s + \Delta s$ mit $\varrho\,(s + \Delta s)$ bezeichnet. Zur Abkürzung werde:

$$\frac{\nu^2}{\lambda(\nu+\lambda)(g_{10}(s)g_{2\lambda}(s) - g_{20}(s)g_{1\lambda}(s))} = a$$

gesetzt. Dann ergibt sich:

$$\varrho(s + \Delta s) = \varepsilon^{\nu-1} a \Delta_1 s^{\frac{\nu-\lambda}{\nu}} + \cdots$$

Dabei ist $\nu > \lambda$, weil Lim $\varrho(s + \Delta s)$ für $\Delta s = 0$ als verschwindend angenommen wurde. Da $x_1 = g_1(s)$, $y_1 = g_2(s)$, so folgt:

$$\Delta x_1 = -a g_{20}(s) \Delta_1 s^{\frac{\nu-\lambda}{\nu}} + \cdots, \quad \Delta y_1 = a g_{10}(s) \Delta_1 s^{\frac{\nu-\lambda}{\nu}} + \cdots$$

Wenn unter $sgn\ a$ das Vorzeichen von a verstanden wird, ergibt sich für ein gerades $\nu - \lambda$:

$$\lim_{(\Delta s=0)} \frac{\Delta x_1}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2}} = -(sgn\ a) g_{20}(s), \quad \lim_{(\Delta s=0)} \frac{\Delta y_1}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2}} = (sgn\ a) g_{10}(s),$$

für ein ungerades $\nu - \lambda$:

$$\lim_{(\Delta s=0)} \frac{\Delta x_1}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2}} = -\varepsilon (sgn\ a) g_{20}(s), \quad \lim_{(\Delta s=0)} \frac{\Delta y_1}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2}} = \varepsilon (sgn\ a) g_{10}(s).$$

Im ersten Fall tritt nur eine Halbtangente, im letzten treten zwei Halbtangenten auf, wenn man sowohl mit einem positiven, wie mit einem negativen Δs zur Null übergeht. Die Krümmungsmittelpunktskurve besitzt demnach bei geradem $\nu - \lambda$ an der betrachteten Stelle eine Spitze.

Um zu entscheiden, ob die Krümmungsmittelpunktskurve an der betrachteten Stelle von ihrer Tangente geschnitten wird oder nicht, setzen wir die Gleichung ihrer Tangente in die Normalform:

$$(\xi - x_1) g_{10}(s) + (\eta - y_1) g_{20}(s) = 0.$$

Da:

$$\Delta x_1 = -\varepsilon^{\nu-1} \varrho(s + \Delta s) g_{20}(s) + \left(g_{10}(s) - \frac{\nu+\lambda}{\nu} a g_{2\lambda}(s)\right) \Delta_1 s + \cdots,$$

$$\Delta y_1 = \varepsilon^{\nu-1} \varrho(s + \Delta s) g_{10}(s) + \left(g_{20}(s) + \frac{\nu+\lambda}{\nu} a g_{1\lambda}(s)\right) \Delta_1 s + \cdots,$$

so wird:

$$\Delta x_1 g_{10}(s) + \Delta y_1 g_{20}(s) = \left(1 - \frac{\nu}{\lambda}\right) \Delta_1 s + \cdots$$

Nun ist $\Delta_1 s$ gleich $\varepsilon^{\nu-1} \Delta s$, also bei ungeradem ν mit Δs positiv oder negativ, bei geradem ν stets positiv, folglich wird die Krümmungsmittelpunktskurve hier bei ungeradem ν von ihrer Tangente geschnitten, bei geradem ν nicht. Es sind also im ganzen vier Fälle zu unterscheiden:

a) ν ungerade, λ ungerade. Die Ausgangskurve besitzt im betrachteten Punkt eine gewöhnliche Tangente, die Krümmungsmittelpunktskurve eine Hellebardenspitze. (Fig. 2.)
b) ν ungerade, λ gerade. Kurve sowie Krümmungsmittelpunktskurve besitzen im fraglichen Punkte je eine Wendetangente. (Fig. 3.)
c) ν gerade, λ ungerade. Die Ausgangskurve hat im fraglichen Punkte eine Hellebardenspitze, die Krümmungsmittelpunktskurve daselbst eine gewöhnliche Tangente. (Fig. 4.)
d) ν gerade, λ gerade. Kurve wie Krümmungsmittelpunktskurve besitzen im fraglichen Punkt je eine Schnabelspitze. (Fig. 5.)



Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5.

Ein Beispiel für den Fall a) bietet sich in denjenigen Parallelkurven einer Ellipse dar, welche durch die in einer Achse der Ellipse gelegenen Spitzen ihrer Krümmungsmittelpunktskurve hindurchgehen; ein Beispiel für den Fall c) finden wir in der Cykloide; für die Fälle b) und d) werden später Beispiele gegeben werden (§ 11).

2. $\varrho \gtrless 0$. Die Erledigung dieses Falles erfordert eine viel umständlichere Untersuchung wie die vorige. Wir beschränken uns daher auf den Beweis des folgenden Satzes: Nennt man die Krümmungsmittelpunktskurve der Krümmungsmittelpunktskurve einer Kurve die zweite Krümmungsmittelpunktskurve dieser Kurve, ferner die Krümmungsmittelpunktskurve der zweiten Krümmungsmittelpunktskurve die dritte Krümmungsmittelpunktskurve der Kurve usf., so können die einem außergewöhnlichen Punkt P der Abbildung der Ausgangskurve auf die s-Gerade mit endlichem, von Null verschiedenem, ϱ entsprechenden Punkte $P_1, P_2 \ldots$ der aufeinanderfolgenden Krümmungsmittelpunktskurven nicht sämtlich im Endlichen liegen, sondern es gehört zu dem fraglichen Wert von s eine ganze, positive Zahl $n > 1$ derart, daß $P_1 P_2 \ldots P_{n-1}$ im Endlichen liegen, während P_n ins Unendliche fällt.

Sind x_ν, y_ν die Koordinaten des Punktes P_ν, und setzt man:

$$\varphi_0(s) = \varrho, \quad \varphi_1(s) = \varrho \frac{d\varphi}{ds}, \quad \varphi_2(s) = \varrho \frac{d\varphi_1}{ds}, \quad \cdots \varphi_m(s) = \varrho \frac{d\varphi_{m-1}(s)}{ds},$$

so zeigt eine einfache Rechnung, daß:

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - \varphi_1(s) g_1'(s), & y_2 &= y_1 - \varphi_1(s) g_2'(s),\\
x_3 &= x_2 + \varphi_2(s) g_2'(s), & y_3 &= y_2 - \varphi_2(s) g_1'(s),\\
x_4 &= x_3 + \varphi_3(s) g_1'(s), & y_4 &= y_3 + \varphi_3(s) g_2'(s),\\
x_5 &= x_4 - \varphi_4(s) g_2'(s), & y_5 &= y_4 + \varphi_4(s) g_1'(s),\\
x_6 &= x_5 - \varphi_5(s) g_1'(s), & y_6 &= y_5 - \varphi_5(s) g_2'(s).
\end{aligned}$$

Daher sind die Gleichungen:

$$(1)\ x_{2\nu-1}=x_{2\nu-2}+(-1)^{\nu}\varphi_{2\nu-2}(s)g_2'(s),\quad y_{2\nu-1}=y_{2\nu-2}-(-1)^{\nu}\varphi_{2\nu-2}(s)g_1'(s),$$
$$(2)\ x_{2\nu}\ =x_{2\nu-1}+(-1)^{\nu}\varphi_{2\nu-1}(s)g_1'(s),\quad y_{2\nu}\ =y_{2\nu-1}+(-1)^{\nu}\varphi_{2\nu-1}(s)g_2'(s),$$

jedenfalls für $\nu=1, 2, 3$ richtig. Durch Differentiation der Gleichungen (1) nach s folgt:

$$x'_{2\nu-1}=x'_{2\nu-2}+(-1)^{\nu}\frac{\varphi_{2\nu-2}(s)}{\varrho}g_1'(s)+(-1)^{\nu}\varphi'_{2\nu-2}(s)g_2'(s),$$
$$y'_{2\nu-1}=y'_{2\nu-2}+(-1)^{\nu}\frac{\varphi_{2\nu-2}(s)}{\varrho}g_2'(s)-(-1)^{\nu}\varphi'_{2\nu-2}(s)g_1'(s).$$

Da nun die Zahlen x_m', y_m' für ein gerades m proportional sind den Zahlen g_1', g_2', für ein ungerades m aber den Zahlen $-g_2'$, g_1', so folgt:

$$x'_{2\nu-1}=(-1)^{\nu}\varphi'_{2\nu-2}(s)g_2'(s),\quad y'_{2\nu-1}=-(-1)^{\nu}\varphi'_{2\nu-2}(s)g_1'(s),$$

und damit:

$$x''_{2\nu-1}=(-1)^{\nu}\varphi''_{2\nu-2}(s)g_2'(s)+\frac{(-1)^{\nu}}{\varrho}\varphi'_{2\nu-2}(s)g_1'(s),$$
$$y''_{2\nu-1}=(-1)^{\nu+1}\varphi''_{2\nu-2}(s)\,g_1'(s)+(-1)^{\nu}\frac{\varphi'_{2\nu-2}(s)}{\varrho}g_2'(s),$$

sowie:

$$x'_{2\nu-1}y''_{2\nu-1}-x''_{2\nu-1}y'_{2\nu-1}=\frac{(\varphi'_{2\nu-2}(s))^2}{\varrho}.$$

Man hat:

$$x_{2\nu}=x_{2\nu-1}-\frac{(x'^2_{2\nu-1}+y'^2_{2\nu-1})\,y'_{2\nu-1}}{x'_{2\nu-1}y''_{2\nu-1}-x''_{2\nu-1}y'_{2\nu-1}},$$
$$y_{2\nu}=y_{2\nu-1}+\frac{(x'^2_{2\nu-1}+y'^2_{2\nu-1})\,x'_{2\nu-1}}{x'_{2\nu-1}y''_{2\nu-1}-x''_{2\nu-1}y'_{2\nu-1}},$$

daher:

$$x_{2\nu}=x_{2\nu-1}+(-1)^{\nu}\varrho\varphi'_{2\nu-2}(s)g_1'(s)=x_{2\nu-1}+(-1)^{\nu}\varphi_{2\nu-1}(s)g_1'(s),$$
$$y_{2\nu}=y_{2\nu-1}+(-1)^{\nu}\varrho\varphi'_{2\nu-2}(s)g_2'(s)=y_{2\nu-1}+(-1)^{\nu}\varphi_{2\nu-1}(s)g_2'(s),$$

und dies stimmt überein mit den Gleichungen (2).

Ebenso zeigt man, die Gleichungen (2) in entsprechender Weise behandelnd, die allgemeine Gültigkeit der Gleichungen (1).

Aus den Beziehungen (1) und (2) geht hervor, daß der absolute Wert des Krümmungshalbmessers der m^{ten} Krümmungsmittelpunktskurve mit dem absoluten Wert von $\varphi_m(s)$ übereinstimmt.

Nun ist, wenn wir $g_1'(s)$ als von Null verschieden voraussetzen:

$$\varrho=\frac{g_1'(s)}{g_2''(s)}$$

und:

$$\varphi_1(s) = -g_1'(s)^2 \frac{g_2'''(s)}{(g_2''(s))^3} - \frac{g_2'(s)}{g_2''(s)},$$

somit:

$$\varphi_m(s) = -\left(g_1'(s)\right)^{m+1} \frac{g_2^{(m+2)}(s)}{\left(g_2''(s)\right)^{m+2}} + \psi_m(s),$$

wo $\psi_m(s)$ im Bruch ist, dessen Zähler aus einer ganzen rationalen Funktion von $g_1'(s)$, $g_2'(s)$, … $g_2^{(m+1)}(s)$, dessen Nenner aus einer Potenz von $g_2''(s)$ besteht. Wenn jetzt:

$$g_2(s + \varDelta s) = g_2(s) + g_{20}\varDelta_1 s + g_{2\nu}\varDelta_1 s^2 + g_{2,2\nu}\varDelta_1 s^3 \ldots g_{2,(n-1)\nu}\varDelta_1 s^n$$
$$+ g_{2,(n-1)\nu+k}\,\varDelta_1 s^{\frac{n\nu+k}{\nu}} + \cdots,$$

wo n eine ganze positive Zahl, k eine ebensolche $< \nu$ ist, so wird die $(n+1)^{\text{te}}$ Ableitung von $g_2(s)$ an der betrachteten Stelle unendlich, also auch $\varphi_{n-1}(s)$, d. h. die $(n-1)^{\text{te}}$ Krümmungsmittelpunktskurve besitzt die Krümmung Null.

Hiermit findet der im § 2 S. 10 unerledigt gebliebene Fall, in welchem bei der Abbildung der gegebenen Kurve auf die t-Gerade ν ungerade, > 1 und gleich λ war, seine Erklärung. Nach Einführung der Bogenlänge s kann sich nämlich ein gewöhnlicher Punkt der Abbildung auf die s-Gerade mit endlichem ϱ ergeben, wo dann keine geometrische Besonderheit vorliegt, oder ein außergewöhnlicher mit der geometrischen Eigenschaft $\varphi_{n-1}(s) = \infty$.

§ 9. Die Evolventen einer Kurve.

Man nennt diejenigen Kurven, deren Krümmungsmittelpunktskurven (Evoluten) mit einer gegebenen Kurve zusammenfallen, die Evolventen der letzteren. Da jede Tangente der Evolute die sämtlichen Evolventen senkrecht trifft, so ist die Aufgabe der Bestimmung der Evolventen einer Kurve gleichbedeutend mit der Bestimmung der orthogonalen Trajektorien der Tangenten einer Kurve. Die Koordinaten der gegebenen Kurve seien als Funktionen der Bogenlänge der Kurve betrachtet und durch die Gleichungen

$$x = g_1(s), \quad y = g_2(s)$$

festgelegt. Eine beliebig gewählte Kurve ist darstellbar durch die Gleichungen:

$$\xi = g_1(s) + \varphi(s)g_1'(s), \quad \eta = g_2(s) + \varphi(s)g_2'(s),$$

in denen der absolute Wert von φ die Maßzahl der Entfernung der Punkte (x, y) und (ξ, η) angibt, während $\varphi \gtrless 0$ ist, je nachdem der Punkt (ξ, η) im positiven oder negativen Teil der im Punkte (x, y) berührenden Tangente liegt.

Damit die Tangenten der Kurve (x, y) die Kurve (ξ, η) senkrecht treffen, muß:

$$\frac{d\xi}{ds} g_1'(s) + \frac{d\eta}{ds} g_2'(s) = 0$$

sein. Dies liefert die Bestimmung:

$$\varphi(s) = \tau - s,$$

wo τ eine beliebig zu wählende Zahl bedeutet. **Den einfach unendlich vielen Werten von τ entsprechend ergeben sich einfach unendlich viele Evolventen; jede derselben entsteht aus jeder anderen, indem man auf der Normalen der letzteren nach derselben Seite hin ein und dieselbe Strecke abträgt,** da sich zwei verschiedene Funktionen $\varphi(s)$ nur durch eine Konstante unterscheiden.

Solange $\tau - s$ längs einer Evolvente positiv ist, wird sie von den positiven Halbtangenten der Evolute getroffen, für $\tau = s$ haben Evolvente und Evolute einen Punkt gemein, für $\tau < s$ wird die Evolvente von den negativen Halbtangenten der Evolute getroffen.

Wir beschränken zunächst die Veränderliche s auf einen solchen Bereich, in dem der Wert τ nicht vorkommt $(\tau - s \gtrless 0)$, und dem auf der Ausgangskurve ein Stück mit nur gewöhnlichen Punkten der Abbildung auf die s-Gerade bei stets endlichem ϱ entspricht.

Um unter dieser Voraussetzung den Krümmungsradius einer Evolvente zu bestimmen, bemerken wir, daß:

$$\frac{d\xi}{ds} = -\frac{\tau - s}{\varrho} g_2'(s), \quad \frac{d\eta}{ds} = \frac{\tau - s}{\varrho} g_1'(s),$$

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{\tau - s}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}\right) g_2'(s) - \frac{\tau - s}{\varrho^2} g_1'(s),$$

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} = -\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{\tau - s}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}\right) g_1'(s) - \frac{\tau - s}{\varrho^2} g_2'(s),$$

somit ist:

$$\sqrt{\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2} = \left|\frac{\tau - s}{\varrho}\right|,$$

$$\frac{d\xi}{ds}\frac{d^2\eta}{ds^2} - \frac{d\eta}{ds}\frac{d^2\xi}{ds^2} = \frac{(\tau - s)^2}{\varrho^3}.$$

Bezeichnen wir den Krümmungshalbmesser der durch τ bestimmten Evolvente mit ϱ_τ, so kommt:

$$\varrho_\tau = \left(sgn\frac{\tau - s}{\varrho}\right)(\tau - s).$$

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit dieser Vorzeichenbestimmung von ϱ_τ durch die Anschauung.

Es sei nämlich

1. $$\tau - s > 0, \quad \varrho > 0. \qquad \text{(Fig. 6.)}$$

Die Evolvente des Bogens OPB, in dem P dem Werte s entspreche, wird durch Abwicklung eines von O bis B auf die Kurve gelegten Fadens von der Länge τ erhalten. Dabei kann O als der Nullpunkt der Bogenlänge betrachtet werden, die in der Richtung nach B hin wachsen möge. Dem wachsenden s entspricht auf der Evolvente die Richtung von Q nach B hin. Es liegt also P in der positiven Halbnormalen des Punktes Q; ϱ_τ ist gleich $\tau - s$.

Es sei

2. $$\tau - s > 0, \quad \varrho < 0. \qquad \text{(Fig. 7.)}$$

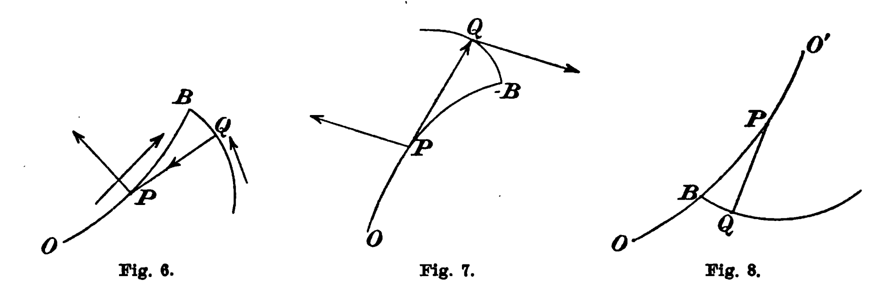


Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8.

Hier entspricht bei Anwendung derselben Bezeichnungen wie vorhin dem wachsenden s die Richtung von Q nach B auf der Evolvente, somit liegt P in der negativen Halbnormalen des Punktes Q, und es ist $\varrho_\tau = -(\tau - s)$.

Es sei

3. $$\tau - s < 0, \quad \varrho > 0. \qquad \text{(Fig. 8. } OB = \tau)$$

Bei $\tau - s < 0$ wird das dem Bogenstück BPO' entsprechende Stück der Evolvente durch Abwicklung eines von O' über P nach B auf die Kurve gelegten Fadens erhalten. Dem wachsenden s entspricht auf der Evolvente die Richtung von B nach Q hin, es liegt somit P in der positiven Halbnormalen des Punktes Q, und wir haben $\varrho_\tau = -(\tau - s)$.

Es sei

4. $$\tau - s < 0, \quad \varrho < 0. \qquad \text{(Fig. 9.)}$$

Hier entspricht dem wachsenden s die Richtung von B nach Q auf der Evolvente, aber P liegt in der negativen Halbnormalen des Punktes Q, so daß $\varrho_\tau = \tau - s$.

Jeder Krümmungskreis einer Evolvente ist zugleich ein Krümmungskreis einer anderen Evolvente. Um dies zu zeigen, betrachten wir ein Kurvenstück $OP_1P_0P_2$, in dem der Bogen $P_1P_0 = \sigma$ gleich dem Bogen P_0P_2 ist. (Fig. 10.)

Legen wir auf das Bogenstück $P_1 P_0 P_2$ einen Faden und wickeln ihn so ab, daß sein in P_1 liegender Endpunkt fest bleibt, so erhalten wir die Evolvente mit den Gleichungen:

$$\xi' = g_1(s) + (s_0 + \sigma - s)g_1'(s), \quad \eta' = g_2(s) + (s_0 + \sigma - s)g_2'(s).$$

Wickeln wir aber den Faden so ab, daß sein in P_2 liegender Endpunkt fest bleibt, so erhalten wir eine Evolvente mit den Gleichungen:

$$\xi'' = g_1(s) - (s - s_0 + \sigma)g_1'(s), \quad \eta'' = g_2(s) - (s - s_0 + \sigma)g_2'(s).$$

Für die Evolvente (ξ', η') ist $\tau = s_0 + \sigma$, für die Evolvente (ξ'', η'') ist $\tau = \tau' = s_0 - \sigma$. Für $s = s_0$ ergibt sich $\varrho_\tau = \varrho_{\tau'}$, d. h. die beiden zu den Werten τ und τ' gehörenden Evolventen besitzen in den zu $s = s_0$ gehörenden beiden Punkten ein und denselben Krümmungskreis.

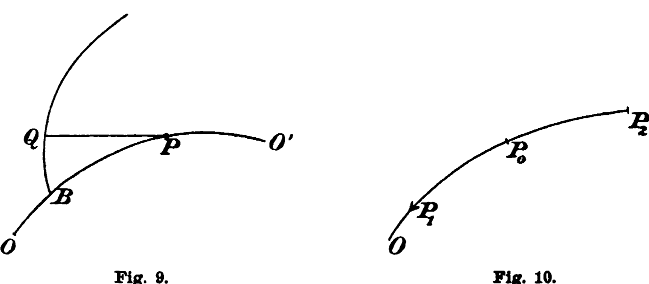


Fig. 9. Fig. 10.

Um allgemein die Umgebung eines Punktes einer Evolvente zu untersuchen, der einem gewöhnlichen Punkt $P_0(s_0)$ der Abbildung der Ausgangskurve auf die s-Gerade entspricht, setzen wir $s = s_0 + \Delta s_0$,

$$\xi = \xi_0 + \Delta\xi_0, \quad \eta = \eta_0 + \Delta\eta_0$$

und erhalten:

$$\xi_0 + \Delta\xi_0 = g_1(s_0) + g_1'(s_0)\Delta s_0 + \frac{1}{k!}\, g_1^{(k)}(s_0)\Delta s_0^k + \cdots$$
$$+ (\tau - s_0 - \Delta s_0)\left(g_1'(s_0) + \frac{1}{(k-1)!}\, g_1^{(k)}(s_0)\Delta s_0^{k-1} + \cdots\right),$$

so daß:

$$\Delta\xi_0 = \frac{\tau - s_0}{(k-1)!}\, g_1^{(k)}(s_0)\Delta s_0^{k-1} + \frac{1}{k!}\left\{(\tau - s_0)g_1^{(k+1)}(s_0) + (1-k)g_1^{(k)}(s_0)\right\}\Delta s_0^k + \cdots$$

und:

$$\Delta\eta_0 = \frac{\tau - s_0}{(k-1)!}\, g_2^{(k)}(s_0)\Delta s_0^{k-1} + \frac{1}{k!}\left\{(\tau - s_0)g_2^{(k+1)}(s_0) + (1-k)g_2^{(k)}(s_0)\right\}\Delta s_0^k + \cdots$$

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $\tau - s_0 = 0$. Die Ausgangskurve und die Evolvente haben den Punkt P_0 gemein.

Man hat dann:

$$\left\{\frac{d^{(k)}\xi}{ds^k}\frac{d^{(k+m)}(\eta)}{ds^{k+m}} - \frac{d^{(k)}\eta}{ds^k}\frac{d^{(k+m)}\xi}{ds^{k+m}}\right\}_{s=s_0}$$

$$= (1-k)(1-k-m)\left(g_1^{(k)}(s_0)g_2^{(k+m)}(s_0) - g_2^{(k)}(s_0)g_1^{(k+m)}(s_0)\right).$$

Die im § 5 S. 21 gefundenen Bedingungen:

$$g_1'(s_0)g_1^{(n)}(s_0) + g_2'(s_0)g_2^{(n)}(s_0) = 0, \quad (n = k,\ k+1, \ldots 2k-2)$$

zeigen, daß die Determinante:

$$g_1^{(k)}(s_0)g_2^{(k+m)}(s_0) - g_2^{(k)}(s_0)g_1^{(k+m)}(s_0)$$

verschwindet, wenn m eine Zahl aus der Reihe $0, 1, \ldots k-2$ bedeutet. Wäre auch:

$$g_1^{(k)}(s_0)g_2^{(2k-1)}(s_0) - g_2^{(k)}(s_0)g_1^{(2k-1)}(s_0) = 0,$$

so hätten wir, unter p einen Proportionalitätsfaktor verstehend:

$$g_1^{(2k-1)}(s_0) = pg_1^{(k)}(s_0), \quad g_2^{(2k-1)}(s_0) = pg_2^{(k)}(s_0),$$

und die a. a. O. gefundene Bedingung:

$$\frac{2}{(2k-2)!}\left(g_1'(s_0)g_1^{(2k-1)}(s_0) + g_2'(s_0)g_2^{(2k-1)}(s_0)\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{(k-1)!}\right)^2\left(g_1^{(k)}(s_0)^2 + g_2^{(k)}(s_0)^2\right) = 0$$

nähme die Form an:

$$\frac{2p}{(2k-2)!}\left(g_1'(s_0)g_1^{(k)}(s_0)+g_2'(s_0)g_2^{(k)}(s_0)\right)+\left(\frac{1}{(k-1)!}\right)^2\left(g_1^{(k)}(s_0)^2+g_2^{(k)}(s_0)^2\right)=0,$$

oder:

$$g_1^{(k)}(s_0)^2 + g_2^{(k)}(s_0)^2 = 0,$$

was der Voraussetzung in betreff der Zahl k zuwiderläuft.

Der kleinste Wert von m, für den die Determinante:

$$\frac{d^{(k)}\xi}{ds^k}\frac{d^{(k+m)}\eta}{ds^{k+m}} - \frac{d^{(k)}\eta}{ds^k}\frac{d^{(k+m)}\xi}{ds^{k+m}}$$

an der Stelle $s = s_0$ nicht verschwindet, ist daher $k-1$.

Wenn die im § 1 eingeführten kennzeichnenden Zahlen ν und λ bei der Evolvente mit ν' und λ' bezeichnet werden, ergibt sich $\nu' = k$, $\lambda' = k-1$. Bei geradem k besitzt demnach die Evolvente an der betrachteten Stelle eine Hellebardenspitze mit dem Krümmungshalbmesser Null, bei ungeradem k besitzt die Ausgangskurve an der betrachteten Stelle eine Wendetangente mit den Krümmungshalbmessern $+\infty$ und $-\infty$, die Evolvente aber eine Wendetangente mit dem Krümmungshalbmesser Null.

2. $\tau - s_0 \gtrless 0$. Man hat hier:

$$\left(\frac{\overset{(k-1)}{d\xi}}{ds^{k-1}}\,\frac{\overset{(k+m)}{d}\,\eta}{ds^{k+m}} - \frac{\overset{(k-1)}{d}\,\eta}{ds^{k-1}}\,\frac{\overset{(k+m)}{d}\,\xi}{ds^{k+m}}\right)_{s=s_0}$$

$$= (\tau - s_0)\Big\{\overset{(k)}{g_1}(s_0)\Big((\tau - s_0)\overset{(k+m+1)}{g_2}(s_0) + (1-k-m)\overset{(k+m)}{g_2}(s_0)\Big)$$

$$- \overset{(k)}{g_2}(s_0)\Big((\tau - s_0)\overset{(k+m+1)}{g_1}(s_0) + (1-k-m)\overset{(k+m)}{g_1}(s_0)\Big)\Big\}.$$

Auf demselben Wege, wie vorhin, zeigt sich, daß der kleinste Wert von m, für den die hier auftretende Determinante nicht verschwindet, gleich $k-2$ ist. Für die Zahlen ν' und λ' erhalten wir demnach denselben Wert $k-1$. Bei geradem k besitzt demnach die Evolvente an der betrachteten Stelle eine gewöhnliche Tangente, bei ungeradem k eine Schnabelspitze.

Für den Krümmungshalbmesser ϱ_τ der Evolvente erhalten wir nach § 2 S. 10 den Ausdruck:

$$\frac{(2k-3)!\left\{\sqrt{\left(\dfrac{\overset{(k-1)}{d}\,\xi}{ds^{k-1}}\right)^2 + \left(\dfrac{\overset{(k-1)}{d}\,\eta}{ds^{k-1}}\right)^2}\right\}^3_{(s=s_0)}}{(k-1)!\,(k-2)!\left\{\dfrac{\overset{(k-1)}{d}\,\xi}{ds^{k-1}}\,\dfrac{\overset{(2k-2)}{d}\,\eta}{ds^{2k-2}} - \dfrac{\overset{(k-1)}{d}\,\eta}{ds^{k-1}}\,\dfrac{\overset{(2k-2)}{d}\,\xi}{ds^{k-2}}\right\}_{(s=s_0)}},$$

oder:

$$\frac{(2k-3)!\left\{\sqrt{\overset{(k)}{g_1}(s_0)^2 + \overset{(k)}{g_2}(s_0)^2}\right\}^3\cdot|\tau - s_0|}{(k-1)!\,(k-2)!\left(\overset{(k)}{g_1}(s_0)\,\overset{(2k-1)}{g_2}(s_0) - \overset{(k)}{g_2}(s_0)\,\overset{(2k-1)}{g_1}(s_0)\right)}.$$

Aus der Gleichung:

$$g_1'(s_0)\overset{(k)}{g_1}(s_0) + g_2'(s_0)\overset{(k)}{g_2}(s_0) = 0$$

folgt entweder:

$$g_1'(s_0) = \frac{\overset{(k)}{g_2}(s_0)}{\sqrt{\overset{(k)}{g_1}(s_0)^2 + \overset{(k)}{g_2}(s_0)^2}},\quad g_2'(s_0) = \frac{-\overset{(k)}{g_1}(s_0)}{\sqrt{\overset{(k)}{g_1}(s_0)^2 + \overset{(k)}{g_2}(s_0)^2}},$$

oder:

$$g_1'(s_0) = \frac{-\overset{(k)}{g_2}(s_0)}{\sqrt{\overset{(k)}{g_1}(s_0)^2 + \overset{(k)}{g_2}(s_0)^2}},\quad g_2'(s_0) = \frac{\overset{(k)}{g_1}(s_0)}{\sqrt{\overset{(k)}{g_1}(s_0)^2 + \overset{(k)}{g_2}(s_0)^2}},$$

wo, wie beständig in unserer Darstellung, das Wurzelzeichen eine positive Zahl anzeigt. Wenn wir mit δ das Vorzeichen des Ausdrucks:

$$g_1'(s_0)\overset{(k)}{g_2}(s_0) - g_2'(s_0)\overset{(k)}{g_1}(s_0)$$

bezeichnen, haben wir stets:

$$g_1'(s_0) = \frac{\delta\overset{(k)}{g_2}(s_0)}{\sqrt{\overset{(k)}{g_1}(s_0)^2 + \overset{(k)}{g_2}(s_0)^2}},\quad g_2'(s_0) = \frac{-\delta\overset{(k)}{g_1}(s_0)}{\sqrt{\overset{(k)}{g_1}(s_0)^2 + \overset{(k)}{g_2}(s_0)^2}}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Bedingung:

$$\frac{2}{(2k-2)!}\left(g_1'(s_0)\overset{(2k-1)}{g_1}(s_0) + g_2'(s_0)\overset{(2k-1)}{g_2}(s_0)\right) + \left(\frac{1}{(k-1)!}\right)^2\left(\overset{(k)}{g_1}(s_0)^2 + \overset{(k)}{g_2}(s_0)^2\right) = 0$$

ein, so folgt:

$$\overset{(k)}{g_1}(s_0)\overset{(2k-1)}{g_2}(s_0) - \overset{(k)}{g_2}(s_0)\overset{(2k-1)}{g_1}(s_0) = \frac{\delta(2k-2)!}{2(k-1)!(k-1)!}\left\{\sqrt{\overset{(k)}{g_1}(s_0)^2 + \overset{(k)}{g_2}(s_0)^2}\right\}^3,$$

womit sich ergibt:

$$\varrho_\tau = \delta\left(sgn(\tau - s_0)\right)(\tau - s_0).$$

Diese Bestimmung steht im Einklang mit der oben für ϱ_τ gefundenen, da δ im Falle $k = 2$ mit dem Vorzeichen von ϱ übereinstimmt.

Um die Evolventen in der Umgebung solcher Punkte zu untersuchen, die außergewöhnlichen Punkten der Abbildung der gegebenen Kurve auf die s-Gerade entsprechen, müssen wir zuvor auf eine Unstetigkeit hinweisen, die aus der ausschließlichen Anwendung der Gleichungen:

$$\xi = g_1(s) + (\tau - s)g_1'(s), \quad \eta = g_2(s) + (\tau - s)g_2'(s)$$

für den Fall sich ergeben würde, daß die gegebene Kurve eine oder mehrere Spitzen besitzt. Es bedeutet nämlich $g_1'(s)$ den Kosinus, $g_2'(s)$ den Sinus des Winkels α, den die einem wachsenden s entsprechende Halbtangente mit der positiven x-Achse bildet. Von diesem Winkel wiesen wir nach, daß er an einer Spitze einen Sprung von der Größe π macht. Ist daher an einer Spitze die Zahl $\tau - s$ von Null verschieden, so werden auch ξ und η an der Stelle s unstetig.

Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, bemerken wir, daß in unseren Ausgangsgleichungen:

$$\xi = g_1(s) + \varphi(s)g_1'(s), \quad \eta = g_2(s) + \varphi(s)g_2'(s)$$

die Kurve (ξ, η) als eine Trajektorie der positiven Halbtangenten der gegebenen Kurve erscheint. Eine Trajektorie der negativen Halbtangenten wird durch die Gleichungen:

$$\xi' = g_1(s) - \psi(s)g_1'(s), \quad \eta' = g_2(s) - \psi(s)g_2'(s)$$

dargestellt. Damit sie die Tangenten der gegebenen Kurve senkrecht schneide, muß $\psi'(s) = 1$ sein, und das ergibt:

$$\psi(s) = s + \tau'.$$

Es entsteht nun die Frage, unter welchen Umständen eine Trajektorie der positiven Halbtangenten die stetige Fortsetzung einer Trajektorie der negativen Halbtangenten darstellt. Zur Beantwortung dieser Frage fassen wir einen Wert s_0 ins Auge und setzen $s = s_0 + \Delta s_0$. Benutzen wir für ein negatives Δs_0 die erste Darstellung, so kommt:

$$\xi_0 + \Delta\xi_0 = g_1(s_0 + \Delta s_0) + (\tau - s_0 - \Delta s_0)\,g_1'(s_0 + \Delta s_0),$$
$$\eta_0 + \Delta\eta_0 = g_2(s_0 + \Delta s_0) + (\tau - s_0 - \Delta s_0)\,g_2'(s_0 + \Delta s_0).$$

Für ein positives Δs_0 liefert die zweite Darstellungsart:

$$\xi_0' + \Delta\xi_0' = g_1(s_0 + \Delta s_0) - (s_0 + \Delta s_0 + \tau')\, g_1'(s_0 + \Delta s_0),$$
$$\eta_0' + \Delta\eta_0' = g_2(s_0 + \Delta s_0) - (s_0 + \Delta s_0 + \tau')\, g_2'(s_0 + \Delta s_0).$$

Wenn dem Werte s_0 auf der gegebenen Kurve keine Spitze entspricht, also ν ungerade ist, haben wir sowohl für ein positives wie für ein negatives Δs_0 die Grenzgleichungen:

$$\lim_{(\Delta s_0 = 0)} g_1'(s_0 + \Delta s_0) = \cos\alpha, \quad \lim_{(\Delta s_0 = 0)} g_2'(s_0 + \Delta s_0) = \sin\alpha.$$

Damit Stetigkeit im Punkte $s = s_0$ stattfinde, muß $\xi_0 = \xi_0'$, $\eta_0 = \eta_0'$ sein, d. h. $\tau' = -\tau$, und die erste Darstellungsart ist von der zweiten nicht verschieden.

Wenn aber dem Wert s_0 auf der Ausgangskurve eine Spitze entspricht, also ν gerade ist, haben wir bei negativem Δs_0:

$$\lim_{(\Delta s_0 = 0)} g_1'(s_0 + \Delta s_0) = -\cos\alpha, \quad \lim_{(\Delta s_0 = 0)} g_2'(s_0 + \Delta s_0) = -\sin\alpha,$$

bei positivem Δs_0:

$$\lim_{(\Delta s_0 = 0)} g_1'(s_0 + \Delta s_0) = \cos\alpha, \quad \lim_{(\Delta s_0 = 0)} g_2'(s_0 + \Delta s_0) = \sin\alpha.$$

Damit $\xi_0 = \xi_0'$, $\eta_0 = \eta_0'$ werde, ist $\tau' = \tau - 2s_0$ zu nehmen. Alsdann ergibt sich für ein negatives Δs_0:

$$\xi_0 + \Delta\xi_0 = g_1(s_0 + \Delta s_0) + (\tau - s_0 - \Delta s_0)\, g_1'(s_0 + \Delta s_0),$$

für ein positives Δs_0:

$$\xi_0 + \Delta\xi_0 = g_1(s_0 + \Delta s_0) - (\tau - s_0 + \Delta s_0)\, g_1'(s_0 + \Delta s_0).$$

Wir können unter Anwendung der Bezeichnung $\Delta_1 s_0 = \varepsilon^{\nu-1}\Delta s_0$ beide Fälle durch das eine System:

$$\xi_0 + \Delta\xi_0 = g_1(s_0 + \Delta s_0) - (\tau - s_0 + \Delta_1 s_0)\, \varepsilon^{\nu-1} g_1'(s_0 + \Delta s_0),$$
$$\eta_0 + \Delta\eta_0 = g_2(s_0 + \Delta s_0) - (\tau - s_0 + \Delta_1 s_0)\, \varepsilon^{\nu-1} g_2'(s_0 + \Delta s_0)$$

darstellen.

Um eine Evolvente in der Umgebung eines Punktes, der einem außergewöhnlichen Punkt der Abbildung der Ausgangskurve auf die s-Gerade entspricht, zu untersuchen, ist nach dem Vorigen der Fall eines ungeraden ν von dem eines geraden ν zu unterscheiden. Wir schreiben fortan s statt s_0, ξ statt ξ_0, η statt η_0 und erhalten für ein ungerades ν, wo $\varepsilon^{\nu-1}$ gleich $+1$ ist:

$$\xi + \Delta\xi = g_1(s) + g_{10}(s)\Delta s + g_{1\lambda}(s)\Delta s^{\frac{\nu+\lambda}{\nu}} + \cdots$$
$$+ (\tau - s - \Delta s)\Big(g_{10}(s) + \frac{\nu+\lambda}{\nu} g_{1\lambda}(s)\Delta s^{\frac{\lambda}{\nu}} + \cdots\Big),$$

so daß:

$$\Delta\xi = \frac{\nu+\lambda}{\nu}(\tau-s)\,g_{1\lambda}(s)\Delta s^{\frac{\lambda}{\nu}} + \cdots + \frac{2\nu+\lambda-1}{\nu}(\tau-s)\,g_{1,\nu+\lambda-1}(s)\Delta s^{\frac{\nu+\lambda-1}{\nu}}$$
$$+\left(-\frac{\lambda}{\nu}g_{1\lambda}(s)+\frac{2\nu+\lambda}{\nu}(\tau-s)\,g_{1,\nu+\lambda}(s)\right)\Delta_1 s^{\frac{\nu+\lambda}{\nu}}+\cdots,$$

woraus sich die Entwicklung von $\Delta\eta$ unmittelbar ergibt.

Setzen wir $\Delta s^{\frac{1}{\nu}} = h$, so ist hiermit die Umgebung des Punktes (ξ, η) der Evolvente auf die h-Gerade abgebildet.

Wenn $\tau - s = 0$, erhalten wir:

$$\left(\frac{d^{(\nu+\lambda+m)}\xi}{dh^{\nu+\lambda+m}}\right)_{h=0} = -\frac{(\nu+\lambda+m)!\,(\lambda+m)}{\nu}\,g_{1,\lambda+m}(s),$$

somit:

$$\left\{\frac{d^{\nu+\lambda}\xi}{dh^{\nu+\lambda}}\,\frac{d^{\nu+\lambda+m}\eta}{dh^{\nu+\lambda+m}} - \frac{d^{\nu+\lambda}\eta}{dh^{\nu+\lambda}}\,\frac{d^{\nu+\lambda+m}\xi}{dh^{\nu+\lambda+m}}\right\}_{h=0}$$
$$= \frac{(\nu+\lambda)!\,(\nu+\lambda+m)!\,\lambda(\lambda+m)}{\nu^2}\left(g_{1\lambda}(s)\,g_{2,\lambda+m}(s) - g_{2\lambda}(s)\,g_{1,\lambda+m}(s)\right).$$

Aus den im § 5 S. 21 gefundenen Bedingungen:

$$g_{10}(s)\,g_{1n}(s) + g_{20}(s)\,g_{2n}(s) = 0, \quad (n=\lambda,\ \lambda+1, \ldots 2\lambda-1)$$

folgt, daß die Determinante:

$$g_{1\lambda}(s)\,g_{2,\lambda+m}(s) - g_{2\lambda}(s)\,g_{1,\lambda+m}(s)$$

verschwindet, solange $m \leqq \lambda - 1$. Aber die Determinante:

$$g_{1\lambda}(s)\,g_{2,2\lambda}(s) - g_{2\lambda}(s)\,g_{1,2\lambda}(s)$$

ist von Null verschieden. Aus der Bedingung:

$$g_{10}(s)\,g_{1\lambda}(s) + g_{20}(s)\,g_{2\lambda}(s) = 0$$

folgt nämlich, wenn p einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet:

$$g_{10}(s) = p g_{2\lambda}(s), \quad g_{20}(s) = -p g_{1\lambda}(s).$$

Setzen wir dies in die § 5 S. 21 gefundene Bedingung:

$$2\nu(\nu+2\lambda)\left(g_{10}(s)g_{1,2\lambda}(s) + g_{20}(s)\,g_{2,2\lambda}(s)\right) + (\nu+\lambda)^2\left(g_{1\lambda}(s)^2 + g_{2\lambda}(s)^2\right) = 0$$

ein, so entsteht:

$$2\nu p(\nu+2\lambda)\left(g_{1\lambda}(s)g_{2,2\lambda}(s) - g_{2\lambda}(s)g_{1,2\lambda}(s)\right) - (\nu+\lambda)^2\left(g_{1\lambda}(s)^2 + g_{2\lambda}(s)^2\right) = 0.$$

Wir haben aber angenommen, daß die Zahlen $g_{1\lambda}(s)$ und $g_{2\lambda}(s)$ nicht zugleich verschwinden, es kann daher die letzte Gleichung nur bestehen, wenn die fragliche Determinante von Null verschieden ist. Für die bei der Abbildung der Evolvente auf die h-Gerade an der betrachteten Stelle auftretenden kennzeichnenden Zahlen ν' und λ' ergibt sich demnach $\nu' = \nu + \lambda$, $\lambda' = \lambda$.

Ist λ ungerade, so besitzt die Ausgangskurve an der betrachteten Stelle eine gewöhnliche Tangente, die Evolvente eine Hellebarden-

spitze mit dem Krümmungshalbmesser Null. Ist λ gerade, so besitzt die Ausgangskurve an der betrachteten Stelle eine Wendetangente, die Evolvente eine solche mit dem Krümmungshalbmesser Null.

Wenn $\tau - s \gtrless 0$, erhalten wir, solange $m \leqq \nu - 1$:

$$\left(\frac{d^{\lambda+m}\xi}{dh^{\lambda+m}}\right)_{h=0} = \frac{(\lambda+m)!\,(\nu+\lambda+m)}{\nu}(\tau-s)g_{1,\lambda+m}(s),$$

aber für $m \geqq \nu$:

$$\left(\frac{d^{\lambda+m}\xi}{dh^{\lambda+m}}\right)_{h=0} = \frac{(\lambda+m)!}{\nu}\{-(\lambda+m-\nu)g_{1,\lambda+m-\nu}(s)+(\lambda+m+\nu)(\tau-s)g_{1,\lambda+m}(s)\}.$$

Die Determinante:

$$A = \left\{\frac{d^\lambda\xi}{dh^\lambda}\frac{d^{\lambda+m}\eta}{dh^{\lambda+m}} - \frac{d^\lambda\eta}{dh^\lambda}\frac{d^{\lambda+m}\xi}{dh^{\lambda+m}}\right\}_{h=0}$$

nimmt für $m \leqq \nu - 1$ die Form an:

$$\frac{\lambda!\,(\lambda+m)!\,(\nu+\lambda)(\nu+\lambda+m)}{\nu^2}(\tau-s)^2\Big(g_{1,\lambda}(s)g_{2,\lambda+m}(s) - g_{2,\lambda}(s)g_{1,\lambda+m}(s)\Big),$$

und für $m \geqq \nu$ die Form:

$$\frac{\lambda!\,(\lambda+m)!\,(\nu+\lambda)}{\nu^2}(\tau-s)$$
$$\Big\{-(\lambda+m-\nu)\Big(g_{1,\lambda}(s)g_{2,\lambda+m-\nu}(s) - g_{2,\lambda}(s)g_{1,\lambda+m-\nu}(s)\Big)$$
$$+(\nu+\lambda+m)(\tau-s)\Big(g_{1,\lambda}(s)g_{2,\lambda+m}(s) - g_{2,\lambda}(s)g_{1,\lambda+m}(s)\Big)\Big\}.$$

Ist nun $\lambda \leqq \nu - 1$, so zeigt die erste Form, ist $\lambda \geqq \nu$, so zeigt die zweite Form, daß λ der kleinste Wert von m ist, für den die Determinante A nicht verschwindet.

Die kennzeichnenden Zahlen ν' und λ' werden hier beide gleich λ. Bei ungeradem λ haben Ausgangskurve und Evolvente in den dem Wert s entsprechenden Punkten eine gewöhnliche Tangente; bei geradem λ besitzt die Ausgangskurve im betrachteten Punkt eine Wendetangente, die Evolvente im entsprechenden Punkt eine Schnabelspitze.

Für den Krümmungshalbmesser ϱ_τ der Evolvente erhalten wir nach § 2 S. 10 die Gleichung:

$$\varrho_\tau = \frac{(\nu+\lambda)^2\left(\sqrt{g_{1\lambda}(s)^2+g_{2\lambda}(s)^2}\right)^3}{2\nu(\nu+2\lambda)\Big(g_{1\lambda}(s)g_{2,2\lambda}(s) - g_{2\lambda}(s)g_{1,2\lambda}(s)\Big)}\,|\tau-s|.$$

Aus den Beziehungen (§ 5 S. 21):

$$g_{10}(s)g_{1\lambda}(s) + g_{20}(s)g_{2\lambda}(s) = 0, \quad g_{10}(s)^2 + g_{20}(s)^2 = 1$$

folgt:

$$g_{10}(s) = \frac{\delta g_{2\lambda}(s)}{\sqrt{g_{1\lambda}(s)^2 + g_{2\lambda}(s)^2}}, \quad g_{20}(s) = \frac{-\delta g_{1\lambda}(s)}{\sqrt{g_{1\lambda}(s)^2 + g_{2\lambda}(s)^2}},$$

wo δ das Vorzeichen des Ausdrucks $g_{10}(s)g_{2\lambda}(s) - g_{20}(s)g_{1\lambda}(s)$ bedeutet. Setzen wir dies in die a. a. O. gefundene Bedingung:

$$2\nu(\nu + 2\lambda)\big(g_{10}(s)g_{1,2\lambda}(s) + g_{20}(s)g_{2,2\lambda}(s)\big) \\ + (\nu + \lambda)^2\big(g_{1\lambda}(s)^2 + g_{2\lambda}(s)^2\big) = 0$$

ein, so erhalten wir:

$$2\nu(\nu + 2\lambda)\delta\big(g_{1\lambda}(s)g_{2,2\lambda}(s) - g_{2\lambda}(s)g_{1,2\lambda}(s)\big) \\ - (\nu + \lambda)^2\big(\sqrt{g_{1\lambda}(s)^2 + g_{2\lambda}(s)^2}\big)^3 = 0,$$

infolgedessen ergibt sich:

$$\varrho_\tau = \delta\big(sgn(\tau - s)\big)(\tau - s).$$

Wenn $\lambda = \nu$, so ist nach § 6 S. 23 δ gleich dem Vorzeichen von ϱ.

Der Fall, daß ν eine gerade Zahl ist, die Ausgangskurve also an der betrachteten Stelle eine Spitze besitzt, läßt sich genau so, wie der vorige Fall behandeln. An die Stelle von $\tau - s$ tritt $-(\tau - s)$, an die Stelle von Δs tritt $\Delta_1 s$. Ist hier $\tau - s$ gleich Null, so ergibt sich $\nu' = \nu + \lambda$, $\lambda' = \lambda$, d. h. es entspricht hier bei ungeradem λ einer Hellebardenspitze der Ausgangskurve eine gewöhnliche Tangente der Evolvente, bei geradem λ einer Schnabelspitze der Ausgangskurve eine Schnabelspitze der Evolvente. Ist $\tau - s$ von Null verschieden, so erhält man $\nu' = \lambda' = \lambda$. Hier finden dieselben Arten des Entsprechens statt, wie bei $\tau - s = 0$. Der Krümmungshalbmesser der Evolvente wird absolut genommen gleich dem Abstand der sich entsprechenden Punkte (x, y) und (ξ, η).

§ 10. Die einer Kurve parallelen Kurven.

Zwei Kurven heißen einander parallel, wenn jede Normale der einen auch eine Normale der anderen ist. Die zu einer gegebenen Kurve parallelen Kurven lassen sich daher als die senkrechten Durchdringungskurven der Normalen der gegebenen Kurve auffassen. Die Gleichungen einer beliebigen Durchdringungskurve dieser Normalen sind:

$$x = g_1(s) - \varphi(s)g_2'(s), \quad y = g_2(s) + \varphi(s)g_1'(s).$$

Beschränken wir die Werte von s auf einen Bereich, dem nur gewöhnliche Punkte der Abbildung der gegebenen Kurve auf die s-Gerade entsprechen, so liegt die Durchdringungskurve senkrecht zu den Normalen, wenn:

$$\frac{dx}{ds} g_2'(s) - \frac{dy}{ds} g_1'(s) = 0$$

ist. Dies ergibt $\varphi'(s) = 0$, so daß die Gleichungen:

$$\xi = g_1(s) - \tau g_2'(s), \quad \eta = g_2(s) + \tau g_1'(s)$$

für ein konstantes τ eine Parallelkurve der gegebenen Kurve darstellen.

Wir untersuchen zunächst die Umgebung eines solchen Punktes einer Parallelkurve, der einem gewöhnlichen Punkt der Abbildung der Ausgangskurve auf die s-Gerade entspricht. Die Umgebung des dem Werte s entsprechenden Punktes einer Parallelkurve wird durch die Gleichungen:

$$\xi + \Delta\xi = g_1(s + \Delta s) - \tau g_2'(s + \Delta s),$$
$$\eta + \Delta\eta = g_2(s + \Delta s) + \tau g_1'(s + \Delta s)$$

dargestellt. Wir erhalten daher im betrachteten Fall:

$$\Delta\xi = g_1'(s)\Delta s - \frac{\tau}{(k-1)!} g_2^{(k)}(s)\Delta s^{k-1} + \frac{1}{k!}\left(g_1^{(k)}(s) - \tau g_2^{(k+1)}(s)\right)\Delta s^k + \cdots,$$

$$\Delta\eta = g_2'(s)\Delta s + \frac{\tau}{(k-1)!} g_1^{(k)}(s)\Delta s^{k-1} + \frac{1}{k!}\left(g_2^{(k)}(s) + \tau g_1^{(k+1)}(s)\right)\Delta s^k + \cdots$$

Wenn $k > 2$, besitzen die kennzeichnenden Zahlen ν' und λ' die Werte Eins und $k-1$, denn man hat:

$$g_1'(s)g_1^{(k)}(s) + g_2'(s)g_2^{(k)}(s) = 0, \quad g_1'(s)g_1^{(k+1)}(s) + g_2'(s)g_2^{(k+1)}(s) = 0,$$

$$g_1'(s)\left(g_2^{(k)}(s) + \tau g_1^{(k+1)}(s)\right) - g_2'(s)\left(g_1^{(k)}(s) - \tau g_2^{(k+1)}(s)\right)$$
$$= g_1(s)g_2^{(k)}(s) - g_2(s)g_1^{(k)}(s) \gtrless 0.$$

Einer Wendetangente der gegebenen Kurve entspricht hier eine Wendetangente der Parallelkurve; einer stationären Tangente der Ausgangskurve entspricht hier eine stationäre Tangente der Parallelkurve.

Wenn $k = 2$, besitzt ϱ einen endlichen, von Null verschiedenen Wert. Dann ergibt sich:

$$\Delta\xi = \left(1 - \frac{\tau}{\varrho}\right) g_1'(s)\Delta s + \frac{1}{2!}\left(g_1''(s) - \tau g_2'''(s)\right)\Delta s^2 + \cdots,$$

$$\Delta\eta = \left(1 - \frac{\tau}{\varrho}\right) g_2'(s)\Delta s + \frac{1}{2!}\left(g_2''(s) + \tau g_1'''(s)\right)\Delta s^2 + \cdots,$$

und man hat:

$$\frac{d\xi}{ds}\frac{d^2\eta}{ds^2} - \frac{d\eta}{ds}\frac{d^2\xi}{ds^2} = \frac{1}{\varrho}\left(1 - \frac{\tau}{\varrho}\right)^2.$$

Falls τ von dem an der betrachteten Stelle der Ausgangskurve geltenden Wert von ϱ verschieden ist, erhalten wir an der ent-

sprechenden Stelle der Parallelkurve eine gewöhnliche Tangente und den endlichen, von Null verschiedenen Krümmungshalbmesser $(sgn\,\varrho)\,|\varrho-\tau|$. Falls aber $\tau=\varrho$, ist die Untersuchung bedeutend verwickelter. Um die Sache zu erledigen, differenzieren wir die Gleichungen:

$$g_1''(s) = -\frac{g_2'(s)}{\varrho}, \quad g_2'' = \frac{g_1'(s)}{\varrho}$$

wiederholt nach s. Bedeutet n eine ganze positive Zahl, so folgt:

$$\overset{(2n)}{g_1}(s) = -g_2'(s)\frac{d^{2n-2}\frac{1}{\varrho}}{ds^{2n-2}} + \cdots + (-1)^n \frac{g_2'(s)}{\varrho^{2n-1}},$$

$$\overset{(2n)}{g_2}(s) = \quad g_1'(s)\frac{d^{2n-2}\frac{1}{\varrho}}{ds^{2n-2}} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{g_1'(s)}{\varrho^{2n-1}},$$

$$\overset{(2n+1)}{g_1}(s) = -g_2'(s)\frac{d^{2n-1}\frac{1}{\varrho}}{ds^{2n-1}} + \cdots + (-1)^n \frac{g_1'(s)}{\varrho^{2n}},$$

$$\overset{(2n+1)}{g_2}(s) = \quad g_1'(s)\frac{d^{2n-1}\frac{1}{\varrho}}{ds^{2n-1}} + \cdots + (-1)^n \frac{g_2'(s)}{\varrho^{2n}}.$$

Hier sind die nicht hingeschriebenen Glieder sämtlich mit Ableitungen von $\frac{1}{\varrho}$ nach s multipliziert.

Ist die niedrigste, an der betrachteten Stelle nicht verschwindende Ableitung von $\frac{1}{\varrho}$ von der ungeraden Ordnung $2n-1$, so erhalten wir die Entwicklungen:

$$\Delta\xi = -\frac{1}{(2n)!}\varrho g_1'(s)\frac{d^{2n-1}\frac{1}{\varrho}}{ds^{2n-1}}\Delta s^{2n}$$
$$-\frac{1}{(2n+1)!}\left(g_2'(s)\frac{d^{2n-1}\frac{1}{\varrho}}{ds^{2n-1}} + \varrho g_1'(s)\frac{d^{2n}\frac{1}{\varrho}}{ds^{2n}}\right)\Delta s^{2n+1} + \cdots,$$

$$\Delta\eta = -\frac{1}{(2n)!}\varrho g_2'(s)\frac{d^{2n-1}\frac{1}{\varrho}}{ds^{2n-1}}\Delta s^{2n}$$
$$+\frac{1}{(2n+1)!}\left(g_1'(s)\frac{d^{2n-1}\frac{1}{\varrho}}{ds^{2n-1}} - \varrho g_2'(s)\frac{d^{2n}\frac{1}{\varrho}}{ds^{2n}}\right)\Delta s^{2n+1} + \cdots$$

Für die kennzeichnenden Zahlen ergibt sich $\nu'=2n$, $\lambda'=1$.

Der Krümmungshalbmesser ϱ besitzt an der betrachteten Stelle weder ein Maximum noch ein Minimum, die Parallelkurve besitzt eine Hellebardenspitze mit dem Krümmungshalbmesser Null.

Ist die erste nicht verschwindende Ableitung von $\frac{1}{\varrho}$ an der betrachteten Stelle von der geraden Ordnung $2n$, so entsteht:

$$\Delta\xi = -\frac{1}{(2n+1)!}\varrho g_1'(s)\frac{d^{2n}\frac{1}{\varrho}}{ds^{2n}}\Delta s^{2n+1}$$
$$-\frac{1}{(2n+2)!}\left(\varrho g_1'(s)\frac{d^{2n+1}\frac{1}{\varrho}}{ds^{2n+1}} + g_2'(s)\frac{d^{2n}\frac{1}{\varrho}}{ds^{2n}}\right)\Delta s^{2n+2} + \cdots,$$

$$\Delta\eta = -\frac{1}{(2n+1)!}\varrho g_2'(s)\frac{d^{2n}\frac{1}{\varrho}}{ds^{2n}}\Delta s^{2n+1}$$
$$-\frac{1}{(2n+2)!}\left(\varrho g_2'(s)\frac{d^{2n+1}\frac{1}{\varrho}}{ds^{2n+1}} - g_1'(s)\frac{d^{2n}\frac{1}{\varrho}}{ds^{2n}}\right)\Delta s^{2n+2} + \cdots$$

Hier besitzt der Krümmungshalbmesser ϱ an der betrachteten Stelle ein Maximum oder ein Minimum; die Parallelkurve besitzt an der entsprechenden Stelle eine gewöhnliche Tangente und den Krümmungshalbmesser Null, da $\nu' = 2n+1$, $\lambda' = 1$.

Bei der Untersuchung der Umgebung eines solchen Punktes einer Parallelkurve, der einem außergewöhnlichen Punkt der Abbildung der Ausgangskurve auf die s-Gerade entspricht, ist der Umstand zu beachten, daß die positive Halbnormale an einer Spitze der Ausgangskurve einen Sprung von der Größe π macht. Wir haben daher für eine solche Umgebung die Gleichungen:

$$\xi + \Delta\xi = g_1(s+\Delta s) - \varepsilon^{\nu-1}\tau g_2'(s+\Delta s),$$
$$\eta + \Delta\eta = g_2(s+\Delta s) + \varepsilon^{\nu-1}\tau g_1'(s+\Delta s)$$

zu benutzen, die eine einfache Bestimmungsart der Zahlen ν' und λ' nicht zu liefern scheinen.

§ 11. Beispiele.

In der „Analyse des infiniments petits“ (Paris, 1696) teilt der Marquis de l'Hospital Beispiele für Wendepunkte und Spitzen mit den Krümmungen Null und Unendlich mit (Sektion V, Nr. 88), die wir eingehender betrachten wollen (Nr. 1—6) bei unwesentlicher Veränderung der l'Hospitalschen Bezeichnungen.

1. Die Kurve mit der Gleichung

$$y = x^3$$

besitzt im Punkte $x = 0$, $y = 0$ eine Wendetangente mit zwei unendlich fernen Krümmungsmittelpunkten. Ersetzen wir nämlich die Kurvengleichung durch die beiden Beziehungen:

$$x = t, \quad y = t^3,$$

so finden wir für den Punkt $(t = 0)$ $\nu = 1$, $\lambda = 2$, was nach § 1 für eine Wendetangente kennzeichnend ist und nach § 2, weil $\lambda - \nu$ ungerade, auf zwei unendlich ferne Krümmungsmittelpunkte führt.

Bei Benutzung der Bogenlänge als unabhängiger Veränderlicher erhalten wir:

$$\varDelta s = \int_0^t \sqrt{1 + 9\vartheta^4}\, d\vartheta = t + \frac{9}{10} t^5 + \cdots,$$

$$t = \varDelta s - \frac{9}{10} \varDelta s^5 + \cdots,$$

somit:

$$g_1(\varDelta s) = \varDelta s - \frac{9}{10} \varDelta s^5 + \cdots,$$

$$g_2(\varDelta s) = \varDelta s^3 - \frac{27}{10} \varDelta s^7 + \cdots,$$

also wiederum: $\nu = 1$, $\lambda = 2$.

2. Die Kurve mit der Gleichung:

$$y^3 = x^5$$

besitzt im Punkt $x = 0$, $y = 0$ eine Wendetangente und den Krümmungshalbmesser Null.

Ersetzen wir nämlich die letzte Gleichung durch die Beziehungen:

$$x = t^3, \quad y = t^5,$$

so wird für den Punkt $(t = 0)$: $\nu = 3$, $\lambda = 2$.

Der Übergang zur Bogenlänge als unabhängiger Veränderlicher ergibt:

$$\varDelta s = \int_0^t \sqrt{9\vartheta^4 + 25\vartheta^8}\, d\vartheta = t^3 + \frac{25}{42} t^7 + \cdots,$$

$$t = \varDelta s^{\frac{1}{3}} + \cdots,$$

$$g_1(\varDelta s) = \varDelta s + \cdots, \quad g_2(\varDelta s) = \varDelta s^{\frac{5}{3}} + \cdots,$$

also wiederum: $\nu = 3$, $\lambda = 2$.

3. Die Kurve mit der Gleichung:

$$y^2 = x^3$$

besitzt im Punkte $x = 0$, $y = 0$ eine Hellebardenspitze mit dem Krümmungshalbmesser Null.

Nehmen wir statt der vorigen Gleichung:

$$x = t^2, \quad y = t^3,$$

so folgt für den Punkt $(t = 0)$: $\nu = 2$, $\lambda = 1$.

Ferner:

$$\varDelta s = \int_0^t \sqrt{4\vartheta^2 + 9\vartheta^4}\, d\vartheta = s\left(t^2 + \frac{9}{16} t^4 + \cdots\right),$$

$$t = \varDelta_1 s^{\frac{1}{2}} + \cdots,$$

also:

$$g_1(\varDelta s) = \varDelta_1 s + \cdots, \quad g_2(\varDelta s) = \varDelta_1 s^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

und damit ebenfalls: $\nu = 2$, $\lambda = 1$.

4. Die Kurve mit der Gleichung:

$$y^2 = x^5$$

besitzt im Punkte $x = 0$, $y = 0$ eine Hellebardenspitze und zwei unendlich ferne Krümmungsmittelpunkte.

Ersetzen wir obige Gleichung durch die Beziehungen:

$$x = t^2, \quad y = t^5,$$

so folgt: $\nu = 2$, $\lambda = 3$.

Beim Übergang zur Bogenlänge ergibt sich:

$$\varDelta s = \int_0^t \sqrt{4\vartheta^2 + 25\vartheta^8}\, d\vartheta = s\left(t^2 + \frac{25}{32} t^8 + \cdots\right),$$

somit:

$$t = \varDelta_1 s^{\frac{1}{2}} + \cdots,$$

$$g_1(\varDelta s) = \varDelta_1 s + \cdots, \quad g_2(\varDelta s) = \varDelta_1 s^{\frac{5}{2}} + \cdots,$$

also wiederum: $\nu = 2$, $\lambda = 3$.

5. Die Kurve mit der Gleichung:

$$y = x^4$$

besitzt im Punkte $x = 0$, $y = 0$ eine gewöhnliche Tangente und einen unendlich fernen Krümmungsmittelpunkt (stationäre Tangente). Nehmen wir statt der letzten Gleichung die folgenden:

$$x = t, \quad y = t^4,$$

so wird:

$$\nu = 1, \quad \lambda = 3.$$

Ebenso hat man:

$$g_1(\varDelta s) = \varDelta s + \cdots, \quad g_2(\varDelta s) = \varDelta s^4 + \cdots,$$

woraus wieder $\nu = 1$, $\lambda = 3$ folgt.

6. Die Kurve mit der Gleichung:

$$y^3 = x^4$$

hat im Punkte $x = 0$, $y = 0$ eine gewöhnliche Tangente und den Krümmungshalbmesser Null.

Nehmen wir zur Befriedigung obiger Gleichung:

$$x = t^3, \quad y = t^4,$$

so wird $\nu = 3$, $\lambda = 1$.

Der Übergang zur Bogenlänge liefert:

$$\varDelta s = t^3 + \frac{1}{3} t^8 + \cdots,$$

$$t = \varDelta s^{\frac{1}{3}} + \cdots,$$

$$g_1(\varDelta s) = \varDelta s + \cdots, \quad g_2(\varDelta s) = \varDelta s^{\frac{4}{3}} + \cdots,$$

also wieder: $\nu = 3$, $\lambda = 1$.

7. Stellen wir eine Ellipse durch die Gleichungen dar:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t,$$

wo $a > b$ sei, und $a^2 - b^2$ gleich e^2 gesetzt werde, so erhalten die Gleichungen ihrer Evolute die Gestalt:

$$x_1 = \frac{e^2}{a} \cos^3 t, \quad y_1 = -\frac{e^2}{b} \sin^3 t.$$

Nun ist:

$$\cos^3 t = 1 - \frac{3}{2} t^2 + \frac{7}{8} t^4 + \cdots,$$

$$\sin^3 t = t^3 + \cdots,$$

woraus unmittelbar hervorgeht, daß für $t = 0$: $\nu = 2$, $\lambda = 1$. Die vier Spitzen der Evolute sind Hellebardenspitzen mit dem Krümmungshalbmesser Null.

Man hat:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{3e^2}{a} \cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{3e^2}{b} \sin^2 t \cos t.$$

Wir beschränken die Werte von t auf den Bereich $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ und schließen zunächst den Wert $t = 0$ aus. Da:

$$\frac{\frac{dx_1}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2}} = \frac{-\cos^2 t \sin t}{a\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t \left(\frac{\cos^2 t}{a^2} + \frac{\sin^2 t}{b^2}\right)}},$$

$$\frac{\frac{dy_1}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2}} = \frac{-\sin^2 t \cos t}{b\sqrt{\sin^2 t \cos^2 t \left(\frac{\cos^2 t}{a^2} + \frac{\sin^2 t}{b^2}\right)}},$$

so erhalten wir für die Richtungskosinus der positiven Halbtangente bei positivem t:

$$\cos\alpha = \frac{-\cos t}{a\sqrt{\frac{\cos^2 t}{a^2} + \frac{\sin^2 t}{b^2}}}, \quad \sin\alpha = \frac{-\sin t}{b\sqrt{\frac{\cos^2 t}{a^2} + \frac{\sin^2 t}{b^2}}},$$

bei negativem t:

$$\cos\alpha = \frac{\cos t}{a\sqrt{\frac{\cos^2 t}{a^2}+\frac{\sin^2 t}{b^2}}}, \quad \sin\alpha = \frac{\sin t}{b\sqrt{\frac{\cos^2 t}{a^2}+\frac{\sin^2 t}{b^2}}}.$$

Um die Ellipse als eine Evolvente ihrer Krümmungsmittelpunktskurve darzustellen, haben wir die Bogenlänge der letzteren zu berechnen, die wir mit σ bezeichnen wollen. Wir betrachten dieselbe als mit t wachsend, und ihr Nullpunkt gehöre zu dem Werte $t=0$. Dann folgt:

$$\sigma = (sgn\, t)\left\{a^2b^2\left(\sqrt{\frac{\cos^2 t}{a^2}+\frac{\sin^2 t}{b^2}}\right)^3 - \frac{b^2}{a}\right\}.$$

Wenden wir die Bestimmungsgleichungen:

$$\xi = g_1(\sigma) + (\tau-\sigma)g_1'(\sigma), \quad \eta = g_2(\sigma) + (\tau-\sigma)g_2'(\sigma)$$

unter der Voraussetzung eines negativen t an und nehmen τ gleich $\frac{b^2}{a}$, so ergibt sich:

$$\xi = \frac{e^2}{a}\cos^3 t + ab^2\left(\frac{\cos^2 t}{a^2}+\frac{\sin^2 t}{b^2}\right)\cos t = a\cos t,$$

$$\eta = -\frac{e^2}{b}\sin^3 t + a^2b\left(\frac{\cos^2 t}{a^2}+\frac{\sin^2 t}{b^2}\right)\sin t = b\sin t.$$

Die Parallelkurven der Ellipse werden dargestellt durch die Gleichungen:

$$\xi = \left(a - \frac{\tau b}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\right)\cos t, \quad \eta = \left(b - \frac{\tau a}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\right)\sin t.$$

Wir untersuchen die Parallelkurven in der Umgebung der dem Werte $t=0$ entsprechenden Punkte. Man hat:

$$a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t = b^2 + e^2t^2 - \frac{e^2}{3}t^4 + \cdots,$$

$$(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{b}\left\{1 - \frac{e^2}{2b^2}t^2 + \frac{e^2(4b^2+9e^2)}{24b^4}t^4 + \cdots\right\},$$

daher:

$$\xi = a - \tau + \frac{a(a\tau - b^2)}{2b^2}t^2 + \frac{ab^4 - \tau(9a^4 - 8a^2b^2)}{24b^3}t^4 + \cdots,$$

$$\eta = \frac{b^2 - a\tau}{b}t + \frac{3\tau ae^2 - b^2(b^2 - \tau a)}{6b^3}t^3 + \cdots$$

Für $t=0$ ist:

$$\frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{b^2 - a\tau}{b}.$$

Solange $b^2 - a\tau \geqq 0$, ist die positive, d. h. einem wachsenden t entsprechende Halbtangente in den zu $t=0$ gehörenden Punkten der Parallelkurven parallel der positiven y-Achse, solange $b^2 - a\tau < 0$, parallel der negativen y-Achse. Für $b^2 - a\tau = 0$ erhalten wir:

$$\xi = \frac{e^2}{a} - \frac{3ae^2}{8}t^4 + \cdots,$$

$$\eta = \frac{e^2}{2b^2}t^3 + \cdots,$$

d. h. $\nu = 3$, $\lambda = 1$. Dem Werte $t = 0$ entspricht hier eine gewöhnliche Tangente und der Krümmungshalbmesser Null; der Kurvenpunkt fällt mit der in der positiven x-Achse liegenden Spitze der Evolute der Ellipse zusammen.

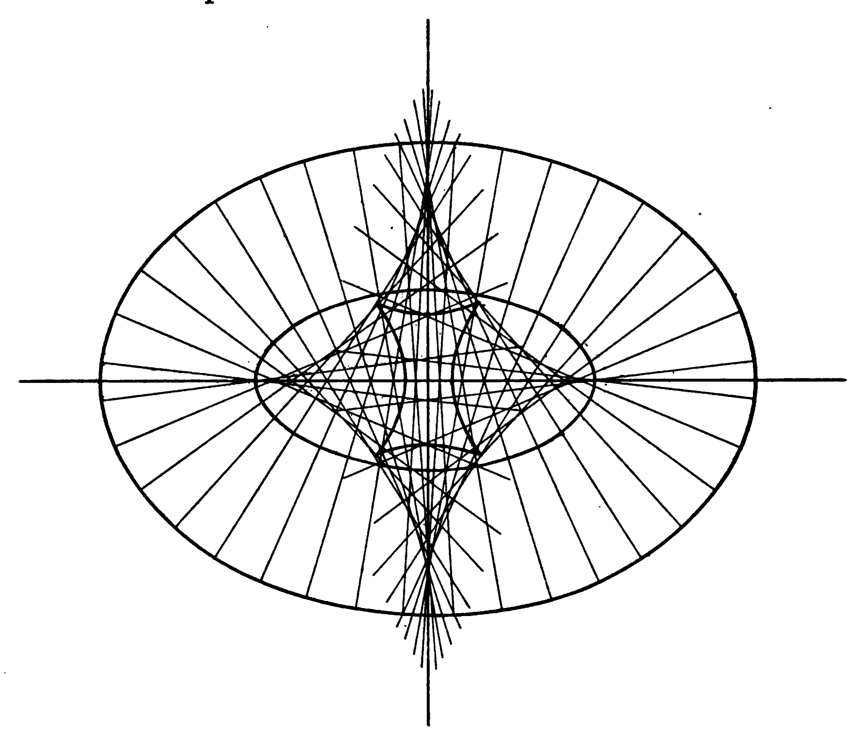


Fig. 11.

Für den Krümmungshalbmesser der Ellipse ergibt sich:

$$\varrho = \frac{\{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\}^3}{ab},$$

$$\frac{d\varrho}{ds} = \frac{3e^2\sin t\cos t}{ab}, \quad \frac{d^2\varrho}{ds^2} = \frac{3e^2\cos 2t}{ab\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}};$$

er besitzt also an der Stelle $t = 0$ ein Minimum von der Größe $\frac{b^2}{a}$. Der Krümmungshalbmesser der zu τ gehörenden Parallelkurve besitzt an der Stelle $t = 0$ den Wert $\left|\frac{b^2}{a} - \tau\right|$. Der entsprechende Krüm-

mungsmittelpunkt beschreibt, wenn τ von $-\infty$ bis $\frac{b^2}{a}$ läuft, den zwischen den Punkten $(x = -\infty)$ und $\left(x = \frac{e^2}{a}\right)$ liegenden Teil der x-Achse; wenn aber τ von $\frac{b^2}{a}$ bis $+\infty$ läuft, beschreibt er den zwischen den Punkten $\left(x = \frac{e^2}{a}\right)$ und $(x = +\infty)$ liegenden Teil der x-Achse.

In der Figur 11 ist außer der Evolute der Ellipse noch die zu $\tau = \frac{b^2}{a}$ gehörende Parallelkurve, sowie eine weitere, die zu einem zwischen $\frac{b^2}{a}$ und $\frac{a^2}{b}$ liegenden τ gehört und vier Hellebardenspitzen besitzt, gezeichnet.

8. Wir führen ähnliche Betrachtungen für die Parabel, deren Gleichung $y^2 = x$ ist, durch. Ersetzen wir die Gleichung der Parabel durch die beiden folgenden:

$$x = t^2, \quad y = t,$$

so ergibt sich für den Krümmungshalbmesser der Parabel die Beziehung:

$$\varrho = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+4t^2}\right)^3.$$

Die Gleichungen der Evolute der Parabel sind:

$$x_1 = \frac{1}{2} + 3t^2, \quad y_1 = -4t^3,$$

diejenigen der Parallelkurven der Parabel:

$$\xi = t^2 - \frac{\tau}{\sqrt{1+4t^2}}, \quad \eta = t + \frac{2t\tau}{\sqrt{1+4t^2}}.$$

Wir untersuchen die Parallelkurven zunächst in der Umgebung der dem Werte $t = 0$, sodann in der Umgebung der dem Werte $t = \frac{1}{2}$ entsprechenden Punkte.

Man erhält, wenn ξ und η nach Potenzen von t entwickelt werden:

$$\xi = -\tau + (1+2\tau)t^2 - 6\tau t^4 + \cdots,$$

$$\eta = (1+2\tau)t - 4\tau t^3 + 12\tau t^5 + \cdots$$

Solange $1 + 2\tau \geqq 0$, sind die dem Werte $t = 0$ entsprechenden positiven Halbtangenten der Parallelkurven parallel der positiven y-Achse, so lange $1 + 2\tau < 0$, sind sie parallel der negativen y-Achse. Der zu $t = 0$ gehörende Punkt ist nur dann ein außergewöhnlicher Punkt der Abbildung auf die t-Gerade (oder y-Achse), wenn $\tau = -\frac{1}{2}$. Dann ergibt sich $\nu = 3$, $\lambda = 1$. Der entsprechende Krümmungshalbmesser besitzt den Wert Null, während eine gewöhnliche Tangente vorliegt.

Für die Umgebung des Wertes $\frac{1}{2}$ setzen wir $t = \frac{1}{2} + t_1$ und entwickeln ξ und η nach Potenzen von t_1. Es ergibt sich:

$$(1+4t^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 - t_1 + \frac{t_1^2}{2} + \frac{t_1^3}{2}\cdots\right\},$$

$$\xi = \frac{1}{4} - \frac{\tau}{\sqrt{2}} + \left(1+\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right)t_1 + \left(1-\frac{\tau}{2\sqrt{2}}\right)t_1^2 - \frac{\tau}{2\sqrt{2}}t_1^3\cdots,$$

$$\eta = \frac{1}{2} + \tau\sqrt{2} + \left(1+\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right)t_1 - \frac{3\tau}{2\sqrt{2}}t_1^2 + \frac{3\tau}{2\sqrt{2}}t_1^3 + \cdots$$

Solange $1 + \frac{\tau}{\sqrt{2}} \geqq 0$, bildet die positive Halbtangente der Parallelkurven in den dem Werte $t_1 = 0$ entsprechenden Punkten den Winkel $\frac{\pi}{4}$, solange $1 + \frac{\tau}{\sqrt{2}} < 0$, den Winkel $\pi + \frac{\pi}{4}$ mit der positiven x-Achse. Für $\tau = -\sqrt{2}$ ist $\tau = \varrho$, und man hat:

$$\xi = \frac{5}{4} + \frac{3}{2}t_1^2 + \frac{1}{2}t_1^3\cdots, \quad \eta = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t_1^2 - \frac{3}{2}t_1^3\cdots,$$

also $\nu = 2$, $\lambda = 1$; es liegt eine Hellebardenspitze und der Krümmungshalbmesser Null vor, die Spitze befindet sich auf der Evolute.

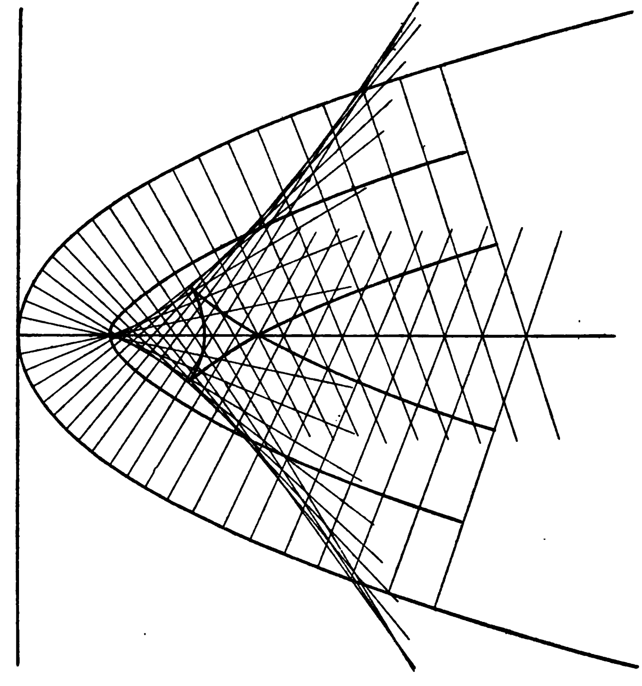


Fig. 12.

In der Figur 12 ist die Evolute der Parabel, ferner die zu $\tau = -\frac{1}{2}$ gehörende, und eine zu einem $\tau < -\frac{1}{2}$ gehörende und zwei Hellebardenspitzen besitzende Parallelkurve der Parabel gezeichnet.

9. Bei einer Zykloide nehmen wir den Halbmesser des rollenden Kreises gleich 1 und benutzen die Gleichungen:

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t.$$

Hier ist:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = \sin t;$$

somit ist der zu $t = 0$ gehörige Punkt ein außergewöhnlicher Punkt der Abbildung der Zykloide auf die t-Gerade. Für absolut genommen hinreichend kleine Werte von t erhält man:

$$\varDelta s = \int_0^t \sqrt{2(1 - \cos \vartheta)}\, d\vartheta = 2\varepsilon \int_0^t \sin \frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta = \varepsilon \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4^2 \cdot 3!} + \cdots \right),$$

somit: $t = \sqrt{2}\, \varDelta_1 s^{\frac{1}{2}} + \cdots$,

folglich:

$$\varDelta x = \frac{\sqrt{2}}{3} \varDelta_1 s^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad \varDelta y = \varDelta_1 s + \cdots$$

Die Zahl ν ist hier gleich 2, die Zahl λ gleich 1; es liegt also eine Hellebardenspitze mit verschwindendem Krümmungshalbmesser vor.

Für die Evolute der Zykloide erhalten wir:

$$x_1 = t + \sin t, \quad y_1 = -1 + \cos t.$$

Setzt man $t = \pi + t_1$, so kommt:

$$x_1 = \pi + t_1 - \sin t_1, \quad y_1 = -2 + 1 - \cos t_1.$$

Die Evolute ist daher der gegebenen Zykloide kongruent und entsteht aus ihr durch eine Verschiebung längs der positiven x-Achse um die Strecke π und eine solche längs der negativen y-Achse um die Strecke 2.

10. J. Binet bemerkte (Comptes rendus de l'Acad. d. sc. Paris, 1841, Bd. 12, S. 435), daß es auch Kurven gibt, die mit ihrer Evolute zusammenfallen, nämlich eine Art von logarithmischen Spiralen.

Wir nehmen:

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t,$$

und suchen den Radiusvektor r so als Funktion des Winkels t zu bestimmen, daß die Kurve die Radien unter einem konstanten Winkel schneidet, dessen Tangente k sei.

Man hat:

$$\frac{dx}{dt} = r' \cos t - r \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = r' \sin t + r \cos t,$$

somit: $k = \operatorname{tg}(\alpha - t) = \frac{r}{r'}$.

Zwischen den Polarkoordinaten r und t besteht daher die Gleichung:

$$r = r_0 e^{\frac{t}{k}},$$

wo r_0 größer als Null ist und den Wert von r für $t = 0$ bedeutet.

Man erhält jetzt:

$$\frac{dx}{dt} = r_0 e^{\frac{t}{k}} \left(\frac{1}{k}\cos t - \sin t\right), \qquad \frac{dy}{dt} = r_0 e^{\frac{t}{k}} \left(\frac{1}{k}\sin t + \cos t\right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = r_0 e^{\frac{t}{k}}\left(\left(\frac{1}{k^2} - 1\right)\cos t - \frac{2}{k}\sin t\right), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = r_0 e^{\frac{t}{k}}\left(\left(\frac{1}{k^2} - 1\right)\sin t + \frac{2}{k}\cos t\right),$$

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = r_0^2 e^{\frac{2t}{k}}\left(\frac{1}{k^2} + 1\right).$$

Für den Krümmungshalbmesser ergibt sich die Gleichung:

$$\varrho = r_0 e^{\frac{t}{k}} \sqrt{\frac{1}{k^2} + 1},$$

er ist also proportional r. Für die Evolute findet sich:

$$x_1 = -\frac{r}{k}\sin t, \quad y_1 = \frac{r}{k}\cos t,$$

woraus hervorgeht, daß auch die Evolute eine logarithmische Spirale ist. Nehmen wir $k > 0$, so ergibt sich für die Polarkoordinaten r_1 und t_1 der Evolute:

$$r_1 = \frac{r}{k}, \quad t_1 = t + \frac{\pi}{2}.$$

Der Halbstrahl, welcher den Radiusvector r_1 enthält, trifft die gegebene Spirale in unendlich vielen Punkten, welche zu den Polarwinkeln $t + \frac{\pi}{2} - 2n\pi$ gehören, wo n eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet. Die zugehörigen Werte von r sind gleich $r_0 e^{\frac{1}{k}\left(t + \frac{\pi}{2} - 2n\pi\right)}$. Soll r_1 mit einem dieser Werte von r zusammenfallen, so muß sein:

$$\frac{e^{\frac{t}{k}}}{k} = e^{\frac{1}{k}\left(t + \frac{\pi}{2} - 2n\pi\right)},$$

oder:

$$k^k = e^{\frac{4n-1}{2}\pi}.$$

Nehmen wir n als positive ganze Zahl, so ergibt die vorstehende Gleichung für k einen positiven Wert, der größer wie 1 ist. Damit ist gezeigt, daß eine Kurve mit ihrer Evolute zusammenfallen kann.

11. l'Hospital zeigte (Analyse des inf. pet. Section V Nr. 82), wie man aus einer Kurve mit einem solchen Wendepunkt, für den zwei unendlich große Krümmungshalbmesser vorhanden sind, eine zweite Kurve herleiten kann, bei der der fragliche Wendepunkt ein solcher mit verschwindendem Krümmungshalbmesser ist. Hat die Kurve BOA (Fig. 12) in O einen Wendepunkt, so lege man einen Faden auf BO und ebenso einen Faden auf OA. Die Abwicklung beider Fäden von O aus erzeugt die Kurve $B'OA'$, die offenbar in O einen Wende-

punkt mit verschwindendem Krümmungshalbmesser besitzt. Wir wollen diese geometrische Konstruktion analytisch verfolgen, indem wir als Kurve BOA diejenige mit der Gleichung: $y = \frac{x^3}{6}$ zugrunde legen. Die einem wachsenden x entsprechende Halbtangente dieser Kurve im Punkte x, y besitzt die Richtungskosinus:

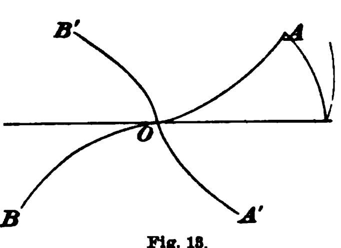


Fig. 13.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}}, \quad \sin\alpha = \frac{x^2}{2\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}}.$$

Sind daher x', y' die Koordinaten eines Punktes des Kurvenzugs OB', so haben wir:

$$x' = x + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}}\int_x^0 \sqrt{1+\frac{x^4}{4}}\,dx, \quad y' = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}}\int_x^0 \sqrt{1+\frac{x^4}{4}}\,dx.$$

Hier darf x nur negative Werte einschließlich der Null annehmen.

Sind x'', y'' die Koordinaten eines Punktes des Kurvenzugs OA', so haben wir:

$$x'' = x - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}}\int_0^x \sqrt{1+\frac{x^4}{4}}\,dx, \quad y'' = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}}\int_0^x \sqrt{1+\frac{x^4}{4}}\,dx,$$

wo x nur positive Werte, einschließlich der Null, annehmen darf. Dies zeigt, daß die Gleichungen für x' und y' die Koordinaten auch der im Zweige OA' gelegenen Punkte darstellen, wenn man für x auch positive Werte zuläßt.

Unter der Bedingung: $x^2 < 2$ können x' und y' nach ganzen Potenzen von x entwickelt werden, und man erhält:

$$x' = x + \left(1 - \frac{x^4}{8}\cdots\right)\left(-x - \frac{x^5}{40}\cdots\right) = \frac{x^5}{10} + \cdots,$$

$$y' = \frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{16}\cdots\right)\left(-x - \frac{x^5}{40}\cdots\right) = -\frac{x^3}{3} + \cdots$$

Hiernach ist: $\nu = 3$, $\lambda = 2$, so daß tatsächlich der Punkt $x' = 0$, $y' = 0$ ein Wendepunkt mit dem Krümmungshalbmesser Null ist.

12. Man verdankt l'Hospital auch die Unterscheidung der Spitzen in solche erster Art (Hellebardenspitzen) und solche zweiter Art (Schnabelspitzen). [Analyse des inf. pet. Section V. Nr. 109.] Eine Kurve mit einer Schnabelspitze erzeugt l'Hospital auf folgende Weise. Er legt auf das Kurvenstück BOA (Fig. 13), in dem O ein Wendepunkt ist, einen Faden und wickelt ihn von A aus ab. Ist der Be-

rührungspunkt des Fadens in O angelangt, so liegt der bewegliche Endpunkt des Fadens in der Wendetangente. Die weitere Abwicklung des Fadens zeigt, daß die Evolvente in der Wendetangente der Evolute eine Schnabelspitze besitzt.

Wir wollen dies bei der Kurve mit der Gleichung $y = \frac{x^3}{6}$ analytisch verfolgen. Die x-Koordinate des Punktes A sei gleich Eins und die Bogenlänge OA gleich σ, so daß:

$$\sigma = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^4}{4}}\, dx.$$

Für den zum Werte x gehörenden Punkt (x', y') der Evolvente erhalten wir:

$$x' = x + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} \int_x^1 \sqrt{1 + \frac{x^4}{4}}\, dx,$$

$$y' = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}} \int_x^1 \sqrt{1 + \frac{x^4}{4}}\, dx.$$

Aber:

$$\int_x^1 \sqrt{1 + \frac{x^4}{4}}\, dx = \sigma - \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x^4}{4}}\, dx = \sigma - x - \frac{x^5}{40} \cdots,$$

falls der absolute Betrag von x kleiner als $\sqrt{2}$ angenommen wird. Damit ergibt sich:

$$x' = \sigma - \frac{\sigma x^4}{8} + \frac{x^5}{10} \cdots, \quad y' = \frac{\sigma x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \cdots$$

Wir haben somit für den Wert $x = 0$: $\nu = 2$, $\lambda = 2$, sowie:

$$f_1''(0)^2 + f_2''(0)^2 = \sigma^2, \quad f_1''(0) f_2^{(4)}(0) - f_2''(0) f_1^{(4)}(0) = 3\sigma^2,$$

also nach § 2 S. 10:

$$\varrho = \frac{3!\,\sigma^3}{2 \cdot 3\,\sigma^2} = \sigma.$$

Es liegt eine Schnabelspitze mit dem Krümmungshalbmesser σ vor.

§ 12. Eigenschaften des Krümmungskreises.

1. Schon l'Hospital (Anal. des inf. pet. Section V. Coroll. II Nr. 2) und Johann Bernoulli (Opera omnia Bd. 3, S. 432) erkannten, daß eine Kurve im allgemeinen von ihren Krümmungskreisen geschnitten wird. Man braucht bloß ein Kurvenstück mit dem

zugehörigen Evolutenstück zu zeichnen und die Krümmungskreise hinzuzufügen, um sich von der fraglichen Tatsache zu überzeugen. Zu ihrer analytischen Begründung betrachten wir einen Kurvenpunkt (s), in dessen Umgebung $g_1(s+\Delta s)$ und $g_2(s+\Delta s)$ nach ganzen Potenzen von Δs entwickelbar seien, während der Krümmungshalbmesser einen endlichen Wert besitze. Ein Kreis mit dem Halbmesser $\pm r$ und einem, auf der zu s gehörenden Kurvennormalen liegenden, Mittelpunkt hat die Gleichung:

$$\left(x - g_1(s) + rg_2'(s)\right)^2 + \left(y - g_2(s) - rg_1'(s)\right)^2 = r^2.$$

Die Zahl r ist positiv oder negativ, je nachdem der Kreismittelpunkt in der positiven oder negativen Halbnormalen liegt. Der zum Werte $s + \Delta s$ gehörende Kurvenpunkt sei um eine Strecke mit der Maßzahl E vom Kreismittelpunkt entfernt, so daß:

$$E^2 = \left(g_1(s+\Delta s) - g_1(s) + rg_2'(s)\right)^2 + \left(g_2(s+\Delta s) - g_2(s) - rg_1'(s)\right)^2$$
$$= r^2 + \left(1 - \frac{r}{\varrho}\right)\Delta s^2 + \frac{r}{3\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}\Delta s^3 + \cdots$$

Es sei zunächst r von ϱ verschieden. Ist dann $1 - \frac{r}{\varrho}$ positiv, so auch $E^2 - r^2$ für absolut genommen hinreichend kleine Werte von Δs. Jetzt liegt die Kurve in hinreichender Nähe des Berührungspunktes (s) ganz außerhalb des betrachteten Kreises. Ist $1 - \frac{r}{\varrho}$ negativ, so liegt die Kurve in hinreichender Nähe des Berührungspunktes innerhalb des Kreises. Für $r = \varrho$ und $\frac{d\varrho}{ds} \gtrless 0$ beginnt die Entwicklung von $E^2 - r^2$ mit der dritten Potenz von Δs. Auf einer Seite des Berührungspunktes tritt daher die Kurve in den Krümmungskreis ein, auf der anderen aus ihm heraus, d. h. der Krümmungskreis schneidet die Kurve. (Vgl. Mack, Archiv der Mathem. u. Phys., Teil 64, 1879, S. 182, wo der fragliche Beweis unter der Voraussetzung geliefert wird, daß die Kurve durch eine Gleichung von der Form $y = \varphi(x)$ gegeben sei.)

2. Wird ein Krümmungskreis von den ihm benachbarten Krümmungskreisen geschnitten oder nicht?

Der Mittelpunkt des zum Wert s gehörenden Krümmungskreises hat die Koordinaten:

$$x_1 = g_1(s) - \varrho g_2'(s), \quad y_1 = g_2(s) + \varrho g_1'(s).$$

Der Mittelpunkt des zu $s + \Delta s$ gehörenden Krümmungskreises hat die Koordinaten:

$$x_2 = g_1(s+\Delta s) - \varrho_1 g_2'(s+\Delta s), \quad y_2 = g_2(s+\Delta s) + \varrho_1 g_1'(s+\Delta s),$$

wenn mit ϱ_1 der Wert des Krümmungshalbmessers an der Stelle $s + \Delta s$ bezeichnet wird. Die Potenzlinie beider Kreise hat die Gleichung in der Normalform:

$$\frac{(2\xi - x_2 - x_1)(x_2 - x_1) + (2\eta - y_2 - y_1)(y_2 - y_1) - \varrho^2 + \varrho_1^2}{2\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = 0.$$

Das vom Mittelpunkt des zu s gehörenden Kreises auf die Potenzlinie gefällte Lot besitze die Maßzahl $\pm h$.

Dann ist:

$$h = \frac{-(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - \varrho^2 + \varrho_1^2}{2\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}},$$

aber:

$$x_2 - x_1 = -g_2'(s)\frac{d\varrho}{ds}\Delta s - \frac{1}{2}\left(g_2'(s)\frac{d^2\varrho}{ds^2} + \frac{g_1'(s)}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds}\right)\Delta s^2$$
$$+ \frac{1}{6}\left(g_1'(s)\left(\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 - \frac{2}{\varrho}\frac{d^2\varrho}{ds^2}\right) + g_2'(s)\left(\frac{1}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds} - \frac{d^3\varrho}{ds^3}\right)\right)\Delta s^3 + \cdots,$$

$$y_2 - y_1 = g_1'(s)\frac{d\varrho}{ds}\Delta s + \frac{1}{2}\left(g_1'(s)\frac{d^2\varrho}{ds^2} - \frac{g_2'(s)}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds}\right)\Delta s^2$$
$$+ \frac{1}{6}\left(-g_1'(s)\left(\frac{1}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds} - \frac{d^3\varrho}{ds^3}\right) + g_2'(s)\left(\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 - \frac{2}{\varrho}\frac{d^2\varrho}{ds^2}\right)\right)\Delta s^3 + \cdots,$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2\Delta s^2 + \frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2}\Delta s^3$$
$$+ \left\{\frac{1}{4}\left(\frac{d^2\varrho}{ds^2}\right)^2 + \frac{1}{3}\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^3\varrho}{ds^3} - \frac{1}{12\varrho^2}\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2\right\}\Delta s^4 + \cdots,$$

$$-(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 + \varrho_1^2 - \varrho^2 = \Delta s\left(2\varrho\frac{d\varrho}{ds} + \varrho\frac{d^2\varrho}{ds^2}\Delta s + \frac{\varrho}{3}\frac{d^3\varrho}{ds^3}\Delta s^2 \cdots\right),$$

folglich:

$$h^2 = \frac{4\varrho^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 + 4\varrho^2\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2}\Delta s + \left(\varrho^2\left(\frac{d^2\varrho}{ds^2}\right)^2 + \frac{4}{3}\varrho^2\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^3\varrho}{ds^3}\right)\Delta s^2 + \cdots}{4\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 + 4\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2}\Delta s + \left(\left(\frac{d^2\varrho}{ds^2}\right)^2 + \frac{4}{3}\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^3\varrho}{ds^3} - \frac{1}{3\varrho^2}\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2\right)\Delta s^2 + \cdots}$$

und

$$h^2 - \varrho^2 = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2\Delta s^2 + \cdots}{4\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 + \cdots}.$$

Die Differenz $h^2 - \varrho^2$ ist also für absolut genommen hinreichend kleine Werte von Δs positiv, wenn $\frac{d\varrho}{ds}$ von Null verschieden. Hinreichend benachbarte Krümmungskreise schneiden sich im allgemeinen nicht.

3. Es werde $|\Delta s|$ als so klein vorausgesetzt, daß sich die zu den Werten s und $s + \Delta s$ gehörenden Krümmungskreise nicht schneiden.

Ziehen wir nun vom Mittelpunkt des zu (s) gehörenden Kreises eine Halbgerade und drehen sie um den Mittelpunkt, so wird das zwischen beiden Kreisen liegende Stück der Halbgeraden einmal einen kleinsten und einmal einen größten Wert annehmen. Auf diese Weise werden zwei Halbgerade ausgezeichnet, und man kann fragen, welche Lage diese Halbgeraden im Grenzfall $\Delta s = 0$ annehmen.

Setzen wir den dem Werte s entsprechenden Kurvenpunkt als gewöhnlichen Punkt der Abbildung der Kurve auf die s-Gerade voraus, und ist, wie früher,

$$g_1'(s) = \cos\alpha, \quad g_2'(s) = \sin\alpha,$$

so stellen die Gleichungen

$$x = x_1 + \tau\cos(\alpha + \varphi), \quad y = y_1 + \tau\sin(\alpha + \varphi)$$

für veränderliche Werte von φ die fraglichen Halbgeraden dar, wenn τ nur positive Werte erhält. Die dem Werte φ entsprechende Halbgerade trifft den zweiten Kreis in einem Punkt, dessen Abstand vom Mittelpunkt des ersten Kreises durch die positive Wurzel der Gleichung:

$$\big(x_2 - x_1 - \tau\cos(\alpha + \varphi)\big)^2 + \big(y_2 - y_1 - \tau\sin(\alpha + \varphi)\big)^2 = \varrho_1^2$$

bestimmt wird. Dies ergibt:

$$\tau = (x_2 - x_1)\cos(\alpha + \varphi) + (y_2 - y_1)\sin(\alpha + \varphi)$$
$$+ \sqrt{\big((x_2 - x_1)\cos(\alpha + \varphi) + (y_2 - y_1)\sin(\alpha + \varphi)\big)^2 + \varrho_1^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2},$$

wo die Wurzel, die wir kurz mit W bezeichnen wollen, positiv zu nehmen ist.

Nun wird:

$$(x_2 - x_1)\cos(\alpha + \varphi) + (y_2 - y_1)\sin(\alpha + \varphi)$$
$$= \cos\varphi\big(g_1'(s)(x_2 - x_1) + g_2'(s)(y_2 - y_1)\big) - \sin\varphi\big(g_2'(s)(x_2 - x_1) - g_1'(y_2 - y_1)\big)$$
$$= -\frac{\cos\varphi}{2\varrho}\frac{d\varrho}{ds}\Delta s^2 \cdots + \sin\varphi\frac{d\varrho}{ds}\Delta s + \cdots,$$

somit:

$$W^2 = \varrho^2 + 2\varrho\frac{d\varrho}{ds}\Delta s + \cdots$$

Um W selbst zu berechnen, hat man den Fall eines positiven ϱ von dem eines negativen ϱ zu unterscheiden. Nehmen wir an, daß die Bogenlänge s mit wachsendem x wächst, so ist ϱ positiv, wenn die Kurve konvex, negativ, wenn sie konkav gegen die x-Achse gekrümmt ist. Im ersten Fall entspricht auf dem zu s gehörenden Krümmungskreise der Berührungspunkt P dem Werte $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, im zweiten Fall dem Wert $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Verfolgen wir den ersten Fall, so ergibt sich:

$$W = \varrho + \frac{d\varrho}{ds}\varDelta s + \cdots,$$

$$\tau - \varrho = (1 + \sin\varphi)\frac{d\varrho}{ds}\varDelta s + g(s, \varphi)\varDelta s^2 + \cdots$$

Hieraus geht hervor, daß $\tau - \varrho$ bei absolut genommen hinreichend kleinem $\varDelta s$ und von Null verschiedenem $\frac{d\varrho}{ds}$ sein Zeichen nicht ändert, so lange $\sin\varphi$ von -1 verschieden ist. Aber bei $\sin\varphi = -1$ zeigt sich mit Hilfe einer genaueren Rechnung, daß:

$$\tau - \varrho = \frac{1}{6\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}\varDelta s^3 + \cdots,$$

somit besitzt unter der angenommenen Beschränkung von $\varDelta s$ die Differenz $\tau - \varrho$ das Vorzeichen von $\frac{d\varrho}{ds}\varDelta s$. Wir sehen also im Einklang mit der vorigen Bemerkung 2., daß der zu $s + \varDelta s$ gehörende Krümmungskreis den zu s gehörenden umschließt oder von ihm umschlossen wird, je nachdem $\frac{d\varrho}{ds}\varDelta s$ positiv oder negativ ausfällt.

Da:

$$\frac{\partial(\tau - \varrho)}{\partial\varphi} = \cos\varphi\frac{d\varrho}{ds}\varDelta s + \frac{\partial g}{\partial\varphi}\varDelta s^2 \ldots,$$

$$\frac{\partial^2(\tau - \varrho)}{\partial\varphi^2} = -\sin\varphi\frac{d\varrho}{ds}\varDelta s + \frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\varDelta s^2 \ldots,$$

so ergibt sich, daß die Werte von φ, welche ein Maximum oder ein Minimum von $\tau - \varrho$ liefern, der Gleichung:

$$\cos\varphi\frac{d\varrho}{ds} + \frac{\partial g}{\partial\varphi}\varDelta s + \cdots = 0$$

genügen. Wir erhalten für hinreichend kleine Werte von $|\varDelta s|$ ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem für einen der vorigen Gleichung genügenden Wert von φ der Ausdruck $-\sin\varphi\frac{d\varrho}{ds}\varDelta s$ negativ oder positiv ausfällt. Die Werte von φ, um die es sich handelt, lassen sich durch $\pm\frac{\pi}{2} + \vartheta$ darstellen, wenn ϑ eine mit $\varDelta s$ verschwindende Zahl bedeutet. Ist nun $\frac{d\varrho}{ds}\varDelta s$ positiv, so ist $\tau - \varrho$ positiv, aber $\sin\varphi$ ist positiv für $\varphi = \frac{\pi}{2} + \vartheta$, negativ für $\varphi = -\frac{\pi}{2} + \vartheta$. Daher haben wir bei $\varphi = \frac{\pi}{2} + \vartheta$ ein Maximum, bei $\varphi = -\frac{\pi}{2} + \vartheta$ ein Minimum von $\tau - \varrho$.

Wenn $\frac{d\varrho}{ds}\varDelta s$ negativ, so haben wir für $\varrho - \tau$ ein Maximum bei $\varphi = \frac{\pi}{2} + \vartheta$, ein Minimum bei $\varphi = -\frac{\pi}{2} + \vartheta$. Gehen wir mit $\varDelta s$ zur Grenze Null über, so rückt der Minimalpunkt in den Be-

rührungspunkt, der Maximalpunkt in den dem Berührungspunkt diametral gegenüberliegenden Punkt des zum Wert s gehörenden Krümmungskreises.

Derselbe Satz ergibt sich für ein negatives ϱ.

Selbstverständlich hätten wir die unter 2. und 3. gestellten Fragen auch durch die Betrachtung der unter 1. geschilderten l'Hospitalschen Konstruktion beantworten können. Da die Differenz der Krümmungshalbmesser zweier benachbarter Krümmungskreise gleich dem zwischen ihren Mittelpunkten liegenden Stück der Evolute ist, so fällt sie größer aus, wie der Abstand der Krümmungsmittelpunkte, die Kreise schneiden sich also nicht. (P. G. Tait, Proceedings of the Edinburgh Mathem. Society. Bd. 14, 1896, S. 26.) Da ferner das Maximum und Minimum von $(r - \varrho)$ in der Zentrale beider Kreise liegt, und letztere bei abnehmendem $|\varDelta s|$ in die zu (s) gehörende Kurvennormale übergeht, so ist auch die Richtigkeit der Bemerkung 3. ersichtlich. Trotzdem sind unsere analytischen Entwicklungen keineswegs überflüssig. Geben sie doch das wichtige Erkenntnis, daß der Minimalabstand mit $\varDelta s^3$, der Maximalabstand mit $\varDelta s$ unendlich klein wird. Wir empfehlen dem Leser, die fraglichen analytischen Beweise unter der Annahme der Bogenlänge der Evolute als unabhängiger Veränderlichen durchzuführen.

§ 13. Ort der Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Kurve.

Wir betrachten einen gewöhnlichen Punkt P der Abbildung der Kurve auf die s-Gerade mit endlichem Krümmungshalbmesser. Durch den zu $s + \varDelta s$ gehörenden Punkt $P'(x', y')$ werde eine Gerade parallel zur Kurventangente in P gezogen. Diese Gerade wird, da P kein Wendepunkt ist, die Kurve in einem dem Punkte P benachbarten Punkte $P''(x'', y'')$ schneiden, welch letzterer zum Werte $s + \varDelta' s$ gehören möge. Wir suchen die Koordinaten des Mittelpunktes P_0 der Strecke $P'P''$ zu bestimmen.

Da die Strecke $P'P''$ der Tangente in P parallel liegt, haben wir:

$$\{g_1(s+\varDelta s) - g_1(s+\varDelta' s)\} g_2'(s) - \{g_2(s+\varDelta s) - g_2(s+\varDelta' s)\} g_1'(s) = 0$$

oder:

$$\frac{1}{2}\left(g_1''(s)g_2'(s) - g_2''(s)g_1'(s)\right)(\varDelta s^2 - \varDelta' s^2)$$
$$+ \frac{1}{6}\left(g_1'''(s)g_2'(s) - g_2'''(s)g_1'(s)\right)(\varDelta s^3 - \varDelta' s^3) + \cdots = 0,$$

und nach Division mit $\varDelta s - \varDelta' s$:

$$-\frac{1}{2\varrho}(\varDelta s + \varDelta' s) + \frac{1}{6\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}(\varDelta s^2 + \varDelta s \varDelta' s + \varDelta' s^2) + \cdots = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\varDelta' s = -\varDelta s + \frac{1}{3\varrho}\frac{d\varrho}{ds}\varDelta s^2 + \cdots$$

Für die Koordinaten x_0, y_0 des Punktes P_0 folgt:

$$x_0 = g_1(s) + \frac{1}{2} g_1'(s)(\Delta s + \Delta' s) + \frac{1}{4} g_1''(s)(\Delta s^2 + \Delta' s^2) \cdots$$
$$= g_1(s) + \left(\frac{g_1'(s)}{6\varrho}\frac{d\varrho}{ds} - \frac{g_2'(s)}{2\varrho}\right)\Delta s^2 + \cdots,$$
$$y_0 = g_2(s) + \frac{1}{2} g_2'(s)(\Delta s + \Delta' s) + \frac{1}{4} g_2''(s)(\Delta s^2 + \Delta' s^2) \cdots$$
$$= g_2(s) + \left(\frac{g_2'(s)}{6\varrho}\frac{d\varrho}{ds} + \frac{g_1'(s)}{2\varrho}\right)\Delta s^2 + \cdots$$

Durch diese Gleichungen ist bei veränderlichem Δs eine Kurve bestimmt.

Der Winkel α_0, den die dem Werte $\Delta s = 0$ entsprechende positive Halbtangente dieser Kurve mit der positiven x-Achse bildet, ergibt sich aus den Gleichungen:

$$\cos\alpha_0 = \lim_{(\Delta s = 0)} \frac{x_0 - g_1(s)}{\sqrt{(x_0 - g_1(s))^2 + (y_0 - g_2(s))^2}} = \frac{\frac{1}{3}\frac{d\varrho}{ds} g_1'(s) - g_2'(s)}{\sqrt{\frac{1}{9}\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 + 1}},$$

$$\sin\alpha_0 = \lim_{(\Delta s = 0)} \frac{y_0 - g_2(s)}{\sqrt{(x_0 - g_1(s))^2 + (y_0 - g_2(s))^2}} = \frac{\frac{1}{3}\frac{d\varrho}{ds} g_2'(s) + g_1'(s)}{\sqrt{\frac{1}{9}\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 + 1}}.$$

Die in Rede stehende Tangente wurde von A. Transon (Journal de Mathém. [1] Bd. 6, 1841, S. 191) Aberrationsachse genannt. Der Name Deviationsachse ist auch gebräuchlich. Die Tangente des Winkels $\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha_0\right)$, den die Aberrationsachse mit der positiven Halbnormalen bildet, hat den Wert $\frac{1}{3}\frac{d\varrho}{ds}$.

Wir sind auf den Ort der Mittelpunkte paralleler Sehnen hauptsächlich deswegen eingegangen, weil die Reihen für x_0 und y_0 zeigen, wie notwendig die allgemeinen im § 1 aufgestellten Voraussetzungen über den Bereich der Werte von t sind, für die man die Funktionen $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ betrachtet. In unserem Falle vertritt Δs die Stelle von t, x_0 und y_0 sind für die Umgebung der Stelle 0 nach Potenzen von t entwickelt. Trotzdem, daß die Entwicklungen von Δx_0, Δy_0 mit der zweiten Potenz von t beginnen, darf man nicht schließen, daß dem Werte $t = 0$ eine Spitze entspräche. Man darf nämlich der Zahl Δs nur positive oder nur negative Werte beilegen, da zu jedem hinreichend kleinen positiven Δs ein negatives $\Delta' s$ gehört, das denselben Punkt (x_0, y_0) liefert, und umgekehrt. Daher ist der Punkt $\Delta s = 0$ ein Grenzwert des für Δs geltenden Intervalls, und auf Entwicklungen für die Umgebung eines Grenzpunktes finden unsere Regeln keine Anwendung.

Stellen wir z. B. eine Ellipse durch die Gleichungen:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

dar, so hat die Gerade, welche parallel zu der im Punkte (x, y) berührenden Tangente durch den Punkt $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ gezogen ist, die Gleichungen:

$$\xi = a\cos(t + \Delta t) - ha\sin t, \quad \eta = b\sin(t + \Delta t) + hb\cos t.$$

Der zweite Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ellipse möge zu dem Werte $t + \Delta' t$ gehören. Eliminiert man h aus den Gleichungen:

$$\cos(t + \Delta t) - h\sin t = \cos(t + \Delta' t), \quad \sin(t + \Delta t) + h\cos t = \sin(t + \Delta' t),$$

so erhält man $\Delta' t = -\Delta t$, und damit ergibt sich:

$$x_0 = \frac{a}{2}\left(\cos(t + \Delta t) + \cos(t - \Delta t)\right) = a\cos t\cos\Delta t,$$

$$y_0 = \frac{b}{2}\left(\sin(t + \Delta t) + \sin(t - \Delta t)\right) = b\sin t\cos\Delta t.$$

Hierdurch ist bei veränderlichem Δt der zu dem Werte t gehörende Durchmesser der Ellipse dargestellt, auf dem von einer Spitze keine Rede sein kann.

§ 14. Darstellung einer Kurve durch eine einzige Gleichung.

Will man die im vorigen behandelten Fragen für den Fall beantworten, daß eine Kurve durch eine Gleichung von der Form $f(x,y) = 0$ gegeben ist, so wird die Untersuchung viel verwickelter als die frühere. Es sollen daher nur einige besonders wichtige Erörterungen angestellt werden.

Zunächst nehmen wir an, daß im allgemeinen, d. h. nach Ausschluß getrennt liegender Punkte (x, y) der Ausdruck $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ nach ganzen, positiven Potenzen von Δx und Δy entwickelbar ist. Damit haben wir namentlich diejenigen Stellen von der Betrachtung ausgeschlossen, an denen eine Ableitung von $f(x, y)$ unendlich groß wird; denn die in Rede stehende Entwickelbarkeit setzt in erster Linie die Endlichkeit sämtlicher Ableitungen voraus.

Fassen wir x und y als Funktionen der Veränderlichen t auf, die die Gleichung $f(x, y) = 0$ identisch befriedigen, so folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0.$$

Diese Beziehung gestattet es, an der betrachteten Stelle (x, y) den Wert des Verhältnisses $\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt}$ zu berechnen, falls $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht zugleich verschwinden. Wir müssen also die Gleichung $f(x, y) = 0$ als in solcher Form befindlich voraussetzen, daß nicht für jedes, der

Gleichung $f(x, y) = 0$ genügende, Wertepaar x, y die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ beide Null sind. Dies fände z. B. statt, wenn wir statt der Gleichung $f(x, y) = 0$ die Gleichung:

$$\cos f(x, y) - 1 = 0$$

zugrunde legten.

Unter der gemachten Voraussetzung können die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ nur an getrennt liegenden Punkten, die wir außergewöhnliche Punkte nennen wollen, zugleich verschwinden; an einem gewöhnlichen Punkt ist mindestens eine dieser Ableitungen von Null verschieden.

Aus der Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

folgt, wenn x, y die Koordinaten eines gewöhnlichen Kurvenpunktes sind, und p einen Proportionalitätsfaktor bedeutet:

$$\frac{dx}{dt} = p\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -p\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Die Richtungskosinus der Tangente sind demnach:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

die der Normalen sind:

$$\frac{\frac{\partial f}{d x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

aber es fragt sich, welche Halbtangente, und welche Halbnormale hier dem positiven Wert der Quadratwurzel entspricht. Um dies zu entscheiden, bezeichnen wir den positiven Wert der Quadratwurzel mit w und betrachten den Zuwachs Δf der Funktion $f(x, y)$ für den Fall, daß man von dem Punkt (x, y) aus auf der zu ihm gehörenden Normale ein kleines Stückchen weitergeht.

Wenn:

$$x' = x + h\frac{\frac{\partial f}{d x}}{w}, \quad y' = y + h\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w},$$

so ist:

$$\Delta f = f(x', y') - f(x, y).$$

Nehmen wir nun an, daß der Ausdruck $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ nach ganzen, positiven Potenzen von $\Delta x, \Delta y$ entwickelbar ist, so folgt für:

$$\Delta x = h\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w}, \quad \Delta y = h\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w}$$

die Gleichung:

$$\Delta f = hw + \cdots$$

Wir denken uns nun den absoluten Betrag von h so klein, daß die rechte Seite dieser Gleichung das Vorzeichen ihres ersten Gliedes besitzt. Dann ist Δf bei positivem h positiv, bei negativem h negativ, so daß sich die positive Halbnormale von der Kurve aus in denjenigen Teil der Ebene erstreckt, für dessen Punkte $f(x, y)$ positiv ist. Die positive Halbnormale bilde mit der positiven x-Achse den Winkel β. Zur positiven Halbtangente nehmen wir, wie früher, diejenige Halbtangente, die durch Verminderung des Winkels β um $\frac{\pi}{2}$ erhalten wird. Ist $\beta - \frac{\pi}{2} = \alpha$, so ergibt sich:

$$\cos\alpha = \frac{1}{w}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \sin\alpha = \frac{-1}{w}\frac{\partial f}{\partial x};$$

da anderseits:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}},$$

so ergibt sich der oben benutzte Proportionalitätsfaktor p als positive Zahl.

Um den Ausdruck für den Krümmungshalbmesser zu erhalten, differenzieren wir die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

nach t und finden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dt^2} = 0.$$

Ersetzt man hierin die Zahlen $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ der Reihe nach durch $p\frac{\partial f}{\partial y}, -p\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{1}{p}\frac{dy}{dt}, \frac{1}{p}\frac{dx}{dt}$, so folgt:

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2 x}{dt^2} = -p^3\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right\}.$$

Da $p > 0$, ist:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = p\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2},$$

wir haben also das Ergebnis:

$$\varrho = -\frac{\left\{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\right\}^3}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}.$$

Bei positivem ϱ liegt der Krümmungsmittelpunkt auf derjenigen Seite der Kurve, für die $f(x, y)$ positiv ist, bei negativem ϱ auf der anderen Seite, so daß z. B. der Krümmungshalbmesser des durch die Gleichung:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

dargestellten Kreises gleich -1 ist.

Wir können den Ausdruck für ϱ auch auf folgende Weise finden. Die Gleichungen der zu einem Kurvenpunkt (x, y) gehörenden Normalen sind:

$$x' = x + \frac{h}{w}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y' = y + \frac{h}{w}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Die Gleichungen einer benachbarten Normalen sind:

$$x'' = x + \Delta x + h'\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w} + \Delta\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w}\right), \quad y'' = y + \Delta y + h'\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w} + \Delta\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w}\right).$$

Die zum Schnittpunkt beider Normalen gehörenden Werte von h und h' befriedigen die Gleichungen: $x' = x''$, $y' = y''$, oder:

$$h\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w} = \Delta x + h'\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w} + \Delta\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w}\right),$$

$$h\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w} = \Delta y + h'\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w} + \Delta\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w}\right),$$

d. h.:

$$h = \frac{\Delta x\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w} + \Delta\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w}\right) - \Delta y\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w} + \Delta\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w}\right)}{\frac{1}{w}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\Delta\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w} - \frac{\partial f}{\partial y}\Delta\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w}\right\}}.$$

Nun ist:

$$\Delta x = p\frac{\partial f}{\partial y}\Delta t + \cdots, \quad \Delta y = -p\frac{\partial f}{\partial x}\Delta t + \cdots,$$

$$\Delta\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w} = \frac{1}{w}\left\{p\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} - p\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial x}\right\}\Delta t + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta\frac{1}{w},$$

$$\Delta\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w} = \frac{1}{w}\left\{p\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial y} - p\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right\}\Delta t + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta\frac{1}{w},$$

somit:

$$h = \frac{w\Delta t + \cdots}{\frac{1}{w^2}\left\{2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right\}\Delta t + \cdots},$$

und dies liefert beim Übergang zu $\Delta t = 0$ denselben Ausdruck für ϱ wie oben.

Wir haben bisher angenommen, daß der Kurvenpunkt (x, y) ein gewöhnlicher sei, daß also für ihn $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht zugleich verschwinden.

Ist der betrachtete Punkt ein außergewöhnlicher, so führt die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0$$

zur Bestimmung der Tangente, falls die zweiten partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ nicht sämtlich gleich Null sind. Läßt sich die linke Seite der vorstehenden Gleichung durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor in ein Quadrat verwandeln, so besitzt die Kurve an der betrachteten Stelle eine einzige Tangente, sonst sind zwei reelle Tangenten (Doppelpunkt) oder zwei imaginäre Tangenten (isolierter Punkt) vorhanden.

Eine weitere Durchführung dieser Methode liegt nicht in der Absicht dieser Zeilen. Sobald man für die Umgebung einer Stelle (x, y) zwei reelle, nach ganzen positiven Potenzen einer Veränderlichen t fortschreitende Reihen für $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ gefunden hat, welche die Gleichung $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$ befriedigen, kann man die in den vorigen Paragraphen entwickelten Methoden benutzen.

II. Einfach unendliche Schar ebener Kurven.

§ 15. Allgemeines.

Die Gesamtheit der Tangenten einer Kurve, ebenso die Gesamtheit der Normalen einer Kurve bildet eine Mannigfaltigkeit von Geraden, von denen jede einzelne bekannt ist, sobald man den Kurvenpunkt, zu dem sie gehört, gewählt hat. Die Gesamtheit der Krümmungskreise einer Kurve bildet eine Mannigfaltigkeit, in der jeder Einzelkreis durch seinen Berührungspunkt bestimmt wird. Man bezeichnet allgemein mit dem Worte einfach unendliche Kurvenschar eine solche Mannigfaltigkeit von Kurven, in der jede Einzelkurve von der Bestimmung einer stetigen Veränderlichen abhängt. Die letztere führt den Namen Parameter der Schar.

Die hauptsächlichsten Darstellungsarten einer einfach unendlichen Kurvenschar sind die folgenden.

1. Man betrachtet x und y als Funktionen der Veränderlichen t und des Parameters τ, so daß:

$$x = f_1(t, \tau), \quad y = f_2(t, \tau).$$

Hier darf die Determinante:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial \tau} - \frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial f_1}{\partial \tau}$$

nicht identisch verschwinden, da sonst zwischen x und y eine Gleichung bestände, und wir es mit einer einzigen Kurve, nicht mit einer Kurvenschar, zu tun hätten.

Die Funktionen f_1 und f_2 sollen innerhalb eines Wertbereichs der Veränderlichen t und τ als analytische Funktionen vorausgesetzt werden. Ein solcher Wertbereich wird dadurch festgelegt, daß der Parameter τ alle Werte zwischen zwei Grenzen etwa τ_0 und τ_1 durchläuft, während zu jedem dieser Werte von τ zwei Grenzen etwa $\varphi_0(\tau)$ und $\varphi_1(\tau)$ gehören, zwischen denen die Veränderliche t sich bewegt. Sind nun t und τ zwei Werte innerhalb dieses Wertbereichs, so sollen die Ausdrücke $f_1(t + \Delta t, \tau + \Delta \tau)$ und $f_2(t + \Delta t, \tau + \Delta \tau)$, falls man Δt und $\Delta \tau$ absolut genommen hinreichend klein wählt, nach ganzen positiven Potenzen von Δt und $\Delta \tau$ entwickelbar sein.

Die gegebene Kurvenschar wird auch Kurvenschar $\tau = \text{const.}$ genannt. Fassen wir in den Gleichungen $x = f_1(t, \tau)$, $y = f_2(t, \tau)$ die Veränderliche t als Parameter auf, so stellen sie eine zweite einfach unendliche Kurvenschar dar, bei der sich längs jeder Einzelkurve die Zahl τ ändert, während t festbleibt. Diese Schar heißt dann im Gegensatz zur Vorigen die Kurvenschar $t = \text{const.}$

Man darf sich hier nicht die Vorstellung bilden, daß die Schar $t = \text{const.}$ aus anderen Kurven bestehen müsse, wie die Schar $\tau = \text{const.}$ Es sei z. B. eine Kurve durch die Gleichungen:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t)$$

gegeben. Der Ort der Mittelpunkte aller Sehnen der Kurve, die durch den Punkt (t_0) gehen, wird bestimmt durch die Gleichungen:

$$x = \frac{1}{2}\left(f_1(t_0) + f_1(\tau)\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(f_2(t_0) + f_2(\tau)\right).$$

Die sämtlichen Sehnenmittelpunktskurven werden daher dargestellt durch die Beziehungen:

$$x = \frac{1}{2}\left(f_1(t) + f_1(\tau)\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(f_2(t) + f_2(\tau)\right).$$

Jede Kurve $\tau = \text{const.}$ fällt mit einer Kurve $t = \text{const.}$ zusammen und zwar mit der, für die t denselben Wert besitzt wie τ. Sind t_1 und t_2 zwei voneinander verschiedene Zahlen innerhalb des Wertbereichs von t, denen auf der gegebenen Kurve zwei nicht einander parallele Tangenten entsprechen, so schneiden sich die Kurven $t = t_1$, $\tau = t_2$ im Punkte mit den Koordinaten:

$$x = \frac{1}{2}\left(f_1(t_1) + f_1(t_2)\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(f_2(t_1) + f_2(t_2)\right)$$

und zwar unter demselben Winkel, den die beiden Tangenten miteinander bilden; sie berühren sich, wenn den Werten t_1 und t_2 von

t auf der ursprünglichen Kurve parallele Tangenten entsprechen. Ein leicht zu behandelndes Beispiel bieten hier die Sehnenmittelpunktskurven einer Ellipse dar.

Die oben angeführte Determinante:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial \tau}-\frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial f_1}{\partial \tau}$$

kann sowohl in einzelnen Punkten als auch längs einer Kurve verschwinden. Ist sie für das Wertsystem $t = t'$, $\tau = \tau'$ gleich Null, so ist der entsprechende Punkt entweder ein außergewöhnlicher Punkt der Kurve $\tau = \tau'$ $\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0 \text{ für } t = t',\ \tau = \tau'\right)$, oder er ist ein außergewöhnlicher Punkt der Kurve $t = t'$ $\left(\frac{\partial f_1}{\partial \tau} = 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial \tau} = 0 \text{ für } t = t',\ \tau = \tau'\right)$, oder endlich, die Kurven $t = t'$, $\tau = \tau'$ berühren sich in dem fraglichen Punkt.

2. Man kann eine einfach unendliche Kurvenschar durch eine einzige Gleichung von der Form $f(x, y, \tau) = 0$ darstellen, die außer x und y noch den Parameter τ der Schar enthält. Hier soll sowohl vorausgesetzt werden, daß die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial \tau}$ nicht für jedes der Gleichung $f = 0$ genügende Wertsystem x, y, τ verschwinden, als auch, daß der Ausdruck $f(x + \Delta x, y + \Delta y, \tau + \Delta \tau)$ im allgemeinen nach ganzen positiven Potenzen von $\Delta x, \Delta y, \Delta \tau$ entwickelbar ist.

Die außergewöhnlichen Punkte der Einzelkurven, für die, wie wir festsetzten, $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ zugleich verschwinden, können vereinzelt auftreten, oder eine Kurve bilden.

§ 16. Berührungskurve und Einhüllende einer durch eine Gleichung von der Form $f(x, y, \tau) = 0$ dargestellten einfach unendlichen Kurvenschar.

Sind einfach unendlich viele Kurven in einer Ebene gegeben, so kann man fragen, ob es eine Kurve gibt, die jede Einzelkurve der Schar berührt. Beispiele für ein solches Vorkommnis haben wir bereits kennen gelernt. Jede Kurve berührt ihre sämtlichen Tangenten und ihre sämtlichen Krümmungskreise. Die Normalen einer Kurve berühren die Krümmungsmittelpunktskurve derselben. Wir behandeln die sich auf eine Berührungskurve beziehenden Fragen zuerst unter der Voraussetzung, daß die Kurvenschar durch eine Gleichung von der Form $f(x, y, \tau) = 0$ gegeben sei.

1. Erste Herleitung der Berührenden. Mit $g(x, y) = 0$ bezeichnen wir die Gleichung irgend einer Kurve, welche die Kurven $\tau = \text{const.}$ schneidet. Die Koordinaten der Schnittpunkte und damit

die Koordinaten der vorgelegten Kurve selbst lassen sich als Funktionen von τ betrachten, indem man sich x und y aus den Gleichungen $f(x, y, \tau) = 0$ und $g(x, y) = 0$ berechnet denkt. Dann folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0,$$

und:

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} = 0.$$

Der Punkt (x, y) sei ein gewöhnlicher Punkt sowohl der durch $g(x, y) = 0$ gegebenen Kurve, wie der durch ihn hindurchgehenden Kurve $\tau = \text{const.}$ Bildet die Tangente der ersteren den Winkel α, die Tangente der letzteren den Winkel α' mit der x-Achse, so ist:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} = \frac{\frac{dx}{d\tau}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}},$$

$$\sin\alpha = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} = \frac{\frac{dy}{d\tau}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}}.$$

$$\cos\alpha' = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad \sin\alpha' = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\sin(\alpha' - \alpha) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\tau}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}}$$

$$= \frac{\frac{\partial f}{\partial \tau}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}}.$$

Sollen sich an der betrachteten Stelle die durch $f(x, y, \tau) = 0$ und $g(x, y) = 0$ dargestellten Kurven berühren, so muß hiernach $\frac{\partial f}{\partial \tau}$ an der betrachteten Stelle verschwinden.

Als notwendige Bedingung für das Vorhandensein einer Berührungskurve ergibt sich somit die, daß aus den Gleichungen $f(x, y, \tau) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial \tau} = 0$ x und y als reelle Funktionen von τ berechnet werden können. Hinreichend ist diese Bedingung erst dann, wenn die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ nach Ersetzung von x und y durch die Lösungsfunktionen nicht zugleich identisch verschwinden. Sind die fraglichen

Ableitungen gleich Null, so ist eine besondere Untersuchung darüber anzustellen, ob die durch $f=0$ und $\frac{\partial f}{\partial \tau}=0$ festgelegte Kurve die Kurven $\tau=$ const. berührt oder nicht.

Wir wollen die gefundene Regel durch ein Beispiel erläutern.

Nehmen wir mit der x, y-Ebene eine Drehung von der Größe τ um den Punkt $x=x_0$, $y=y_0$ vor, so möge ein Punkt, der vor der Drehung die Koordinaten u, v besaß, nach der Drehung die Koordinaten x, y besitzen. Man hat dann:

$$u-x_0=(x-x_0)\cos\tau+(y-y_0)\sin\tau,$$
$$v-y_0=-(x-x_0)\sin\tau+(y-y_0)\cos\tau.$$

Die durch $v^2=u^3$ dargestellte Kurve besitzt im Punkte $u=1$, $v=-1$ eine Normale mit der Gleichung:

$$2(u-1)-3(v+1)=0.$$

Die Normale schneidet die y-Achse in dem Punkt mit den Koordinaten $u=0$, $v=-\frac{5}{3}$. Diesen Punkt nehmen wir zum Drehungsmittelpunkt, so daß: $x_0=0$, $y_0=-\frac{5}{3}$. Durch stetige Drehung der Ebene um diesen Punkt entsteht aus unserer Kurve eine einfach unendliche Kurvenschar mit der Gleichung:

$$f(x, y, \tau)\equiv\left(-\frac{5}{3}-x\sin\tau+\left(y+\frac{5}{3}\right)\cos\tau\right)^2$$
$$-\left(x\cos\tau+\left(y+\frac{5}{3}\right)\sin\tau\right)^3=0.$$

Man erhält:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}=\left(-x\cos\tau-\left(y+\frac{5}{3}\right)\sin\tau\right)\left\{2\left(-\frac{5}{3}-x\sin\tau+\left(y+\frac{5}{3}\right)\cos\tau\right)\right.$$
$$\left.+3\left(x\cos\tau+\left(y+\frac{5}{3}\right)\sin\tau\right)\left(-x\sin\tau+\left(y+\frac{5}{3}\right)\cos\tau\right)\right\}.$$

Während der Drehung beschreibt der Punkt $u=1$, $v=-1$ einen Kreis, für den:

$$1)\qquad x=\cos\tau-\frac{2}{3}\sin\tau,\quad y=-\frac{5}{3}+\sin\tau+\frac{2}{3}\cos\tau.$$

Diese Ausdrücke von x und y bringen den zweiten Faktor von $\frac{\partial f}{\partial \tau}$ zum Verschwinden und befriedigen die Gleichung $f=0$.

Der Punkt $u=0$, $v=0$ beschreibt während der Drehung einen Kreis, für den:

$$2)\qquad x=-\frac{5}{3}\sin\tau,\quad y=-\frac{5}{3}+\frac{5}{3}\cos\tau.$$

Diese Ausdrücke von x und y bringen beide Faktoren von $\frac{\partial f}{\partial \tau}$ zum Verschwinden und befriedigen ebenfalls die Gleichung $f = 0$.

Um zu entscheiden, ob in dem einen oder anderen Fall eine Berührungskurve vorliegt, bilden wir die partiellen Ableitungen von f nach x und y. Man erhält:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\left(-\frac{5}{3} - x \sin \tau + \left(y + \frac{5}{3}\right) \cos \tau\right)(-\sin \tau)$$
$$- 3\left(x \cos \tau + \left(y + \frac{5}{3}\right) \sin \tau\right)^2 \cos \tau,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\left(-\frac{5}{3} - x \sin \tau + \left(y + \frac{5}{3}\right) \cos \tau\right) \cos \tau$$
$$- 3\left(x \cos \tau + \left(y + \frac{5}{3}\right) \sin \tau\right)^2 \sin \tau.$$

Setzen wir hier für x und y die Ausdrücke aus den Gleichungen 1) ein, so kommt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \sin \tau - 3 \cos \tau, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2 \cos \tau - 3 \sin \tau.$$

Diese Ausdrücke sind nicht gleichzeitig Null und zeigen, daß der durch die Gleichungen 1) dargestellte Kreis die Kurven der Schar berührt.

Setzen wir für x und y die Ausdrücke aus den Gleichungen 2) ein, so verschwinden $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ identisch. Es sind daher die zweiten Ableitungen zu bilden. Man erhält:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \sin^2 \tau - 6\left(x \cos \tau + \left(y + \frac{5}{3}\right) \sin \tau\right) \cos^2 \tau,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 \sin \tau \cos \tau - 6\left(x \cos \tau + \left(y + \frac{5}{3}\right) \sin \tau\right) \sin \tau \cos \tau,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \cos^2 \tau - 6\left(x \cos \tau + \left(y + \frac{5}{3}\right) \sin \tau\right) \sin^2 \tau.$$

Ersetzt man hier x und y durch ihre Ausdrücke aus den Gleichungen 2), so kommt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \sin^2 \tau, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 \sin \tau \cos \tau, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \cos^2 \tau.$$

Für den Winkel α', den die Tangente der Kurve $\tau = \text{const.}$ im betrachteten Punkt mit der x-Achse bildet, haben wir die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \alpha' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \alpha' \sin \alpha' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \alpha' = 0,$$

d. h. hier:

$$\sin(\tau - \alpha') = 0.$$

Für den Winkel α, den die Tangente des durch die Gleichungen 2) dargestellten Kreises mit der x-Achse bildet, erhält man:

$$\cos\alpha = -\cos\tau, \quad \sin\alpha = -\sin\tau,$$

so daß auch:

$$\sin(\tau - \alpha) = 0,$$

und:

$$\sin(\alpha - \alpha') = 0.$$

Dies zeigt, daß auch der vom Punkt $u = 0$, $v = 0$ beschriebene Kreis eine Berührungskurve ist.

Dasselbe Ergebnis findet sich, wenn man die x, y-Ebene um einen beliebigen Punkt der y-Achse, mit Ausnahme des Koordinatenanfangspunkts, dreht, oder wenn man sie in sich längs der x-Achse parallel verschiebt.

Wir drehen jetzt die x, y-Ebene um einen beliebigen, aber nicht mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfallenden, Punkt der x-Achse. Dadurch entsteht eine Schar mit der Gleichung:

$$f \equiv \{(x - x_0)\sin\tau - y\cos\tau\}^2 - (x_0 + (x - x_0)\cos\tau + y\sin\tau)^3 = 0.$$

Man erhält:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \Big\{(x - x_0)\sin\tau - y\cos\tau\Big\}\Big\{2\Big((x - x_0)\cos\tau + y\sin\tau\Big)$$
$$+ 3\Big(x_0 + (x - x_0)\cos\tau + y\sin\tau\Big)^2\Big\}.$$

Die Ausdrücke $x = x_0(1 - \cos\tau)$, $y = -x_0\sin\tau$ befriedigen die Gleichungen $f = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial \tau} = 0$, und bestimmen den Kreis, den der Koordinatenanfangspunkt während der Drehung beschreibt. Aber die Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\{(x - x_0)\sin\tau - y\cos\tau\}\sin\tau - 3\{x_0 + (x - x_0)\cos\tau + y\sin\tau\}^2\cos\tau,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\{(x - x_0)\sin\tau - y\cos\tau\}(-\cos\tau) - 3\{x_0 + (x - x_0)\cos\tau + y\sin\tau\}^2\sin\tau$$

verschwinden für $x - x_0 = -x_0\cos\tau$, $y = -x_0\sin\tau$.

Durch Berechnung der zweiten Ableitungen ergibt sich wie vorhin:

$$\sin(\tau - \alpha') = 0.$$

Der Winkel α, den die Tangente des Kreises mit der x-Achse bildet, wird hier bestimmt durch:

$$\cos\alpha = \sin\tau, \quad \sin\alpha = -\cos\tau,$$

somit:

$$\cos(\alpha' - \alpha) = 0.$$

Der fragliche Kreis ist daher keine Berührungskurve, sondern er trifft die Einzelkurven der Schar unter rechten Winkeln.

Im ersten der betrachteten Fälle besteht die Berührende aus gewöhnlichen Punkten der Einzelkurven der Schar, im zweiten und dritten Fall ist sie der Ort der Spitzen der Einzelkurven. Der Ort der singulären Punkte der Einzelkurven kann eine Berührende sein oder nicht.

2. Zweite Herleitung der Berührenden. Man gelangt zu der Berührungskurve einer Kurvenschar auch auf folgende Weise:

Die Koordinaten eines Schnittpunkts der beiden, zu den Werten τ und $\tau + \Delta\tau$ des Parameters gehörenden, Einzelkurven der Schar genügen den Gleichungen:

$$f(x, y, \tau) = 0, \quad f(x, y, \tau + \Delta\tau) = 0.$$

An Stelle der letzteren Gleichung können wir schreiben:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}\Delta\tau + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial \tau^3}\Delta\tau^2 + \cdots = 0.$$

Gehen wir mit $\Delta\tau$ zur Grenze Null über, so genügen die Koordinaten der Grenzlage der Schnittpunkte den Gleichungen:

$$f = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0,$$

und das sind die notwendigen Bedingungen für eine Berührungskurve.

Jedoch ist hier zu bemerken, daß unter der Voraussetzung eines von Null verschiedenen $\Delta\tau$ die Koordinaten der Schnittpunkte imaginäre Werte besitzen können, die sich für $\Delta\tau = 0$ in reelle Werte umwandeln. In einem solchen Falle kann man geometrisch die Berührungskurve nicht als Ort der Grenzlagen von Schnittpunkten benachbarter Einzelkurven der Schar auffassen.

Nehmen wir z. B. die durch die Gleichung:

$$y^2 - (x - \tau)^3 = 0$$

dargestellte Kurvenschar. Man genügt dieser Gleichung und der Gleichung:

$$y^2 - (x - \tau - \Delta\tau)^3 = 0$$

durch die Ausdrücke:

$$x = \tau + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{12}}\right)\Delta\tau, \quad y = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{12}}\right)^3 \Delta\tau^3}.$$

Die Schnittpunkte sind also für ein von Null verschiedenes $\Delta\tau$ imaginär, ihre Grenzlagen bei $\Delta\tau = 0$ aber sind reell und fallen in die x-Achse.

3. Berührende und Einhüllende. An Stelle des Wortes „Berührungskurve oder Berührende“ ist auch das Wort „Einhüllende“ in Gebrauch. Diese, das französische Wort „enveloppe“ verdeutschende, Bezeichnung ist aber nicht ohne weiteres gerechtfertigt. Nehmen wir nämlich an, wir hätten aus den Gleichungen $f = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial \tau} = 0$

die Zahlen x und y als Funktionen von τ bestimmt, die sich im Intervall $\tau_0 \ldots \tau_1$ regulär verhalten. Diesem Intervalle entspreche ein Kurvenzug, der das Stück AB enthalte. Da sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Erstens. Das Stück AB läßt sich so wählen, daß in allen seinen Punkten ein Berühren ohne Schneiden stattfindet. Alsdann kann man um jeden Berührungspunkt (etwa P Fig. 14) auf der berührten Einzelkurve der Schar ein Bogenstück (etwa $P'PP''$) abgrenzen derart, daß das ganze Stück auf ein und derselben Seite der Berührenden liegt. Die Voraussetzung, nach der die Kurven der Schar stetig aufeinander folgen sollen, bedingt, daß alle derartigen Bogenstücke auf derselben Seite der Berührenden liegen. Jetzt hat der Kurvenzug AB die Eigenart einer Grenze des von den fraglichen Bogenstücken ausgefüllten Ebenenteils, und die Bezeichnung „Einhüllende" für die Berührende ist gerechtfertigt.

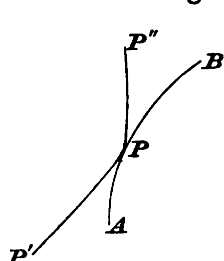


Fig. 14.

Zweitens. Das Stück AB läßt sich so wählen, daß in allen seinen Punkten ein Berühren mit Schneiden stattfindet. Jetzt tritt jede berührte Kurve im Berührungspunkte von der einen Seite der Berührenden auf die andere über, und von einem „Einhüllen" durch die Berührende ist keine Rede mehr.

Ein Mittel, um zu entscheiden, ob eine Berührungskurve, die nur gewöhnliche Punkte der Einzelkurven einer Kurvenschar enthält, eine Einhüllende ist oder nicht, liefert der folgende Satz:

Besitzen die Gleichungen $f(x, y, \tau) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \tau} = 0$ die reelle Lösung:

$$x = g_1(\tau), \quad y = g_2(\tau),$$

für welche $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht zugleich identisch verschwinden, so bilde man die Ausdrücke $\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial \tau^3} \ldots$ und setze in ihnen statt x und y die Funktionen $g_1(\tau)$ und $g_2(\tau)$ ein. Ist $\left(\frac{\partial^\nu f}{\partial \tau^\nu}\right)_{(x=g_1(\tau),\ y=g_2(\tau))}$ der erste nicht identisch verschwindende Ausdruck, so hat die Berührende die Eigenart einer Einhüllenden, wenn ν gerade ist, sonst nicht.

Zum Beweise betrachten wir einen gewöhnlichen Punkt (x, y) der zu τ gehörenden Einzelkurve. Die zu ihm gehörende Kurvennormale hat die Gleichungen:

$$\xi = x + h \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w}, \quad \eta = y + h \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w},$$

wo:

$$w = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

Der dem Schnittpunkt der Normalen mit der zu $\tau + \Delta\tau$ gehörenden Einzelkurve entsprechende Wert von h genügt der Gleichung:

$$f\left(x + h\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w},\ y + h\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w},\ \tau + \Delta\tau\right) = 0,$$

oder:

$$hw + \frac{\partial f}{\partial \tau}\Delta\tau + \cdots \quad = 0.$$

Ist $\frac{\partial^\nu f}{\partial \tau^\nu}$ die erste an der betrachteten Stelle nicht verschwindende Ableitung von f nach τ, so ergibt sich:

$$h = -\frac{1}{\nu!\,w}\frac{\partial^\nu f}{\partial \tau^\nu}\Delta\tau^\nu + \cdots,$$

d. h. die Zahl h besitzt für absolut genommen hinreichend kleine Werte von $\Delta\tau$ ein und dasselbe Vorzeichen, wenn ν gerade ist, sonst wechselt h sein Vorzeichen mit dem von $\Delta\tau$. Im ersten Fall wird die Normale der Einzelkurve von ihren benachbarten Kurven auf ein und derselben Seite der Kurve geschnitten, im zweiten Fall auf beiden Seiten. Findet der erste Fall längs eines Kurvenstücks statt, so hat dasselbe die Eigenart der Einhüllenden, sonst nicht.

4. Beispiele. a) Von den drei oben betrachteten Fällen ist nur der erste als Beispiel für unseren Satz brauchbar, da in dem zweiten und dritten Fall $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ nach Ersetzen von x und y durch $g_1(\tau)$ und $g_2(\tau)$ identisch verschwinden. Im ersten Fall erhält man:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}\right)_{x=g_1(\tau),\ y=g_2(\tau)} = \frac{11}{8}.$$

Die Berührende ist somit eine Einhüllende.

b) Nehmen wir die Kurvenschar mit der Gleichung:

$$y - (x - \tau)^3 = 0.$$

Hier wird

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = 3(x - \tau)^2,$$

somit:

$$g_1(\tau) = \tau,\quad g_2(\tau) = 0.$$

Man findet:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}\right)_{x=g_1(\tau),\ y=g_2(\tau)} = 0,\quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \tau^3}\right)_{x=g_1(\tau),\ y=g_2(\tau)} = 6.$$

Die Berührende ist daher keine Einhüllende; ihre Tangente, d. h. die Berührende selbst ist stets Wendetangente für die berührten Kurven.

c) Eine einfach unendliche Schar von Geraden, deren Einzelkurven weder einander parallel sind, noch ein und

denselben Punkt gemein haben, besitzt stets eine Einhüllende.

Die Schar sei gegeben durch die Gleichung:

$$f = x\varphi_1(\tau) + y\varphi_2(\tau) + \varphi_3(\tau) = 0.$$

Aus ihr und der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial \tau} = 0$ lassen sich x und y berechnen, falls die Determinante: $\varphi_1(\tau)\varphi_2'(\tau) - \varphi_2(\tau)\varphi_1'(\tau)$ von Null verschieden ist. Diese Determinante verschwindet, wenn $\varphi_1(\tau) = 0$, oder wenn $\varphi_2(\tau) = 0$, oder endlich, wenn $\varphi_2(\tau)$ nur durch einen konstanten Faktor von $\varphi_1(\tau)$ verschieden ist, d. h. die Determinante verschwindet, wenn die Geraden der Schar einander parallel liegen.

Bei Ausschluß dieses Falles findet man:

$$g_1(\tau) = \frac{-\varphi_2'\varphi_3 + \varphi_2\varphi_3'}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'}, \quad g_2(\tau) = \frac{\varphi_1'\varphi_3 - \varphi_1\varphi_3'}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'}.$$

Angenommen $g_1(\tau)$ wäre gleich der Konstanten a. Dann bestände die Gleichung:

$$\varphi_2'(a\varphi_1 + \varphi_3) - \varphi_2(a\varphi_1' + \varphi_3') = 0,$$

d. h. entweder:

$$a\varphi_1 + \varphi_3 = 0,$$

oder:

$$\varphi_2 = b(a\varphi_1 + \varphi_3),$$

wo b konstant. In beiden Fällen erweist sich $g_2(\tau)$ als konstant.

Ebenso zeigt man, daß bei konstantem $g_2(\tau)$ auch $g_1(\tau)$ konstant ist. Hier haben die Geraden der Schar sämtlich einen Punkt gemein, sie bilden einen Büschel. Man kann die Bedingung dafür, daß kein Büschel vorliegt, in der Form schreiben:

$$\varphi_1''(\varphi_2\varphi_3' - \varphi_3\varphi_2') + \varphi_2''(\varphi_3\varphi_1' - \varphi_1\varphi_3') + \varphi_3''(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1') \gtrless 0,$$

die nichts anderes bedeutet, als $g_1'(\tau) \gtrless 0$.

Man erhält weiter:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}\right)_{x=g_1,\, y=g_2} = \varphi_1''\frac{\varphi_2\varphi_3' - \varphi_3\varphi_2'}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'} + \varphi_2''\frac{\varphi_3\varphi_1' - \varphi_1\varphi_3'}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'} + \varphi_3''.$$

Da dieser Ausdruck von Null verschieden ist, besitzt die Geradenschar eine Einhüllende.

Um ein Beispiel zu behandeln, betrachten wir die Brennlinien durch Zurückwerfung bei parallel einfallendem Licht.

Wir denken uns lauter parallele Halbgerade von den Punkten einer Kurve ausgehend, die mit der positiven x-Achse den Winkel β bilden mögen, und setzen:

$$X_0 = \cos\beta, \quad Y_0 = \sin\beta;$$

ferner beschränken wir uns zunächst auf ein solches Kurvenstück $\left(x = f_1(t),\ y = f_2(t)\right)$, in dem an keiner Stelle $f_1'(t)$ und $f_2'(t)$ gleichzeitig verschwinden und auch $f_1'(t)f_2''(t) - f_2'(t)f_1''(t)$ nicht verschwindet.

Die positive Halbnormale der Kurve im Punkte (x, y) hat die Richtungskosinus:

$$X = -\sin\alpha, \quad Y = \cos\alpha,$$

sie bilde mit der Halbgeraden (X_0, Y_0) den Winkel ϑ.

Die Richtungskosinus einer Halbgeraden, die mit der positiven Halbnormalen den Winkel ϑ, mit der Halbgeraden (X_0, Y_0) den Winkel 2ϑ bildet, also des zurückgeworfenen Strahles, sind:

$$X' = -X_0 - 2\cos\vartheta\sin\alpha = -X_0\cos 2\alpha - Y_0\sin 2\alpha,$$
$$Y' = -Y_0 + 2\cos\vartheta\cos\alpha = -X_0\sin 2\alpha + Y_0\cos 2\alpha.$$

Unsere Aufgabe soll es sein, die Einhüllende der Halbgeraden (X', Y') d. h. die Brennlinie zu finden.

Für den Schnittpunkt der zu den Werten s und $s + \Delta s$ der Bogenlänge der gegebenen Kurve gehörenden Geraden (X', Y') und $(X' + \Delta X', Y' + \Delta Y')$ haben wir:

$$hX' = \Delta x + l(X' + \Delta X'), \quad hY' = \Delta y + l(Y' + \Delta Y'),$$

somit:

$$h = \frac{\Delta x(Y' + \Delta Y') - \Delta y(X' + \Delta Y')}{X'\Delta Y' - Y'\Delta X'}.$$

Da:

$$\frac{dX'}{ds} = -\frac{2Y'}{\varrho}, \quad \frac{dY'}{ds} = \frac{2X'}{\varrho},$$

so folgt beim Übergang zu $\Delta s = 0$ die grundlegende Beziehung:

$$h = \frac{\varrho}{2}\cos\vartheta.$$

Die Halbgeraden (X', Y') besitzen eine Einhüllende, wenn $h > 0$; bei $h < 0$ besitzen die Halbgeraden $(-X', -Y')$ eine Einhüllende.

Wir haben jetzt zu untersuchen, wie sich die Zahl h bei der Annäherung an eine außergewöhnliche Stelle der Abbildung der reflektierenden Kurve auf die t-Gerade verhält.

Der gefundene Wert von h läßt sich so schreiben:

$$\frac{1}{2}\frac{\left(f_1'(t)Y_0 - f_2'(t)X_0\right)\left(f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2\right)}{f_1'(t)f_2''(t) - f_2'(t)f_1''(t)}.$$

Da sich in einer hinreichend kleinen Umgebung einer außergewöhnlichen Stelle nur gewöhnliche Punkte befinden, ist:

$$h(t + \Delta t) = \frac{1}{2}\frac{\left(f_1'(t+\Delta t)Y_0 - f_2'(t+\Delta t)X_0\right)\left(f_1'(t+\Delta t)^2 + f_2'(t+\Delta t)^2\right)}{f_1'(t+\Delta t)f_2''(t+\Delta t) - f_2'(t+\Delta t)f_1''(t+\Delta t)}.$$

Bei der Entwicklung des rechts stehenden Ausdrucks nach Potenzen von Δt sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erstens kann die Halbgerade (X_0, Y_0) die Kurve im Punkte (x, y) berühren.

Dann ist:

$$X_0 = \varepsilon \frac{f_1^{(\nu)}(t)}{w_\nu(t)}, \quad Y = \varepsilon \frac{f_2^{(\nu)}(t)}{w_\nu(t)},$$

wo ε entweder gleich 1, oder gleich -1 ausfällt.

Jetzt beginnt die Entwicklung des Ausdrucks:

$$f_1'(t+\Delta t)\,Y_0 - f_2'(t+\Delta t)\,X_0$$

mit dem Gliede:

$$\frac{\varepsilon}{(\nu+\lambda-1)!\,w_\nu}\left\{f_1^{(\nu+\lambda)}(t)f_2^{(\nu)}(t) - f_2^{(\nu+\lambda)}(t)f_1^{(\nu)}(t)\right\}\Delta t^{\nu+\lambda-1}.$$

Der Ausdruck:

$$f_1'(t+\Delta t)^2 + f_2'(t+\Delta t)^2$$

beginnt mit dem Gliede:

$$\left(\frac{1}{(\nu-1)!}\right)^2 w_\nu^2 \Delta t^{2\nu-2},$$

der Ausdruck:

$$f_1'(t+\Delta t)f_2''(t+\Delta t) - f_2'(t+\Delta t)f_1''(t+\Delta t)$$

beginnt mit dem Gliede (§ 1, S. 8):

$$\frac{\lambda}{(\nu-1)!\,(\nu+\lambda-1)!}\left(f_1^{(\nu)}(t)f_2^{(\nu+\lambda)}(t) - f_2^{(\nu)}(t)f_1^{(\nu+\lambda)}(t)\right)\Delta t^{2\nu+\lambda-3},$$

der ganze Ausdruck beginnt also mit einem Gliede, das den Faktor Δt^ν enthält; es ist somit $\lim\limits_{(\Delta t=0)} h(t+\Delta t)$ gleich Null, und die reflektierende Kurve wird an einer Stelle, die von dem einfallenden Strahl berührt wird, von der Brennlinie berührt.

Zweitens kann der einfallende Strahl die reflektierende Kurve an der betrachteten Stelle nicht berühren, so daß:

$$f_1^{(\nu)}(t)\,Y_0 - f_2^{(\nu)}(t)\,X_0$$

von Null verschieden ist. Jetzt beginnt die Entwicklung des Zählers mit $\Delta t^{3\nu-3}$, somit die Entwicklung des ganzen Ausdrucks mit $\Delta t^{\nu-\lambda}$. Der $\lim\limits_{(\Delta t=0)} h(t+\Delta t)$ ist Null, oder endlich und von Null verschieden, oder unendlich, je nachdem ϱ gleich Null, oder von Null verschieden und endlich, oder unendlich groß ausfällt.

Um einen berühmten Satz über Brennlinien (vgl. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. 1898. S. 143) zu beweisen, setzen wir die Koordinaten der Brennlinie in die Form:

$$\xi = x + hX', \quad \eta = y + hY'.$$

Dann folgt:

$$\frac{d\xi}{ds} = \cos\alpha + \frac{dh}{ds}X' - \cos\vartheta\, Y', \quad \frac{d\eta}{ds} = \sin\alpha + \frac{dh}{ds}\, Y' + \cos\vartheta\, X'.$$

Man findet durch eine einfache Rechnung:

$$\cos\alpha - \cos\vartheta\, Y' = -X'(X_0\cos\alpha + Y_0\sin\alpha),$$
$$\sin\alpha + \cos\vartheta\, X' = -Y'(X_0\cos\alpha + Y_0\sin\alpha).$$

Der Ausdruck $-X_0\cos\alpha - Y_0\sin\alpha$ ist offenbar die Ableitung des Ausdrucks $-xX_0 - yY_0 + \text{const.}$ nach s. Um die geometrische Bedeutung des letzten Ausdrucks zu finden, bezeichnen wir mit x_0, y_0 die Koordinaten eines Punktes P_0, in dem die reflektierende Kurve von dem einfallenden Strahl berührt wird. (Fig. 15.) Nach dem Obigen liegt dieser Punkt zugleich auf der Brennlinie. Für ihn ist $\cos\alpha = -X_0$, $\sin\alpha = -Y_0$. Die Gleichungen der Normale in diesem Punkt sind:

$$x' = x_0 + lY_0, \quad y' = y_0 - lX_0.$$

Für den Schnittpunkt der Normalen mit dem auf sie von dem Punkte $P(x, y)$ aus gefällten Lot PA erhalten wir:

$$x_0 + lY_0 = x + l_1X_0, \quad y_0 - lX_0 = y + l_1Y_0,$$

d. h.:

$$l_1 = (x_0 - x)X_0 + (y_0 - y)Y_0,$$

somit:

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{d(l_1 + h)}{ds}X', \quad \frac{d\eta}{ds} = \frac{d(l_1 + h)}{ds}Y'.$$

Sowohl h wie l_1 wächst mit wachsendem s. Rechnen wir daher die Bogenlänge σ der Brennlinie vom Punkte P_0 aus als mit wachsendem s ebenfalls wachsend, so ergibt sich:

$$\sigma = h + l_1,$$

d. h. die Bogenlänge P_0Q der Brennlinie ist gleich der Summe der beiden Strecken PA und PQ.

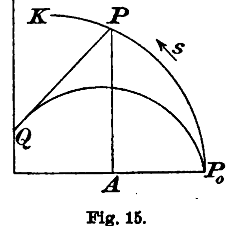


Fig. 15.

d) Wenn eine einfach unendliche Kreisschar eine Berührende besitzt, so ist die Berührende zugleich eine Einhüllende, falls die Kreise der Schar nicht aus den Krümmungskreisen einer Kurve bestehen.

Wir nehmen die Gleichung einer Kreisschar in der Form:

$$\left(x - \varphi_1(\tau)\right)^2 + \left(y - \varphi_2(\tau)\right)^2 - \varphi(\tau)^2 = 0,$$

so daß:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \tau} = (x - \varphi_1)\varphi_1' + (y - \varphi_2)\varphi_2' + \varphi\varphi'.$$

Damit sich x und y aus den Gleichungen $f=0$ und $\frac{\partial f}{\partial \tau}=0$ berechnen lassen, dürfen $\varphi_1'(\tau)$ und $\varphi_2'(\tau)$ nicht zugleich verschwinden, d. h. es darf nicht eine Schar konzentrischer Kreise vorliegen. Um die Berechnung zu vereinfachen, verstehen wir unter τ die Bogenlänge der Mittelpunktskurve, so daß:

$$\varphi_1'(\tau)^2+\varphi_2'(\tau)^2=1.$$

Man erhält:

$$g_1(\tau)=\varphi_1-\varphi\varphi'\varphi_1'-\lambda\varphi_2', \quad g_2(\tau)=\varphi_2-\varphi\varphi'\varphi_2'+\lambda\varphi_1',$$

wo:

$$\lambda=\varepsilon\varphi\sqrt{1-\varphi'^2}, \quad \varepsilon=\pm 1.$$

Damit die Lösung reell sei, muß $\varphi'^2\leq 1$ sein.

Erstens: $\varphi'^2<1$. Man findet, wenn ϱ den Krümmungshalbmesser der Mittelpunktskurve bedeutet, bei Berücksichtigung der Formeln:

$$\varphi_1''=\frac{-\varphi_2'}{\varrho}, \quad \varphi_2''=\frac{\varphi_1'}{\varrho}$$

die Gleichungen:

$$g_1'(\tau)=(\varphi'\varphi_2'-\varepsilon\sqrt{1-\varphi'^2}\,\varphi_1')\left(-\varepsilon\sqrt{1-\varphi'^2}+\frac{\varphi}{\varrho}+\frac{\varepsilon\varphi\varphi''}{\sqrt{1-\varphi'^2}}\right),$$

$$g_2'(\tau)=-(\varphi'\varphi_1'+\varepsilon\sqrt{1-\varphi'^2}\,\varphi_2')\left(-\varepsilon\sqrt{1-\varphi'^2}+\frac{\varphi}{\varrho}+\frac{\varepsilon\varphi\varphi''}{\sqrt{1-\varphi'^2}}\right).$$

Wird der Ausdruck: $A=-\varepsilon\sqrt{1-\varphi'^2}+\frac{\varphi}{\varrho}+\frac{\varepsilon\varphi\varphi''}{\sqrt{1-\varphi'^2}}$ nur für einen der beiden Werte von ε gleich Null, so wird ein Teil der Berührenden durch einen Punkt vertreten. Verschwindet aber der fragliche Ausdruck für beide Werte von ε, so ist:

$$\frac{1}{\varrho}=0 \quad \text{und:} \quad -1+\varphi'^2+\varphi\varphi''=0.$$

Die erste dieser Beziehungen verrät, daß die Mittelpunktskurve eine Gerade ist. Wir dürfen daher $\varphi_1(\tau)=\tau$, $\varphi_2(\tau)=0$ gleich nehmen, d. h. die x-Achse in den Ort der Kreismittelpunkte legen.

Die zweite dieser Beziehungen ergibt:

$$\varphi^2=\tau^2+2\tau c_1+c^2,$$

also:

$$g_1(\tau)=-c_1, \quad g_2(\tau)=\varepsilon\sqrt{c^2-c_1^2},$$

wir haben es daher mit einer Schar von Kreisen zu tun, die entweder durch zwei feste Punkte gehen, oder eine Gerade in einem festen Punkt berühren.

Nun sei der Ausdruck A von Null verschieden, so daß eine Berührungskurve vorliegt. Man erhält:

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}\right)_{x=g_1,\, y=g_2}=\frac{\varepsilon\varphi}{\varrho}\sqrt{1-\varphi'^2}+\varphi\varphi''-1+\varphi'^2=\varepsilon\sqrt{1-\varphi'^2}\,A,$$

womit nach unserem Satz gezeigt ist, daß die Berührende zugleich eine Einhüllende darstellt.

Zweitens: $\varphi'^2 = 1$.

Wir erhalten hier entweder:

$$\varphi = \tau + c$$

und:

$$g_1(\tau) = \varphi_1 - (\tau + c)\varphi_1', \quad g_2(\tau) = \varphi_2 - (\tau + c)\varphi_2',$$

oder:

$$\varphi = -\tau + c$$

und

$$g_1(\tau) = \varphi_1 + (c - \tau)\varphi_1', \quad g_2(\tau) = \varphi_2 + (c - \tau)\varphi_2'.$$

Dies zeigt, daß die Kreise der Schar zugleich die Krümmungskreise der Berührenden sind, indem die letztere als eine Evolvente der Mittelpunktskurve der Kreise erscheint.

Man hat hier für $\varphi = \tau + c$:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \tau} = (x - \varphi_1)\varphi_1' + (y - \varphi_2)\varphi_2' + \tau + c,$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = (x - \varphi_1)\frac{-\varphi_2'}{\varrho} + (y - \varphi_2)\frac{\varphi_1'}{\varrho},$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial \tau^3} = (x - \varphi_1)\left\{\frac{-\varphi_1'}{\varrho^2} - \varphi_2'\frac{d\frac{1}{\varrho}}{d\tau}\right\} + (y - \varphi_2)\left\{\frac{-\varphi_2'}{\varrho^2} + \varphi_1'\frac{d\frac{1}{\varrho}}{d\tau}\right\},$$

somit:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}\right)_{x = g_1,\, y = g_2} = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \tau^3}\right)_{x = g_1,\, y = g_2} = -2\frac{\tau + c}{\varrho^2}.$$

Die Berührende ist hier keine Einhüllende, und dies steht im Einklang mit der früher erkannten Tatsache, daß eine Kurve von ihren Krümmungskreisen im allgemeinen geschnitten wird.

Wir haben oben gefunden, daß für das Vorhandensein einer Berührenden die Bedingung $\varphi'^2 \leqq 1$ notwendig ist. Es muß noch dargelegt werden, welche geometrische Bedeutung dieser Bedingung zukommt. Zu diesem Zweck fragen wir nach den Schnittpunkten eines Kreises der Schar mit seinen Nachbarkreisen.

Die Gleichung des zum Parameterwert τ gehörenden Kreises ist:

$$(x - \varphi_1)^2 + (y - \varphi_2)^2 - \varphi^2 = 0,$$

die eines benachbarten Kreises:

$$(x - \varphi_1 - \varDelta\varphi_1)^2 + (y - \varphi_2 - \varDelta\varphi_2)^2 - (\varphi + \varDelta\varphi)^2 = 0.$$

An Stelle der letzten Gleichung können wir die Gleichung der Potenzlinie beider Kreise setzen, nämlich:

$$(x - \varphi_1)\varDelta\varphi_1 + (y - \varphi_2)\varDelta\varphi_2 - p = 0,$$

wo:

$$p = \frac{1}{2}(\varDelta\varphi_1^2 + \varDelta\varphi_2^2 - 2\varphi\varDelta\varphi - \varDelta\varphi^2).$$

Wir lösen beide Gleichungen nach x und y auf durch die Beziehungen:

$$x - \varphi_1 = \frac{p\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_1^2 + \Delta\varphi_2^2} - \lambda\frac{\Delta\varphi_2}{\sqrt{\Delta\varphi_1^2 + \Delta\varphi_2^2}},$$

$$y - \varphi_2 = \frac{p\Delta\varphi_2}{\Delta\varphi_1^2 + \Delta\varphi_2^2} + \lambda\frac{\Delta\varphi_1}{\sqrt{\Delta\varphi_1^2 + \Delta\varphi_2^2}}.$$

Die Zahl λ bestimmt sich aus der ersten Gleichung durch:

$$\lambda^2 = \varphi^2 - \frac{p^2}{\Delta\varphi_1^2 + \Delta\varphi_2^2}.$$

Nun ist:

$$\frac{p^2}{\Delta\varphi_1^2 + \Delta\varphi_2^2} = \varphi^2\varphi'^2 + m\Delta\tau \ldots,$$

also:

$$\lambda^2 = \varphi^2(1 - \varphi'^2) + m\Delta\tau + \cdots$$

Wenn $\varphi'^2 > 1$, schneiden sich zwei benachbarte Kreise nicht, die Zahl λ ist imaginär und bleibt es für $\Delta\tau = 0$.

Wenn $\varphi'^2 < 1$, schneiden sich je zwei benachbarte Kreise, und die Grenzlage der Schnittpunkte wird von der Einhüllenden gebildet.

Wenn aber $\varphi'^2 = 1$, so ist eine genauere Untersuchung nötig.

Man hat:

$$\Delta\varphi_1 = \varphi_1'\Delta\tau - \frac{\varphi_2'}{2\varrho}\Delta\tau^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{-\varphi_1'}{\varrho^2} + \frac{\varphi_2'}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}\right)\Delta\tau^3 + \cdots,$$

$$\Delta\varphi_2 = \varphi_2'\Delta\tau + \frac{\varphi_1'}{2\varrho}\Delta\tau^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{-\varphi_2'}{\varrho^2} - \frac{\varphi_1'}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}\right)\Delta\tau^3 + \cdots,$$

daher:

$$\Delta\varphi_1^2 + \Delta\varphi_2^2 = \Delta\tau^2 - \frac{1}{12\varrho^2}\Delta\tau^4 + \cdots,$$

$$\frac{1}{\Delta\varphi_1^2 + \Delta\varphi_2^2} = \frac{1}{\Delta\tau^2}\cdot\left(1 + \frac{\Delta\tau^2}{12\varrho^2}\cdots\right).$$

Setzen wir, wie oben, $\varphi = \tau + c$, $\Delta\varphi = \Delta\tau$, so wird:

$$p = -\varphi\Delta\tau - \frac{\Delta\tau^4}{24\varrho^2}\cdots,$$

daher:

$$\frac{p^2}{\Delta\varphi_1^2 + \Delta\varphi_2^2} = \varphi^2 + \frac{\varphi^2}{12\varrho^2}\Delta\tau^2 + \cdots,$$

also:

$$\lambda^2 = -\frac{\varphi^2}{12\varrho^2}\Delta\tau^2 + \cdots$$

Die Zahl λ ist somit für ein absolut genommen hinreichend kleines, aber von Null verschiedenes, $\Delta\tau$ imaginär. Die Grenzlage der imaginären Schnittpunkte benachbarter Kreise bei $\Delta\tau = 0$ ist aber reell, und der Ort dieser Grenzlagen wird dargestellt durch die Gleichungen:

$$x = \varphi_1 - \varphi\varphi_1', \quad y = \varphi_2 - \varphi\varphi_2'.$$

5. Peanosche Sätze. G. Peano benutzt die Bezeichnung „Einhüllende" nur für die Grenzkurve reeller Schnittpunkte benachbarter

Einzelkurven der Schar, wie das aus der Behandlung des Beispiels $y-(x-\tau)^3=0$ hervorgeht. (Applicazioni Geometriche del Calcolo infinitesimale. Torino 1887 S. 312.) Wir finden a. a. O. S. 309 folgenden Satz: „Die Gleichungen $f=0$ und $\frac{\partial f}{\partial \tau}=0$ seien für $x=x_0$, $y=y_0$, $\tau=\tau_0$ erfüllt, und für dieses Wertsystem sei die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \tau} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \tau} \end{vmatrix} = \Delta$$

von Null verschieden. Dann ist der Punkt $(x_0 y_0)$ auf der Kurve $\tau=\tau_0$ ein Grenzpunkt für die Schnittpunkte dieser Kurve mit ihren benachbarten Kurven, und die Gleichungen $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial \tau}=0$ bestimmen x und y als Funktionen von τ."

Man kann beide Behauptungen, ohne von den Peanoschen Betrachtungen über Grenzlagen einer veränderlichen Figur Gebrauch zu machen, folgendermaßen erhärten, wobei unter $\left(\frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\mu_3} f(x,y,\tau)}{\partial x^{\mu_1} \partial y^{\mu_2} \partial \tau^{\mu_3}}\right)_0$ jedesmal die Zahl verstanden werde, die aus dem eingeklammerten Ausdruck durch Ersetzen von x, y, τ durch x_0, y_0, τ_0 hervorgeht.

Um die erste Behauptung zu beweisen, bezeichnen wir mit $x_0+\Delta x$, $y_0+\Delta y$ die Koordinaten eines Schnittpunkts der zu τ_0 und $\tau_0+\Delta\tau$ gehörenden Einzelkurven. Die Gleichungen:

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ \tau_0)=0, \quad f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ \tau_0+\Delta\tau)=0$$

liefern die Entwicklungen:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \Delta x^2 + \cdots = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \tau}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \tau}\right)_0 \Delta y + \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\partial^\nu f}{\partial \tau^\nu}\right)_0 \Delta\tau^{\nu-1} + \cdots = 0.$$

Hier ist vorausgesetzt, daß die erste für $x=x_0$, $y=y_0$, $\tau=\tau_0$ nicht verschwindende Ableitung von f nach τ die ν^{te} sei.

Aus den gefundenen Entwicklungen ergibt sich:

$$\Delta x = \frac{1}{\nu!\,\Delta_0}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial^\nu f}{\partial \tau^\nu}\right)_0 \Delta\tau^{\nu-1} + \cdots,$$

$$\Delta y = \frac{-1}{\nu!\,\Delta_0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial^\nu f}{\partial \tau^\nu}\right)_0 \Delta\tau^{\nu-1} + \cdots,$$

d. h. es gehört zu jedem, absolut genommen hinreichend kleinem, Wert von $\Delta\tau$ ein reelles Wertepaar Δx, Δy, und der Punkt (x_0, y_0) ist die Grenzlage reeller Schnittpunkte der Kurve $\tau=\tau_0$ mit ihren benachbarten Kurven.

Um die zweite Behauptung zu beweisen, suchen wir die Zahlen $\Delta' x, \Delta' y$ so als Funktionen von $\Delta\tau$ zu bestimmen, daß den Gleichungen:

$$f(x_0+\Delta' x, y_0+\Delta' y, \tau_0+\Delta\tau)=0 \text{ und } \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_{x=x_0+\Delta' x,\, y=y_0+\Delta' y,\, \tau=\tau_0+\Delta\tau}=0$$

genügt wird. Hier erhalten wir die Entwicklungen:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta' x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta' y + \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\partial^\nu f}{\partial \tau^\nu}\right)_0 \Delta\tau^\nu + \cdots = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \tau}\right)_0 \Delta' x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \tau}\right)_0 \Delta' y + \frac{1}{(\nu-1)!}\left(\frac{\partial^\nu f}{\partial \tau^\nu}\right)_0 \Delta\tau^{\nu-1} + \cdots = 0,$$

aus denen folgt:

$$\Delta' x = \frac{1}{(\nu-1)!\,\Delta_0}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial^\nu f}{\partial \tau^\nu}\right)_0 \Delta\tau^{\nu-1} + \cdots,$$

$$\Delta' y = \frac{-1}{(\nu-1)!\,\Delta_0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial^\nu f}{\partial \tau^\nu}\right)_0 \Delta\tau^{\nu-1} + \cdots$$

Hierdurch sind $\Delta' x$ und $\Delta' y$ als Funktionen von $\Delta\tau$ festgelegt.

Im allgemeinen d. h. nach Ausschluß getrennt liegender Punkte ist $\nu = 2$. Setzt man nämlich $x_0 + \Delta' x = x_0'$, $y_0 + \Delta' y = y_0'$, $\tau_0 + \Delta\tau = \tau_0'$ und berechnet die Determinante Δ für $x = x_0'$, $y = y_0'$, $\tau = \tau_0'$, so sieht man, daß $\Delta\tau$ absolut so klein genommen werden kann, daß Δ nicht verschwindet. Es bleibt also Δ längs eines Teiles der durch $f = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial \tau} = 0$ festgelegten Kurve von Null verschieden. Wäre nun beständig $\nu > 2$, so begännen die Entwicklungen von $\Delta' x$ und $\Delta' y$ für die Umgebung jedes Punktes dieses Teiles mit einer höheren als der ersten Potenz von $\Delta\tau$, die Berührende wäre ein Punkt und keine Kurve.

Im Anschluß hieran weisen wir nach, daß die Berührende unter den Voraussetzungen des Peanoschen Satzes eine Einhüllende ist, wobei wir statt x_0, y_0, τ_0 einfacher x, y, τ schreiben. Da, wie gezeigt, $\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}$ längs der Berührenden im allgemeinen von Null verschieden ist, haben wir die Entwicklungen:

$$\Delta' x = a_1 \Delta\tau + a_2 \Delta\tau^2 \ldots, \quad \Delta' y = b_1 \Delta\tau + b_2 \Delta\tau^2 + \cdots,$$

wo:

$$a_1 = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}, \quad b_1 = \frac{-1}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}.$$

Setzt man den Koeffizienten von $\Delta\tau^2$ in der ersten der für $\Delta' x$ und $\Delta' y$ geltenden Gleichungen, d. h. in:

$$f(x + a_1 \Delta\tau \ldots,\quad y + b_1 \Delta\tau \ldots,\quad \tau + \Delta\tau) = 0,$$

gleich Null, so folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}a_2 + \frac{\partial f}{\partial y}b_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}a_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}a_1 b_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}b_1^2$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \tau}a_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \tau}b_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = 0,$$

aber:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \tau}a_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \tau}b_1 = -\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2},$$

so daß:

$$\frac{\partial f}{\partial x}a_2 + \frac{\partial f}{\partial y}b_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}a_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}a_1 b_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}f_1^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}.$$

Hierdurch erhält man:

$$f(x + \Delta' x, y + \Delta' y, \tau) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}\Delta\tau^2 + \cdots,$$

d. h. die Funktion $f(x, y, \tau)$ ändert ihr Zeichen nicht, wenn man die Koordinaten solcher Punkte der Berührenden, die in hinreichender Nähe des Berührungspunkts liegen, in sie einsetzt. D. h. geometrisch: die Kurve $\tau = \text{const.}$ wird im Berührungspunkt von der Berührenden nicht geschnitten.

Für unseren Beweis ist es wesentlich, daß bei $x = x_0$, $y = y_0$, $\tau = \tau_0$ nicht sämtliche Ableitungen von f nach τ verschwinden; sonst werden $\Delta' x$ und $\Delta' y$ gleich Null, und von einer Berührenden kann keine Rede sein. Ein Beispiel für diesen Fall liefert die oben betrachtete Kreisschar mit der Gleichung:

$$f \equiv (x - \varphi_1)^2 + (y - \varphi_2)^2 - \varphi^2 = 0.$$

Hier erhält Δ für $x = g_1(\tau)$, $y = g_2(\tau)$ den Wert 4λ, der von Null verschieden ist, wenn die Kreisschar nicht aus den Krümmungskreisen einer Kurve besteht. Trotzdem kommt keine Berührende zutage, wenn die Kreise der Schar durch zwei feste Punkte gehen. Hier kann man, wie wir sahen:

$$f \equiv x^2 + y^2 - 2(x + c_1)\tau - c^2$$

setzen. Bei: $x = -c_1$ verschwindet $\frac{\partial f}{\partial \tau}$, und alle übrigen Ableitungen von f nach τ sind von selbst Null.

§ 17. Die Berührende und die Einhüllende einer durch zwei Gleichungen gegebenen Kurvenschar.

Wir untersuchen nun den Fall, in welchem eine einfach unendliche Kurvenschar $\tau = \text{const.}$ festgelegt ist durch zwei Gleichungen von der Form:

$$x = f_1(t, \tau), \quad y = f_2(t, \tau),$$

und betrachten ausschließlich gewöhnliche Punkte der Kurven $\tau = \text{const.}$, für die also $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ und $\frac{\partial f_2}{\partial t}$ nicht gleichzeitig verschwinden. Wir wollen

zunächst annehmen, daß die Schar $t =$ const. aus den senkrechten Durchdringungskurven der Schar $\tau =$ const. bestehe. Dies bedingt, daß

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_1}{\partial \tau} + \frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial \tau} = 0$$

sei, falls der zu (t, τ) gehörende Punkt ein gewöhnlicher Punkt der Kurve $t =$ const. ist. Ist er aber ein außergewöhnlicher Punkt dieser Kurve, und sind $\frac{\partial^\nu f_1}{\partial \tau^\nu}$, $\frac{\partial^\nu f_2}{\partial \tau^\nu}$ die ersten für ihn nicht zugleich verschwindenden Ableitungen von f_1 und f_2 nach τ, so muß die Beziehung:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial^\nu f_1}{\partial \tau^\nu} + \frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial^\nu f_2}{\partial \tau^\nu} = 0$$

bestehen. Die Annahme der Rechtwinkligkeit beider Scharen ist für den praktischen Gebrauch der zu entwickelnden Regeln ohne Einfluß, aber sie vereinfacht die zu führenden Beweise.

1. Ort der Grenzlagen der Schnittpunkte benachbarter Kurven. (Grenzkurve.) Wir suchen zunächst eine Bedingung für die Grenzlage der Schnittpunkte einer Einzelkurve $\tau =$ const. mit ihren benachbarten Kurven.

Ist der Punkt $x = f_1(t, \tau)$, $y = f_2(t, \tau)$ ein Schnittpunkt der zu den Werten τ und $\tau + \Delta\tau$ gehörenden Kurven, so möge er auf der letzteren dem Parameterwert $t + \Delta t$ entsprechen. Dann ist:

$$f_1(t, \tau) = f_1(t + \Delta t, \tau + \Delta\tau), \quad f_2(t, \tau) = f_2(t + \Delta t, \tau + \Delta\tau).$$

Die Werte von Δt und $\Delta\tau$ bestimmen sich hiernach aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f_1}{\partial \tau}\Delta\tau + \cdots = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f_2}{\partial \tau}\Delta\tau + \cdots = 0.$$

Angenommen $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ wäre nicht Null, und die erste nicht verschwindende Ableitung von f_1 nach τ wäre die n^{te}. Dann folgt:

$$\Delta t = -\frac{1}{n!\,\frac{\partial f_1}{\partial t}}\frac{\partial^n f_1}{\partial \tau^n}\Delta\tau^n + \cdots,$$

und die zweite der Bestimmungsgleichungen für Δt und $\Delta\tau$ liefert nach Fortheben des Faktors $\Delta\tau$:

$$-\frac{\frac{\partial f_2}{\partial t}}{n!\,\frac{\partial f_1}{\partial t}}\frac{\partial^n f_1}{\partial \tau^n}\Delta\tau^{n-1} + \frac{\partial f_2}{\partial \tau} + \cdots = 0.$$

Wenn diese Gleichung durch $\Delta\tau = 0$ befriedigt werden kann, ist der Punkt (t, τ) auf der Kurve $\tau =$ const. die Grenzlage der Schnitt-

punkte dieser Kurve mit ihren Nachbarkurven. In diesem Falle kann n zunächst nicht gleich eins sein. Wir hätten dann nämlich:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial \tau} - \frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial f_1}{\partial \tau} = 0,$$

und da, wie vorausgesetzt:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_1}{\partial \tau} + \frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial \tau} = 0,$$

so würde folgen:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \tau}\right)^2 = 0,$$

was mit der Annahme $n = 1$ unverträglich ist.

Wenn aber $n > 1$, so kann die fragliche Gleichung nur dann durch $\varDelta\tau = 0$ befriedigt werden, wenn $\frac{\partial f_2}{\partial \tau} = 0$.

Auf dieselbe Weise zeigt man, daß für $\frac{\partial f_2}{\partial t} \gtrless 0$ die ersten Ableitungen von f_1 und f_2 nach τ verschwinden müssen.

Damit also die Schnittpunkte der Einzelkurven unserer Schar mit ihren benachbarten Kurven Grenzlagen besitzen, die ihrerseits, wie wir sagen können, eine „Grenzkurve" festlegen, müssen die Gleichungen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \tau} = 0$$

durch ein und dieselbe Beziehung zwischen t und τ erfüllt werden.

2. Bedingung für die Einhüllende. Fragen wir jetzt nach der Bedingung für das Vorhandensein einer Einhüllenden.

Wenn:

$$E = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)^2,$$

so sind die Gleichungen der zum Punkt (t, τ) der Kurve $\tau = \text{const.}$ gehörenden Normale die folgenden:

$$x = f_1 - h\frac{\frac{\partial f_2}{\partial t}}{\sqrt{E}}, \quad y = f_2 + h\frac{\frac{\partial f_1}{\partial t}}{\sqrt{E}}.$$

Für den Schnittpunkt dieser Normalen mit der Kurve $\tau + \varDelta\tau = \text{const.}$ erhalten wir:

$$f_1 - h\frac{\frac{\partial f_2}{\partial t}}{\sqrt{E}} = f_1(t + \varDelta t,\ \tau + \varDelta\tau),$$

$$f_2 + h\frac{\frac{\partial f_1}{\partial t}}{\sqrt{E}} = f_2(t + \varDelta t,\ \tau + \varDelta\tau),$$

oder:

$$-h\frac{\frac{\partial f_2}{\partial t}}{\sqrt{E}} = \frac{\partial f_1}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f_1}{\partial \tau}\Delta\tau + \cdots,$$

$$h\frac{\frac{\partial f_1}{\partial t}}{\sqrt{E}} = \frac{\partial f_2}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f_2}{\partial \tau}\Delta\tau + \cdots$$

Dies liefert nach Elimination von h zur Bestimmung von Δt die Gleichung:

$$E\Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)\Delta t^2 + \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t\partial\tau}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial t\partial\tau}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)\Delta t\Delta\tau$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial \tau^2}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial \tau^2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)\Delta\tau^2 + \cdots = 0.$$

Ist μ der kleinste Wert von n, für den der Ausdruck:

$$F_n = \frac{\partial^n f_1}{\partial\tau^n}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial^n f_2}{\partial\tau^n}\frac{\partial f_2}{\partial t}$$

von Null verschieden ausfällt, so folgt:

$$\Delta t = -\frac{F_\mu}{\mu!\,E}\Delta\tau^\mu + \cdots$$

Für h ergibt sich die Gleichung:

$$h\sqrt{E} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial\tau} - \frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial f_1}{\partial\tau}\right)\Delta\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}\frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)\Delta t^2 + \cdots,$$

und nach Ersatz von Δt durch den gefundenen Ausdruck wird:

$$h\sqrt{E} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial\tau} - \frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial f_1}{\partial\tau}\right)\Delta\tau + \sum_{n=2}^{\mu}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial^n f_2}{\partial\tau^n} - \frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial^n f_1}{\partial\tau^n}\right)\Delta\tau^n + \cdots,$$

wo die μ ersten Glieder der Entwicklung hingeschrieben sind.

Wir setzen zur Abkürzung:

$$h\sqrt{E} = a_1\Delta\tau + a_2\Delta\tau^2 + \cdots$$

Zunächst kann man aus dieser Entwicklung die oben gefundenen Bedingungen für das Vorhandensein einer Grenzkurve herleiten. Soll nämlich der betrachtete Punkt ein Schnittpunkt der Kurven $\tau = \text{const.}$ und $\tau + \Delta\tau = \text{const.}$ sein, so muß h verschwinden, d. h. $\Delta\tau$ ist eine Wurzel der Gleichung:

$$a_1 + a_2\Delta\tau + \cdots = 0.$$

Der betrachtete Punkt bezeichnet eine Grenzlage der Schnittpunkte der Kurve $\tau = \text{const.}$ mit ihren Nachbarkurven, wenn die letzte Gleichung die Wurzel $\Delta\tau = 0$ besitzt, d. h. wenn $a_1 = 0$. Dann folgt aber, wie früher:

$$\frac{\partial f_1}{\partial\tau} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial\tau} = 0.$$

Damit der betrachtete Punkt einer Einhüllenden der Kurvenschar angehört, darf die durch ihn hindurchgehende Normale nur auf einer Seite der Kurve von den benachbarten Kurven geschnitten werden, d. h. die Entwicklung von h muß mit einer geraden Potenz von $\Delta\tau$ beginnen; also müssen jedenfalls die Ableitungen $\frac{\partial f_1}{\partial \tau}$ und $\frac{\partial f_2}{\partial \tau}$ verschwinden.

Sind wieder $\frac{\partial^\nu f_1}{\partial \tau^\nu}$ und $\frac{\partial^\nu f_2}{\partial \tau^\nu}$ die ersten nicht gleichzeitig verschwindenden partiellen Ableitungen von f_1 und f_2 nach τ, so besitzen die Ausdrücke $F_1, F_2 \ldots F_\nu$ den Wert Null, so daß μ größer wie ν ausfällt.

Aber a_ν ist von Null verschieden, da aus $F_\nu = 0$ und $a_\nu = 0$ entgegen unserer Voraussetzung sowohl $\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0$ wie $\frac{\partial f_2}{\partial t} = 0$ folgen würde; somit beginnt die Entwicklung von h mit der ν^{ten} Potenz von $\Delta\tau$, und wir haben es mit einer Einhüllenden zu tun, wenn ν gerade ist.

3. Wie kann man hier zeigen, daß die Grenzkurve die Einzelkurven der Schar berührt?

Wir haben zunächst eine Hilfsbetrachtung nötig.

Der Punkt (x, y) liege auf der Grenzkurve und sei ein gewöhnlicher Punkt einer Kurve $\tau = \text{const.}$ Wir legen durch diesen Punkt eine willkürlich gewählte Kurve mit der Gleichung $f(x, y) = 0$ und nehmen an, daß der Punkt für diese Kurve ebenfalls ein gewöhnlicher sei, so daß $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ für ihn nicht zugleich verschwinden. Liegt der Punkt $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ ebenfalls auf der gewählten Kurve, so haben wir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\Delta t \cdots + \frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu f_1}{\partial \tau^\nu}\Delta\tau^\nu \cdots\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\Delta t + \cdots + \frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu f_2}{\partial \tau^\nu}\Delta\tau^\nu \cdots\right) + \cdots = 0.$$

Diese Gleichung stellt die Beziehung zwischen Δt und $\Delta\tau$ beim Fortschreiten auf der gewählten Kurve dar.

Hier sind folgende Fälle zu unterscheiden.

a) Es verschwindet weder $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial t}$ noch $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^\nu f_1}{\partial \tau^\nu} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^\nu f_2}{\partial \tau^\nu}$. Dann wird die Kurve $\tau = \text{const.}$ von der durch $f(x, y) = 0$ dargestellten Kurve — Schnittkurve — weder berührt noch senkrecht geschnitten, und man erhält:

$$\Delta t = a_\nu \Delta\tau^\nu + \cdots, \quad (a_\nu \gtrless 0).$$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial t}$ ist von Null verschieden, aber $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^\nu f_1}{\partial \tau^\nu} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^\nu f_2}{\partial \tau^\nu}$ ist gleich Null, und ebenso jedes $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^n f_1}{\partial \tau^n} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^n f_2}{\partial \tau^n}$ von $n = \nu$ bis zu

$n = \nu + \alpha - 1$. Dann wird die Kurve $t =$ const. von der Schnittkurve berührt, und man hat:

$$\Delta t = a_{\nu+\alpha} \Delta\tau^{\nu+\alpha} + \cdots, \quad a_{\nu+\alpha} \gtrless 0, \quad \alpha \geqq 1.$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial t}$ ist von Null verschieden, aber jedes

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^n f_1}{\partial \tau^n} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^n f_2}{\partial \tau^n}$$

ist gleich Null. Dann fällt die Schnittkurve mit der Kurve $t =$ const. zusammen, und man hat $\Delta t = 0$.

d) $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial t}$ ist gleich Null, so daß die Kurve $\tau =$ const. von der Schnittkurve berührt wird. Hier kann entweder jedes Glied $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^n f_1}{\partial t^n} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^n f_2}{\partial t^n}$ verschwinden — wo dann die Schnittkurve mit der Kurve $\tau =$ const. zusammenfällt ($\Delta\tau = 0$) — oder man erhält, da jetzt $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^\nu f_1}{\partial \tau^\nu} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^\nu f_2}{\partial \tau^\nu}$ von Null verschieden ist:

$$\Delta\tau = a \Delta t^{\frac{p}{q}} + \cdots, \quad (a \gtrless 0),$$

wo $q \leqq \nu$, und bei $q = \nu$ die Zahl $p > 1$ ist. (Vgl C. Jordan. Cours d'Analyse. Bd. I, 2. Aufl. Paris 1893. S. 343.)

Wir hatten angenommen, daß längs der Grenzkurve t und τ durch eine Beziehung verbunden seien, vermöge derer die $(\nu - 1)$ ersten Ableitungen von f_1 und f_2 nach τ verschwinden, die ν^{ten} aber im allgemeinen nicht. Die Erzeugung der Grenzkurve bringt es mit sich, daß sich längs ihrer t und τ ändern, da ihre Punkte ja einer stetigen Reihe von Einzelkurven angehören. Es schließt dies nicht aus, daß die Grenzkurve zugleich eine bestimmte Einzelkurve der Schar sei. Dann ist sie eben sowohl durch eine Gleichung $\tau = \tau_0$, wie durch eine Gleichung $g(t, \tau) = 0$, in der t und τ vorkommen, darstellbar.

Nehmen wir nun an das Wertepaar t, τ liefere einen Punkt der Grenzkurve, für den $\frac{\partial^\nu f_1}{\partial \tau^\nu}$ von Null verschieden sei, während die Kurve $\tau =$ const. nicht mit der Grenzkurve zusammenfällt. Die für die Umgebung des betrachteten Punktes auf der Grenzkurve geltende Beziehung zwischen Δt und $\Delta\tau$ wird gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau} = 0,$$

wenn in ihr t und τ durch $t + \Delta t$, $\tau + \Delta\tau$ ersetzt werden.

Dies ergibt:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t \partial \tau} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f_1}{\partial t^2 \partial \tau} \Delta t^2 + \cdots + \frac{1}{(\nu-1)!} \frac{\partial^\nu f_1}{\partial \tau^\nu} \Delta \tau^{\nu-1} \cdots = 0.$$

Da es nach der obigen Annahme über das Wertepaar t, τ ausgeschlossen ist, daß diese Gleichung durch $\Delta \tau = 0$ befriedigt werden könne, erhalten wir:

$$\Delta \tau = b \Delta t^{\frac{m}{n}} + \cdots,$$

wo $n \leqq \nu - 1$.

Diese Entwicklung bedingt aber, nach dem oben unter d) Gezeigten, daß die Grenzkurve die Einzelkurven der Schar $\tau = \text{const.}$ berührt.

Man kann sich umgekehrt leicht überzeugen, daß die gefundene Gleichung zwischen $\Delta \tau$ und Δt eine die Kurven $\tau = \text{const.}$ berührende Kurve festlegt.

Setzen wir in:

$$\Delta x = \frac{\partial f_1}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} \Delta t^2 + \cdots + \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu f_1}{\partial \tau^\nu} \Delta \tau^\nu + \cdots,$$

$$\Delta y = \frac{\partial f_2}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} \Delta t^2 + \cdots + \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu f_2}{\partial \tau^\nu} \Delta \tau^\nu + \cdots$$

statt $\Delta \tau$ die Potenzreihe $b \Delta t^{\frac{m}{n}} + \cdots$, so wird $\Delta \tau^\nu$ von höherer als der ersten Ordnung in Δt, da $n \leqq \nu - 1$, daher:

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = (sgn\, \Delta t) \frac{\frac{\partial f_1}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)^2}},$$

$$\lim_{(\Delta t = 0)} \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = (sgn\, \Delta t) \frac{\frac{\partial f_2}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)^2}}.$$

Für die Entwicklung:

$$\Delta \tau = a \Delta t^{\frac{1}{\nu}} + \cdots$$

ergibt sich:

$$\lim_{(\Delta t = 0)} \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = (sgn\, \Delta t) \frac{\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{a^\nu}{\nu!} \frac{\partial^\nu f_1}{\partial \tau^\nu}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{a^\nu}{\nu!} \frac{\partial^\nu f_1}{\partial \tau^\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{a^\nu}{\nu!} \frac{\partial^\nu f_2}{\partial \tau^\nu}\right)^2}},$$

$$\lim_{(\Delta t = 0)} \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = (sgn\, \Delta t) \frac{\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{a^\nu}{\nu!} \frac{\partial^\nu f_2}{\partial \tau^\nu}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{a^\nu}{\nu!} \frac{\partial^\nu f_1}{\partial \tau^\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{a^\nu}{\nu!} \frac{\partial^\nu f_2}{\partial \tau^\nu}\right)^2}}.$$

Für die Entwicklung:

$$\Delta t = a_{\nu+\alpha} \Delta\tau^{\nu+\alpha} + \cdots$$

folgt:

$$\lim_{(\Delta\tau=0)} \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = (sgn\,\Delta\tau^\nu) \frac{\frac{\partial^\nu f_1}{\partial\tau^\nu}}{\sqrt{\left(\frac{\partial^\nu f_1}{\partial\tau^\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial^\nu f_2}{\partial\tau^\nu}\right)^2}},$$

$$\lim_{(\Delta\tau=0)} \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = (sgn\,\Delta\tau^\nu) \frac{\frac{\partial^\nu f_2}{\partial\tau^\nu}}{\sqrt{\left(\frac{\partial^\nu f_1}{\partial\tau^\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial^\nu f_2}{\partial\tau^\nu}\right)^2}}.$$

Bemerkung. Der von O. Biermann in der Festschrift der technischen Hochschule zu Brünn 1899, S. 5 geführte Beweis des Satzes, daß die Grenzkurve eine Berührende darstellt, ist nicht einwandfrei. Ganz unverständlich ist mir die Ansicht von E. Czuber (Archiv der Math. u. Phys. (3) Bd. 2. S. 113. 1902, vgl. H. Wieleitner „Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung" S. 49. 1905), nach der die Berührende der Schar $\tau = \text{const.}$, der Ort der Punkte sein soll, in denen eine Kurve $\tau = \text{const.}$ von einer Kurve $t = \text{const.}$ berührt wird.

4. Allgemeines Verfahren zur Ermittelung der Berührenden und Einhüllenden. Die entwickelte Regel zur Auffindung einer Berührenden und zur Entscheidung darüber, ob sie eine Einhüllende ist oder nicht, kann man, ohne eine Integration ausführen zu müssen, auch dann anwenden, wenn die außer der Schar $\tau = \text{const.}$ noch auftretende Kurvenschar nicht aus den senkrechten Durchdringungskurven der Schar $\tau = \text{const.}$ besteht. Es sei gegeben:

$$x = h_1(\vartheta, \tau), \quad y = h_2(\vartheta, \tau),$$

und die Scharen $\tau = \text{const.}$, $\vartheta = \text{const.}$ seien nicht rechtwinklig, sodaß die Zahl:

$$F = \frac{\partial h_1}{\partial\vartheta}\frac{\partial h_1}{\partial\tau} + \frac{\partial h_2}{\partial\vartheta}\frac{\partial h_2}{\partial\tau}$$

im allgemeinen von Null verschieden ist.

Ersetzen wir ϑ durch eine Funktion von t und τ, so wird dadurch die Schar $\tau = \text{const.}$ nicht geändert. Wir denken uns ϑ derart als Funktion von t und τ $\big(\vartheta = g(t, \tau)\big)$, daß die Kurven $t = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ rechtwinklig ausfallen. Wenn hierdurch $h_1(\vartheta, \tau)$ in $f_1(t, \tau)$, $h_2(\vartheta, \tau)$ in $f_2(t, \tau)$ übergeht, so wird:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial h_1}{\partial\vartheta}\frac{\partial g}{\partial t}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{\partial h_2}{\partial\vartheta}\frac{\partial g}{\partial t},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial\tau} = \frac{\partial h_1}{\partial\vartheta}\frac{\partial g}{\partial\tau} + \frac{\partial h_1}{\partial\tau}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial\tau} = \frac{\partial h_2}{\partial\vartheta}\frac{\partial g}{\partial\tau} + \frac{\partial h_2}{\partial\tau}.$$

Als Bedingung der Rechtwinkligkeit der Kurven $t = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ kommt:

$$E\frac{\partial g}{\partial \tau} + F = 0,$$

wenn:

$$E = \left(\frac{\partial h_1}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial \vartheta}\right)^2.$$

Wir können also den Wert der Ableitung $\frac{\partial g}{\partial \tau}$, da er gleich $-\frac{F}{E}$ ist, an jeder Stelle (ϑ, τ) berechnen, ohne die Funktion $g(t, \tau)$ durch Integration oder sonstwie ermittelt zu haben. Damit sind wir imstande auch die Ableitungen von f_1 und f_2 nach τ zu berechnen und die oben entwickelte Regel anzuwenden.

Man erhält z. B., wenn α die Zahl eins oder zwei bedeutet:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \tau} = -\frac{\partial h_\alpha}{\partial \vartheta}\frac{F}{E} + \frac{\partial h_\alpha}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \vartheta^2}\left(\frac{F}{E}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \vartheta \partial \tau}\frac{F}{E} + \frac{\partial h_\alpha}{\partial \vartheta}\left(\frac{F}{E}\frac{\partial \frac{F}{E}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \frac{F}{E}}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \tau^2}.$$

Das Verschwinden der Ableitungen $\frac{\partial f_1}{\partial \tau}$ und $\frac{\partial f_2}{\partial \tau}$ besagt hier soviel, wie die Beziehung:

$$\frac{\partial h_1}{\partial \vartheta}\frac{\partial h_2}{\partial \tau} - \frac{\partial h_2}{\partial \vartheta}\frac{\partial h_1}{\partial \tau} = 0.$$

Setzt man nämlich:

$$\frac{\partial h_1}{\partial \vartheta}\frac{\partial h_2}{\partial \tau} - \frac{\partial h_1}{\partial \tau}\frac{\partial h_2}{\partial \vartheta} = D,$$

so ist:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau} = -\frac{1}{E}\frac{\partial h_2}{\partial \vartheta}D, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \tau} = \frac{1}{E}\frac{\partial h_1}{\partial \vartheta}D.$$

Wird für eine beliebige Funktion $f(\vartheta, \tau)$ die zusammengesetzte Ableitung:

$$-\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{F}{E} + \frac{\partial f}{\partial \tau}$$

mit $\frac{\partial f}{d\tau}$ bezeichnet, so stimmt die oben benutzte Zahl ν mit dem kleinsten Wert von n überein, für den bei $D = 0$ der Ausdruck:

$$\frac{\partial^{(n-1)} D}{d\tau^{n-1}}$$

von Null verschieden ist.

Als Beispiel wollen wir eine Kreisschar betrachten, welche die Besonderheit darbietet, daß ein Teil der Einhüllenden mit einer Einzelkurve der Schar zusammenfällt.

Wir beschreiben um den Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt einen Kreis (K_0) vom Halbmesser Eins, ferner um den Punkt mit den

Koordinaten $x = \frac{1}{4}$, $y = 0$ einen Kreis (K_1) mit dem Halbmesser ein Viertel. Eine durch den Koordinatenanfangspunkt gezogene und unter dem Winkel τ gegen die positive x-Achse geneigte Gerade schneide den Kreis K_1 im Punkte A, den Kreis K_0 im Punkte B. Um A werde mit AB als Halbmesser der Kreis K_τ beschrieben. Durchläuft τ alle Werte von 0 bis 2π, so berühren die den Bedingungen:

$$0 \leqq \tau < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} < \tau \leqq 2\pi$$

entsprechenden Kreise K_τ den Kreis K_0 von innen, die der Bedingung:

$$\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{3\pi}{2}$$

entsprechenden Kreise K_τ berühren den Kreis K_0 von außen, die Kreise $K_{\frac{\pi}{2}}$ und $K_{\frac{3\pi}{2}}$ fallen mit K_0 zusammen.

Die Gleichungen des Kreises K_τ sind:

$$x = \frac{1}{2}\cos^2\tau + \left(1 - \frac{\cos\tau}{2}\right)\cos\vartheta,$$

$$y = \frac{1}{2}\cos\tau\sin\tau + \left(1 - \frac{\cos\tau}{2}\right)\sin\vartheta.$$

Man erhält:

$$F = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\cos\tau}{2}\right)\cos(2\tau - \vartheta), \quad E = \left(1 - \frac{\cos\tau}{2}\right)^2,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial\tau} = -\frac{\cos\vartheta}{2}\left(\sin(2\tau - \vartheta) - \sin\tau\right),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial\tau} = -\frac{\sin\vartheta}{2}\left(\sin(2\tau - \vartheta) - \sin\tau\right),$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial\tau^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\cos\vartheta}{\partial\tau}\left(\sin(2\tau - \vartheta) - \sin\tau\right)$$
$$- \frac{\cos\vartheta}{2}\left(\frac{\cos^2(2\tau - \vartheta)}{2\left(1 - \frac{\cos\tau}{2}\right)} + 2\cos(2\tau - \vartheta) - \cos\tau\right),$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial\tau^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\sin\vartheta}{\partial\tau}\left(\sin(2\tau - \vartheta) - \sin\tau\right)$$
$$- \frac{\sin\vartheta}{2}\left(\frac{\cos^2(2\tau - \vartheta)}{2\left(1 - \frac{\cos\tau}{2}\right)} + 2\cos(2\tau - \vartheta) - \cos\tau\right).$$

Die Bedingung für die Berührende, nämlich:

$$\sin(2\tau - \vartheta) - \sin\tau = 0$$

ergibt für ϑ die beiden Bestimmungen:

$$\vartheta = \tau, \quad \vartheta = 3\tau - \pi.$$

Die erste derselben, die wir ausschließlich betrachten wollen, liefert den Kreis K_0, also eine Einzelkurve der Schar. Für $\vartheta = \tau$ folgt:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \tau^2} = -\frac{\cos^2 \tau}{2}, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial \tau^2} = -\frac{\sin \tau \cos \tau}{2},$$

$$h = \frac{\cos \tau}{4} \varDelta \tau^2 + \cdots$$

Ziehen wir also durch den Berührungspunkt der Kreise K_0 und K_τ eine Normale zum Kreise K_τ, so wird sie von den dem Kreise K_τ benachbarten Kreisen im positiven, im Inneren des Kreises K_τ liegenden, oder im negativen Teil geschnitten, je nachdem der Kreis K_τ den Kreis K_0 von innen oder von außen berührt.

5. Der Satz, daß die senkrechten Durchdringungskurven einer Kurvenschar in den Punkten der Einhüllenden dieser Schar Spitzen besitzen, darf nicht umgekehrt werden. Es ist sehr wohl möglich, daß der Ort der Spitzen der Orthogonalschar die Einzelkurven der gegebenen Schar nirgends berührt, nämlich dann, wenn für die fraglichen Punkte (t, τ) die Ausdrücke $f_1(t + \varDelta t, \tau + \varDelta \tau)$, $f_2(t + \varDelta t, \tau + \varDelta \tau)$ nicht nach ganzen Potenzen von $\varDelta t$ und $\varDelta \tau$ entwickelbar sind, wenn also die wesentlichste Voraussetzung unserer Beweisführung nicht mehr erfüllt ist.

Betrachten wir z. B. in den Gleichungen:

$$x = t + \vartheta^2, \quad y = t + \vartheta^3$$

die Zahl ϑ als eine solche Funktion von t und τ, daß die Kurven $\tau = \text{const.}$ die Kurven $t = \text{const.}$ rechtwinklig schneiden. Hier wird:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = 1 + 2\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial t}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} = 1 + 3\vartheta^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial t},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau} = 2\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \tau} = 3\vartheta^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}.$$

Die Bedingung $F = 0$ ergibt:

$$2 + 3\vartheta + (4\vartheta + 9\vartheta^3) \frac{\partial \vartheta}{\vartheta t} = 0,$$

d. h.

$$\vartheta^3 - \vartheta^2 + \frac{8\vartheta}{3} - \frac{16}{9} \log(2 + 3\vartheta) = C - t,$$

wo C den Integrationsparameter bedeutet.

Nun ist, wenn wir den absoluten Betrag von $\frac{3\vartheta}{2}$ kleiner als Eins voraussetzen:

$$\log(2 + 3\vartheta) = \log 2 + \frac{3\vartheta}{2} - \frac{9\vartheta^2}{8} + \frac{27\vartheta^3}{24} + \cdots,$$

somit bei $C + \frac{16}{9} \log 2 = \tau$:

$$\vartheta^2 - \vartheta^3 \cdots = \tau - t$$

oder:

$$\vartheta = \sqrt{\tau - t} - \frac{1}{2}(\sqrt{\tau - t})^3 + \cdots,$$

daher:

$$x = \tau - (\tau - t)^2 + \cdots,$$

$$y = t + (\sqrt{\tau - t})^3 + \cdots$$

Die Gerade mit der Gleichung $x = y$ ist hier, wie aus den gegebenen Gleichungen unmittelbar hervorgeht, der Ort der Spitzen der Kurven $t =$ const.; aber die Tangenten der Kurven $\tau =$ const. in den Punkten dieser Geraden sind senkrecht zur x-Achse. Eine Entwicklung von Δx und Δy nach ganzen Potenzen von Δt und $\Delta \tau$ ist für die Umgebungen der Punkte unserer Geraden nicht möglich.

§ 18. Die Striktionslinie einer einfach unendlichen Kurvenschar.

Wir betrachten in einer Kurvenschar $\tau =$ const. zwei zu willkürlich gewählten Werten τ und $\tau + \Delta\tau$ gehörende Kurven und legen durch die Punkte der ersten Kurve ihre Normalen. Schließen wir die Schnittpunkte beider Kurven aus, so wird auf jeder Normalen von den beiden Kurven eine Strecke ausgeschnitten, und diese Strecken können möglicherweise Maximal- und Minimalwerte annehmen. Die Punkte der zu τ gehörenden Kurve, die von den die Maximal- und Minimalstrecken enthaltenden Normalen getroffen werden, nähern sich dann im allgemeinen mit verschwindendem $\Delta\tau$ bestimmten Grenzlagen, und die Gesamtheit dieser Grenzlagen auf allen Einzelkurven der Schar wird sich auf einer neuen Kurve befinden, die wir die Striktionslinie der Schar nennen wollen. Rühren die Grenzlagen von solchen Punkten her, zu denen Maximalwerte der oben betrachteten Strecke gehören, so nennen wir ihren Ort die Stauungslinie der Schar, im entgegengesetzten Fall die Einschnürungslinie der Schar. Die Striktionslinie kann also sowohl aus der Stauungslinie und der Einschnürungslinie, wie nur aus einer dieser Linien bestehen; auch ist es nicht ausgeschlossen, daß eine Einschnürungslinie zugleich eine Berührende der Schar ist.

Wir wollen jetzt die Bedingungen für das Auftreten einer Striktionslinie aufstellen.

1. Die Kurvenschar sei gegeben durch eine Gleichung von der Form:

$$f(x, y, \tau) = 0.$$

Wir sahen S. 75, wenn:

$$\xi = x + h\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w}, \quad \eta = y + h\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w}$$

die Gleichungen der Normalen sind, daß derjenige Wert von h, der dem Schnittpunkte der Normalen mit der Kurve $\tau + \Delta\tau$ entspricht, durch die Gleichung bestimmt wird:

$$h = b_1 \Delta\tau + b_2 \Delta\tau^2 + \cdots, \text{ wo } b_1 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \tau}}{w}.$$

Hier ist zunächst $\frac{\frac{\partial f}{\partial \tau}}{w}$ als von Null verschieden anzunehmen. Der absolute Wert von $\Delta\tau$ soll so klein genommen werden, daß das Vorzeichen von h mit dem des ersten Gliedes der Reihe übereinstimmt. Dann kann unbeschadet der Allgemeinheit $\Delta\tau$ als positiv vorausgesetzt werden. Die notwendige Bedingung für das Auftreten eines Maximums oder Minimums von h ist, wenn wir h längs der Kurve $\tau = \text{const.}$ als Funktion von x betrachten:

$$\frac{db_1}{dx} + \frac{db_2}{dx} \Delta\tau + \cdots = 0.$$

Wenn aus dieser Gleichung und der gegebenen $f(x, y, \tau) = 0$ die Zahlen x und y als reelle Funktionen von τ und $\Delta\tau$ berechnet werden können, so setze man diese Funktionen an Stelle von x und y in die weiteren Ableitungen

$$\frac{d^{(n)} b_1}{dx^n} + \frac{d^{(n)} b_2}{dx^n} \Delta\tau + \cdots$$

ein. Der erste so erhaltene Ausdruck, der nicht identisch verschwindet, ergebe sich für $n = \nu$. Wir haben es alsdann mit einem Maximum oder Minimum von h zu tun, wenn ν eine gerade Zahl ist. Geht man mit $\Delta\tau$ zur Grenze Null über, so ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein einer Striktionslinie:

1. daß die Gleichungen $f = 0$ und $\frac{db_1}{dx} = 0$ $\left(\text{oder: } \frac{\partial b_1}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial b_1}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = 0\right)$ eine reelle Lösung: $x = h_1(\tau)$, $y = h_2(\tau)$ besitzen,

2. daß der erste nicht verschwindende Ausdruck

$$\left(\frac{d^{(n)} b_1}{dx^n}\right)_{x = h_1(\tau),\ y = h_2(\tau)}$$

zu einem geraden n gehöre. Wir wollen ihn kurz mit b bezeichnen, während $\left(\frac{-\frac{\partial f}{\partial \tau}}{w}\right)_{x = h_1,\ y = h_2}$ mit B bezeichnet werde.

Eine Stauungslinie tritt auf, wenn bei positivem B die Zahl b negativ, oder wenn bei negativem B die Zahl b positiv ausfällt, aber eine Einschnürungslinie, wenn B gleich Null ist, oder wenn $B > 0$, $b > 0$, oder wenn $B < 0$, $b < 0$.

Es ist aber nicht notwendig, daß man auf die gezeigte Weise die ganze Striktionslinie erhält. Wir haben nämlich bei Anwendung der vollständigen Differentiationen nach x vorauszusetzen, daß $\frac{dy}{dx}$ nicht unendlich oder, was dasselbe ist, daß $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht Null wird. Nun kann gerade der Ort der Punkte, für die $\frac{\partial f}{\partial y}$ verschwindet, einen Teil der Striktionslinie bilden. Um diese Möglichkeit mit zu berücksichtigen, hat man b_1 nicht nur als Funktion von x, sondern auch als Funktion von y aufzufassen und zu untersuchen, ob die Gleichung:

$$\frac{d b_1}{d y} = 0$$

einen Teil der Striktionslinie liefert.

Die Gesamtlösung der Gleichungen $f = 0$ und:

$$\frac{\partial b_1}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial b_1}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

oder:

$$\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right\}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \tau}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \tau}\frac{\partial f}{\partial x}\right\}$$
$$- \frac{\partial f}{\partial \tau}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right\} = 0$$

muß die ganze Striktionslinie umfassen. Aber diese Lösung kann in Teile zerfallen und für jeden derselben hat man, wenn für ihn $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ von Null verschieden sind, durch vollständige Differentiationen von b_1 nach x oder y, wenn $\frac{\partial f}{\partial x}$ verschwindet, durch vollständige Differentiationen nach x, wenn $\frac{\partial f}{\partial y}$ verschwindet, durch vollständige Differentiationen nach y zu entscheiden, ob die entsprechende Kurve der Striktionslinie angehört oder nicht.

2. Beispiele. a) Für die einfach unendliche Kreisschar mit der Gleichung:

$$\left(x - \varphi_1(\tau)\right)^2 + \left(y \quad \varphi_2(\tau)\right)^2 - \varphi(\tau)^2 = 0$$
$$(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 = 1, \varphi > 0)$$

ergibt sich:

$$b_1 = \frac{(x-\varphi_1)\varphi_1' + (y-\varphi_2)\varphi_2' + \varphi\varphi'}{\varphi},$$

$$\frac{d b_1}{d x} = \frac{(y-\varphi_2)\varphi_1' - (x-\varphi_1)\varphi_2'}{\varphi(y-\varphi_2)},$$

$$\frac{d^2 b_1}{d x^2} = -\frac{\varphi_2'}{\varphi}\left(\frac{1}{y-\varphi_2} + \frac{x-\varphi_2}{(y-\varphi_2)^2}\right) = -\frac{\varphi\varphi_2'}{(y-\varphi_2)^3}.$$

Die Gleichung: $\frac{d b_1}{d x} = 0$ lösen wir durch die Beziehungen:

$$x - \varphi_1 = k\varphi_1', \quad y - \varphi_2 = k\varphi_2'.$$

Diese Ausdrücke, in die Gleichung der gegebenen Schar eingesetzt, liefern:

$$k^2 = \varphi^2,$$

somit: $k = \varepsilon\varphi$, wenn ε gleich $+1$, oder gleich -1.

Hierdurch erhalten wir:

$$B = \varepsilon + \varphi', \quad b = \left(\frac{d^2 b_1}{d x^2}\right)_{x = h_1, y = h_2} = -\frac{\varepsilon}{\varphi^2 \varphi_2'^2}.$$

Es tritt auf bei

$\varphi' > 1$	eine Stauungslinie für:	$\varepsilon = +1$,	eine Einschnürungslinie für:	$\varepsilon = -1$,
$\varphi' = 1$	„ „ „	$\varepsilon = +1$,	„ „ „	$\varepsilon = -1$,
$0 < \varphi' < 1$	„ „ „	$\varepsilon = \pm 1$,		
$-1 < \varphi' < 0$	„ „ „	$\varepsilon = \pm 1$,		
$\varphi' = -1$	„ „ „	$\varepsilon = -1$,	„ „ „	$\varepsilon = +1$,
$\varphi' < -1$	„ „ „	$\varepsilon = -1$,	„ „ „	$\varepsilon = +1$.

In den Fällen, in denen keine Berührende vorhanden ist ($\varphi'^2 > 1$), tritt sowohl eine Stauungs- wie eine Einschnürungslinie auf; in den Fällen, in denen eine Einhüllende vorhanden ist ($\varphi'^2 < 1$), tritt nur eine Stauungslinie auf; endlich fällt, wenn eine Berührende, aber keine Einhüllende vorhanden ist, die Berührende mit der Einschnürungslinie zusammen, und außerdem tritt eine Stauungslinie auf. Die Gleichungen: $x - \varphi_1 = k\varphi_1'$, $y - \varphi_2 = k\varphi_2'$ zeigen, daß jeder Kreis der Schar in denjenigen beiden Punkten von der Striktionslinie geschnitten wird, die er mit der in seinem Mittelpunkt berührenden Tangente der Mittelpunktskurve gemein hat.

Es dürfte nicht überflüssig sein, das für die Striktionslinie der Krümmungskreise einer Kurve gefundene Ergebnis für sich herzuleiten.

Wir bezeichnen zu diesem Zweck die Koordinaten einer gegebenen Kurve mit x_0, y_0 und betrachten sie als Funktionen ihrer Bogenlänge s, so daß hier s an die Stelle von τ tritt. Die Koordinaten des zu x_0, y_0 gehörenden Krümmungsmittelpunkts sind:

$$x_1 = x_0 - \varrho \frac{dy_0}{ds}, \quad y_1 = y_0 + \varrho \frac{dx_0}{ds}.$$

Die Gleichung der Schar der Krümmungskreise ist:

$$f \equiv (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - \varrho^2 = 0.$$

Da:

$$\frac{dx_1}{ds} = -\frac{d\varrho}{ds}\frac{dy_0}{ds}, \quad \frac{dy_1}{ds} = \frac{d\varrho}{ds}\frac{dx_0}{ds},$$

so wird:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 2\frac{d\varrho}{ds}\left((x - x_1)\frac{dy_0}{ds} - (y - y_1)\frac{dx_0}{ds} - \varrho\right).$$

Da:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 4\varrho^2,$$

so ist $w = 2\vartheta\varrho$ zu setzen, wo ϑ gleich $+1$ oder -1, je nachdem ϱ positiv oder negativ ausfällt. Hiernach ergibt sich:

$$b_1 = -\frac{\vartheta}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds}\left((x - x_1)\frac{dy_0}{ds} - (y - y_1)\frac{dx_0}{ds} - \varrho\right),$$

$$\frac{db_1}{dx} = -\frac{\vartheta}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds}\left(\frac{dy_0}{ds} + \frac{dx_0}{ds}\frac{x - x_1}{y - y_1}\right),$$

$$\frac{d^2 b_1}{dx^2} = -\frac{\vartheta}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds}\frac{dx_0}{ds}\left(\frac{1}{y - y_1} + \frac{(x - x_1)^2}{(y - y_1)^3}\right) = -\vartheta\varrho\frac{d\varrho}{ds}\frac{\frac{dx_0}{ds}}{(y - y_1)^3}.$$

Die Gleichungen $f = 0$ und $\frac{db_1}{dx} = 0$ ergeben:

$$x - x_1 = -\varepsilon\varrho\frac{dy_0}{ds}, \quad y - y_1 = \varepsilon\varrho\frac{dx_0}{ds}, \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

daraus folgt:

$$B = \vartheta(1 + \varepsilon)\frac{d\varrho}{ds}, \quad b = -\frac{\varepsilon\vartheta\frac{d\varrho}{ds}}{\varrho^2\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2}.$$

Für $\varepsilon = -1$ erhalten wir die Einschnürungslinie mit den Gleichungen

$$x = x_0, \quad y = y_0,$$

d. h. die Ausgangskurve; für $\varepsilon = +1$ erhalten wir die Kurve mit den Gleichungen:

$$x = x_0 - 2\varrho\frac{dy_0}{ds}, \quad y = y_0 - 2\varrho\frac{dx_0}{ds},$$

und diese Kurve ist, da für $B > 0$ die Zahl $b < 0$, für $B < 0$ die Zahl $b > 0$, eine Stauungslinie.

Hätten wir in diesem Beispiel b_1 nicht als Funktion von x, sondern als Funktion von y aufgefaßt, so wäre dasselbe Ergebnis zutage gekommen.

b) Wir betrachten die Schar konfokaler Kegelschnitte mit der Gleichung:

$$\frac{x^2}{m^2 - \tau} + \frac{y^2}{n^2 - \tau} - 1 = 0.$$

Hier sei $m^2 > n^2$, und zur Abkürzung werde gesetzt:

$$\alpha = m^2 - \tau, \quad \beta = n^2 - \tau.$$

Man erhält:

$$b_1 = \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}}.$$

Da sowohl $\frac{\partial f}{\partial x}$ wie $\frac{\partial f}{\partial y}$ verschwinden kann, ist b_1 sowohl als Funktion von x allein, wie als Funktion von y allein aufzufassen. Sehen wir b_1 als eine Funktion von x allein an, so entsteht:

$$b_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)+\frac{1}{\beta}}.$$

Der Ausdruck $\frac{db_1}{dx}$ verschwindet nur für $x = 0$. Dies liefert nur für die konfokalen Ellipsen ($\beta > 0$) eine reelle Kurve, nämlich die y-Achse. Für $x = 0$ wird $\frac{d^2b_1}{dx^2}$ größer als Null, somit $B < 0$, $b > 0$, d. h. die y-Achse ist für die konfokalen Ellipsen eine Stauungslinie.

Sehen wir b_1 als eine Funktion von y allein an, so kommt:

$$b_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y^2}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{1}{\alpha}}.$$

Der Ausdruck $\frac{db_1}{dy}$ verschwindet hier nur für $y = 0$, und das liefert für die Gesamtschar der konfokalen Kegelschnitte eine reelle Kurve, nämlich die x-Achse. Für $y = 0$ wird $\frac{d^2b_1}{dx^2}$ kleiner als Null, somit $B < 0$, $b < 0$, d. h. die x-Achse ist eine Einschnürungslinie.

c) Um auch ein Beispiel für den Fall zu geben, daß eine zweimalige Differentiation von b_1 nicht ausreicht, betrachten wir die Kurvenschar mit der Gleichung:

$$x - \tau + y^3 = 0.$$

Hier wird:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{1+9y^4}},$$

und da $\frac{\partial f}{\partial x}$ nie verschwindet, genügt es, b_1 als Funktion von y allein zu betrachten. Die Ableitung $\frac{db_1}{dy}$ verschwindet nur für y gleich Null. In der Umgebung von $y = 0$ können wir aber b_1 nach positiven Potenzen von y entwickeln und erhalten:

$$b_1 = 1 - \frac{9}{2}y^4 + \cdots$$

Daraus folgt:

$$\left(\frac{d^2b_1}{dy^2}\right)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{d^3b_1}{dy^3}\right)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{d^4b_1}{dy^4}\right)_{y=0} = -108,$$

somit: $B > 0$, $b < 0$. Die x-Achse ist eine Stauungslinie.

3 Die Kurvenschar $\tau = \text{const.}$ sei gegeben durch zwei Gleichungen von der Form:

$$x = f_1(t, \tau), \quad y = f_2(t, \tau).$$

Wir sahen S. 88, daß hier:

$$h = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial \tau} - \frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial f_1}{\partial \tau}}{\sqrt{E}} \Delta\tau + \cdots = b_1 \Delta\tau + \cdots$$

Zum Vorhandensein einer Striktionslinie ist notwendig, daß $\frac{\partial b_1}{\partial t}$ verschwindet. Hierdurch werde t als reelle Funktion von τ bestimmt, $t = g(\tau)$. Setzt man $g(\tau)$ an Stelle von t in die weiteren Ableitungen $\frac{\partial^2 b_1}{\partial t^2}, \frac{\partial^3 b_1}{\partial t^3} \cdots$ ein, so liegt eine Striktionslinie vor, wenn die erste nicht verschwindende dieser Ableitungen von gerader Ordnung ist. Bezeichnet man wieder ihren Wert mit b und setzt $(b_1)_{t=g(\tau)} = B$, so geht die Entscheidung darüber, ob eine Stauungslinie oder eine Einschnürungslinie vorliegt, in derselben Weise vor sich wie unter 1.

Um ein Beispiel zu behandeln, wollen wir eine einfach unendliche Kreisschar durch die Gleichungen festlegen:

$$x = \varphi_1(\tau) + \varphi(\tau)\cos t, \quad y = \varphi_2(\tau) + \varphi(\tau)\sin t, \quad (\varphi(\tau) > 0).$$

Hier wird:

$$b_1 = -(\varphi_1'\cos t + \varphi_2'\sin t + \varphi'),$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial t} = \varphi_1'\sin t - \varphi_2'\cos t, \quad \frac{\partial^2 b_1}{\partial t^2} = \varphi_1'\cos t + \varphi_2'\sin t.$$

Die Gleichung $\frac{\partial b_1}{\partial t} = 0$ liefert, wenn ε gleich 1 oder gleich -1 ist:

$$\cos t = \varepsilon\varphi_1', \quad \sin t = \varepsilon\varphi_2',$$

und damit:

$$B = -\varepsilon - \varphi', \quad b = \varepsilon.$$

Das Ergebnis ist dasselbe wie bei der früheren Behandlung dieses Beispiels in 1.

4. Man kann die Striktionslinie einer einfach unendlichen Kurvenschar auch dann bestimmen, wenn letztere durch eine Differentialgleichung:

$$g_1(x,y)\,dx + g_2(x,y)\,dy = 0$$

gegeben ist. Bezeichnet nämlich $\lambda(x,y)$ einen integrierenden Faktor der gegebenen Differentialgleichung, so können wir:

$$\lambda(x,y)g_1(x,y) = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}, \quad \lambda(x,y)g_2(x,y) = \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

setzen, und die endliche Gleichung der Kurvenschar gewinnt die Form:

$$g(x,y) - \tau = 0.$$

Die in 1, S. 98 gefundene Gleichung, der die Koordinaten der Striktionslinie genügen müssen, nimmt für ein konstantes $\frac{\partial f}{\partial \tau}$ die Gestalt an:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)-\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,$$

oder:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)=0.$$

Im betrachteten Falle wird:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\lambda^2\left(g_2\frac{\partial g_1}{\partial x}-g_1\frac{\partial g_2}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\lambda^2\left(g_1\frac{\partial g_2}{\partial y}-g_2\frac{\partial g_1}{\partial y}\right),$$

somit gewinnt unsere Bedingungsgleichung die Gestalt:

$$g_1 g_2\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}-\frac{\partial g_2}{\partial y}\right)+g_2^2\frac{\partial g_1}{\partial y}-g_1^2\frac{\partial g_2}{\partial x}=0.$$

Angenommen, dieser Gleichung würde durch $y=F(x)$ genügt, während $g_2\big(x, F(x)\big)$ nicht verschwände. Wir haben hier:

$$b_1=\frac{1}{\lambda\sqrt{g_1^2+g_2^2}},$$

wo λ selbst unbekannt ist. Für die totale Ableitung einer beliebigen Funktion $\varphi(x,y)$ längs einer Einzelkurve der durch $g_1dx+g_2dy=0$ festgelegten Schar besteht die Gleichung:

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dx}=\frac{g_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}-g_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{g_2}.$$

Ebenso folgt aus der Bedingung, der λ als integrierender Faktor genügen muß, nämlich:

$$g_2\frac{\partial\log\lambda}{\partial x}-g_1\frac{\partial\log\lambda}{\partial y}-\frac{\partial g_1}{\partial y}+\frac{\partial g_2}{\partial x}=0,$$

daß:

$$\frac{d\log\lambda}{dx}=\frac{1}{g_2}\left(\frac{\partial g_1}{\partial y}-\frac{\partial g_2}{\partial x}\right).$$

Setzen wir zur Abkürzung: $\sqrt{g_1^2+g_2^2}=\mu$, so ist hiernach

$$\frac{d^{(n)}\log\lambda\mu}{dx^n}$$

ein in x und y berechenbarer Ausdruck. Nun folgt aber:

$$\frac{db_1}{dx}=-\frac{\frac{d\log\lambda\mu}{dx}}{\lambda\mu},\quad \frac{d^2b_1}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2\log\lambda\mu}{dx^2}-\left(\frac{d\log\lambda\mu}{dx}\right)^2}{\lambda\mu}.$$

Allgemein ist:

$$\frac{d\frac{\varphi(x,y)}{\lambda\mu}}{dx} = \frac{\frac{d\varphi}{dx} - \varphi\frac{d\log\lambda\mu}{dx}}{\lambda\mu};$$

es hat also jede totale Ableitung von b_1 nach x die Form eines Quotienten, dessen Zähler ein in x und y berechenbarer Ausdruck, dessen Nenner $\lambda\mu$ ist. Der Wert jeder Ableitung kann also abgesehen von dem Faktor $\frac{1}{\lambda}$ berechnet werden. Da eine gleichzeitige Änderung des Vorzeichens von B und b die Unterscheidung der Striktionslinie in Stauungslinie und Einschnürungslinie nicht beeinträchtigt, so ist es gleichgültig, ob λ positiv oder negativ ausfällt, die unter 1. gegebene Regel bleibt anwendbar.

Sollte $g_2(x, F(x))$ verschwinden, $g_1(x, F(x))$ aber nicht, so führen durchaus entsprechende Betrachtungen hinsichtlich der totalen Ableitungen nach y zum Ziel.

Als Beispiel wollen wir die homogenen Differentialgleichungen behandeln, nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Wir setzen zur Abkürzung: $\frac{y}{x} = u$ und haben damit: $g_1(x,y) = -f(u)$, $g_2(x,y) = 1$. Weiter folgt:

$$b_1 = \frac{1}{\lambda\sqrt{1+f(u)^2}}, \quad \mu = \sqrt{1+f(u)^2},$$

$$\frac{d\log\mu}{dx} = \frac{f(u)f'(u)}{1+f(u)^2}\left(-\frac{y}{x^2} + \frac{f(u)}{x}\right),$$

$$\frac{d\log\lambda}{dx} = -\frac{f'(u)}{x},$$

$$\frac{d\log\lambda\mu}{dx} = -\frac{f'(u)\left(uf(u)+1\right)}{x\left(1+f(u)^2\right)}.$$

Nun ist u die Tangente des Winkels, den die vom Koordinatenanfangspunkt aus nach dem Punkt (x,y) hin gezogene Halbgerade mit der positiven x-Achse bildet, $f(u)$ ist die Tangente des Winkels, den die geometrische Tangente der durch den Punkt (x,y) gehenden Integralkurve in diesem Punkte mit derselben Achse bildet. Die Gleichung $uf(u) + 1 = 0$ besagt somit, daß die bezeichnete Halbgerade auf dieser Tangente senkrecht ist. Da die Tangenten der Integralkurven längs einer durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Geraden einander parallel sind, so kann die Striktionslinie nur aus denjenigen von diesen Geraden bestehen, die die Integralkurven senkrecht schneiden.

Eine Schwierigkeit in der analytischen Behandlung unserer Aufgabe entsteht, wenn eine der Koordinatenachsen die Integralkurven senkrecht schneidet, da dann entweder u oder $f(u)$ unendlich groß wird. In einem solchen Falle dreht man am einfachsten das Koordinatensystem um einen geeigneten Winkel um seinen Anfangspunkt, wodurch die Schwierigkeit beseitigt wird.

Man erhält:

$$\frac{d^2 \log \lambda\mu}{dx^2} = -\left(yf(u)+x\right)\frac{d\dfrac{f'(u)}{x^2(1+f(u)^2)}}{dx}$$
$$-\frac{f'(u)}{x^2(1+f(u)^2)}\left(1+f(u)^2+yf(u)\left(-\frac{y}{x^2}+\frac{f(u)}{x}\right)\right).$$

Es sei u_0 ein endlicher, der Gleichung $uf(u)+1=0$ genügender Wert von u, der als von Null verschieden vorausgesetzt werde. Dann ergibt sich:

$$\left(\frac{d^2 \log \lambda\mu}{dx^2}\right)_{u=u_0} = \frac{-f'(u_0)+u_0{}^2 f'(u_0)^2}{x^2},$$
$$\left(\frac{d^2 b_1}{dx^2}\right)_{u=u_0} = \frac{f'(u_0)-u_0{}^2 f'(u_0)^2}{x^2(\lambda\mu)_{u=u_0}}.$$

Nehmen wir z. B. eine Schar ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen mit der Gleichung:

$$m(x^2+y^2)-2nxy-2\tau^2=0,$$

wo:

$$m=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}, \quad n=\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}, \quad \alpha^2>\beta^2.$$

Die entsprechende Differentialgleichung lautet:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{nu-m}{mu-n}.$$

Der Ausdruck $uf(u)+1$ hat die Gestalt:

$$\frac{n(u^2-1)}{um-n},$$

somit ergeben sich für u_0 die beiden Werte $+1$ und -1.

Die Zahl $f'(u_0)$ wird bei $u_0=+1$ zu $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$, bei $u_0=-1$ zu $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$.

Endlich entsteht:

$$\left(\frac{d^2 b_1}{dx^2}\right)_{u=1} = \frac{\beta^2(\alpha^2-\beta^2)}{x^2\alpha^4(\lambda\mu)_{u=1}}, \quad \left(\frac{d^2 b_1}{dx^2}\right)_{u=-1} = \frac{\alpha^2(\beta^2-\alpha^2)}{x^2\beta^4(\lambda\mu)_{u=-1}}.$$

Hiernach ist die Gerade mit der Gleichung $u=1$ eine Einschnürungslinie, die Gerade mit der Gleichung $u=-1$ eine Stauungs-

linie. In dem gebräuchlichen Achsensystem gilt der Satz, daß für die durch die Beziehung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \tau^2 = 0, \quad (a^2 > b^2)$$

bestimmte Schar ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen die y-Achse eine Einschnürungslinie, die x-Achse eine Stauungslinie ist.

§ 19. System von zwei einfach unendlichen Kurvenscharen.

An die Behandlung von Fragen, die sich auf eine einfach unendliche Kurvenschar beziehen, schließen wir Betrachtungen über zwei einfach unendliche Kurvenscharen. Bei der Untersuchung einer einzelnen Kurve hat sich die Benutzung der Bogenlänge als sehr tunlich erwiesen. Wir erörtern daher zunächst den Begriff Bogenlänge bei zwei einfach unendlichen Kurvenscharen, sowie die Art und Weise, wie die Ableitungen nach Bogenlängen aufzufassen sind.

1. Bogenlänge. Dieser Begriff findet seine analytische Definition am einfachsten, wenn die gegebenen Scharen $\tau = \text{const.}$ $t = \text{const.}$ durch Gleichungen von der Form:

$$x = f_1(t, \tau), \quad y = f_2(t, \tau)$$

festgelegt sind.

Die Bogenlänge einer Einzelkurve $\tau = \text{const.}$ bezeichnen wir mit σ_1 und betrachten sie als mit wachsendem t wachsend. Die Nullpunkte der Bogenlängen σ_1 auf den Kurven $\tau = \text{const.}$ können beliebig gewählt werden; sie bilden eine Kurve, die durch die Gleichung:

$$t = \varphi_1(\tau)$$

dargestellt sei. Setzen wir:

$$\left(\frac{\partial f_1(t, \tau)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2(t, \tau)}{\partial t}\right)^2 = E,$$

so folgt:

$$\sigma_1 = \int_{\varphi_1(\tau)}^{t} \sqrt{E}\, dt.$$

Hängt E nur von t ab, so hat die vorstehende Integralgleichung die Form:

$$\sigma_1 = \psi(t) - \psi\big(\varphi_1(\tau)\big).$$

Geben wir hierin der Veränderlichen t zwei bestimmte Werte t' und t'' und nennen die entsprechenden Bogenlängen auf einer Kurve $\tau = \text{const.}$ σ_1' und σ_1'', so ergibt sich:

$$\sigma_1' - \sigma_1'' = \psi(t') - \psi(t'').$$

Die Differenz $\sigma_1' - \sigma_1''$ bleibt also dieselbe, wie wir auch den Wert von τ wählen mögen, d. h. geometrisch: irgend zwei Kurven $t =$ const. schneiden aus den Kurven $\tau =$ const. Stücke von derselben Bogenlänge aus, oder mit anderen Worten: jede Kurve $t =$ const. entsteht aus irgendeiner von ihnen, indem man nach derselben Seite hin von der letzteren aus gleiche Bogenstücke auf den Kurven $\tau =$ const. abträgt.

Will man mit Hilfe der Integralgleichung:

$$\sigma_1 = \int_{\varphi_1(\tau)}^{t} \sqrt{E}\,dt$$

an Stelle von t die Bogenlänge σ_1 als unabhängige Veränderliche einführen, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Ändert sich E mit τ, so ergebe sich:

$$t = g(\sigma_1, \tau).$$

Die Gleichungen:

$$x = f_1\big(g(\sigma_1, \tau), \tau\big), \quad y = f_2\big(g(\sigma_1, \tau), \tau\big)$$

stellen dieselbe Schar $\tau =$ const. wie vorhin dar; aber die Schar $\sigma_1 =$ const. fällt nicht mehr mit der Schar $t =$ const. zusammen.

Enthält E die Veränderliche τ nicht, so wählen wir innerhalb des Wertbereichs von t eine Zahl t_0 und können:

$$\sigma_1 = \int_{\varphi_1(\tau)}^{t_0} \sqrt{E}\,dt + \int_{t_0}^{t} \sqrt{E}\,dt$$

setzen. Das erste Integral rechts hängt nur von τ ab, sein Wert sei $\varphi(\tau)$, das zweite Integral hängt nur von t ab. Wir erhalten daher:

$$t = \psi\big(\sigma_1 - \varphi(\tau)\big),$$

und die Funktionen x und y nehmen die Gestalten an:

$$x = F_1\big(\sigma_1 - \varphi(\tau), \tau\big), \quad y = F_2\big(\sigma_1 - \varphi(\tau), \tau\big),$$

wo:

$$E_1 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \sigma_1}\right)^2 = 1$$

ist. Die Kurven $\tau =$ const. sind dieselben geblieben, wie vorhin. Die Kurven $\sigma_1 =$ const. fallen nicht mit den Kurven $t =$ const. zusammen, solange $\varphi_1(\tau)$ mit τ veränderlich ist, aber sie teilen, da E_1 von τ unabhängig ist, mit den Kurven $t =$ const. die Eigenschaft, durch Abtragen gleicher Bogenlängen auf den Kurven $\tau =$ const. aus einer Einzelkurve $\sigma_1 =$ const. entstanden zu sein. Wählt man $\varphi_1(\tau)$ als Konstante, so fallen die Kurven $\sigma_1 =$ const. mit den Kurven

$t = \text{const.}$ zusammen. Auf Grund dieser Überlegungen können wir den Satz aussprechen: **Besitzt in den Gleichungen:**

$$x = f_1(t, \tau), \quad y = f_2(t, \tau)$$

die Veränderliche t die Bedeutung der Maßzahl der Bogenlängen der Kurven $\tau = \text{const.}$ (d. h. ist $E = 1$), so ist die allgemeinste Kurvenschar, die aus einer Einzelkurve durch Abtragen gleicher Bogenlängen auf den Kurven $\tau = \text{const.}$ entsteht, dargestellt durch die Gleichungen:

$$x = f_1\big(t - \varphi(\tau), \tau\big), \quad y = f_2\big(t - \varphi(\tau), \tau\big),$$

in denen τ die Veränderliche, t den Parameter, und $\varphi(\tau)$ eine willkürlich gewählte Funktion von τ bedeutet.

Die Bogenlänge einer Kurve $t = \text{const.}$ bezeichnen wir mit σ_2 und betrachten sie als mit wachsendem τ wachsend. Die Nullpunkte der Bogenlängen σ_2 mögen auf der durch die Gleichung $\tau = \varphi_2(t)$ dargestellten Kurve gelegen sein. Dann ist:

$$\sigma_2 = \int\limits_{\varphi_2(t)}^{\tau} \sqrt{G}\, d\tau,$$

wenn:

$$\left(\frac{\partial f_1(t, \tau)}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2(t, \tau)}{\partial \tau}\right)^2 = G$$

gesetzt wird.

Hängt G nur von τ ab, so entsteht jede Kurve $\tau = \text{const.}$ aus einer einzelnen unter ihnen dadurch, daß man von der letzteren aus nach derselben Seite hin auf den Kurven $t = \text{const.}$ gleiche Bogenlängen abträgt.

Wenn E nur von t und G nur von τ abhängt, so ist sowohl:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial^2 f_1}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial^2 f_2}{\partial t \partial \tau} = 0,$$

als auch:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau}\frac{\partial^2 f_1}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial f_2}{\partial \tau}\frac{\partial^2 f_2}{\partial t \partial \tau} = 0,$$

somit:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t \partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial t \partial \tau} = 0.$$

Die Funktionen $f_1(t, \tau)$ und $f_2(t, \tau)$ haben hier die Gestalten:

$$f_1(t, \tau) = f_{11}(t) + f_{12}(\tau),$$
$$f_2(t, \tau) = f_{21}(t) + f_{22}(\tau).$$

Um diesen Sachverhalt geometrisch zu deuten, denken wir uns neben dem festen x, y-Koordinatensystem ein bewegliches u, v-Koordinaten-

system, dessen Achsen denen des festen parallel sind. Beschreibt der Anfangspunkt des u, v-Systems die Kurve mit den Gleichungen:

$$x = f_{11}(t), \quad y = f_{21}(t),$$

so beschreibt die mit dem beweglichen System festverbundene Kurve, deren Gleichungen:

$$u = f_{12}(\tau), \quad v = f_{22}(\tau)$$

sind, die Schar $t = \text{const.}$

Beschreibt der Anfangspunkt des u, v-Systems die Kurve mit den Gleichungen:

$$x = f_{12}(\tau), \quad y = f_{22}(\tau),$$

so beschreibt die mit dem beweglichen Koordinatensystem fest verbundene Kurve, deren Gleichungen:

$$x = f_{11}(t), \quad y = f_{21}(t)$$

sind, die Schar $\tau = \text{const.}$

Sowohl von der Schar $t = \text{const.}$ wie von der Schar $\tau = \text{const.}$ läßt sich sagen, daß sie durch Schiebung (Translation) einer Kurve längs einer festen Kurve entstanden sei. Man nennt daher eine derartige Schar eine Schiebungs- oder Translationsschar.

Ein besonders wichtiger Fall ist hier der, daß die erzeugenden Kurven kongruent sind, d. h. daß:

$$f_1(t, \tau) = f_{11}(t) + f_{11}(\tau), \quad f_2(t, \tau) = f_{21}(t) + f_{21}(\tau).$$

Die Schar $\tau = \text{const.}$ entsteht hier auch auf folgende Weise. Man fasse den zu dem Werte τ gehörenden Punkt der durch die Gleichungen:

$$x = 2f_{11}(\tau), \quad y = 2f_{21}(\tau)$$

dargestellten Kurve ins Auge und ziehe die sämtlichen von ihm ausgehenden Sehnen der Kurve. Die Mittelpunkte dieser Sehnen bilden eine neue Kurve, deren Gleichungen:

$$x = f_{11}(t) + f_{11}(\tau), \quad y = f_{21}(t) + f_{21}(\tau)$$

sind. Läßt man τ alle erlaubten Werte durchlaufen, so ergibt sich die Schar $\tau = \text{const.}$ Die Kurve mit den Gleichungen:

$$x = 2f_{11}(\tau), \quad y = 2f_{21}(\tau)$$

ist die Einhüllende der Schar $\tau = \text{const.}$, falls diese Schar nicht aus geraden Linien besteht. Benutzt man nämlich die unter 4. S. 92 hergeleitete Regel, so ist t statt ϑ zu setzen. Man erhält:

$$D = f'_{11}(t)\, f'_{21}(\tau) - f'_{21}(t) f'_{11}(\tau),$$

so daß D für $t = \tau$ verschwindet. Die zusammengesetzte Ableitung $\frac{\partial D}{d\tau}$ erhält für $\tau = t$ den Wert:

$$2\left(f'_{11}(t)\, f''_{21}(t) - f'_{21}(t)\, f''_{11}(t)\right).$$

Derselbe kann für eine stetige Wertfolge von t nur dann verschwinden, wenn die Schar $\tau = \text{const.}$ aus Geraden besteht. Es ist also $\nu = 2$, und die Gleichungen:

$$x = 2 f_{11}(\tau), \quad y = 2 f_{21}(\tau)$$

stellen die Einhüllende der Schar $\tau = \text{const.}$ dar.

2. **Ableitungen nach den Bogenlängen σ_1 und σ_2.**

Für eine Einzelkurve $\tau = \text{const.}$ haben wir:

$$\frac{dx}{d\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial f_1}{\partial t}, \quad \frac{dy}{d\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial f_2}{\partial t};$$

für eine Einzelkurve $t = \text{const.}$ haben wir:

$$\frac{dx}{d\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial f_1}{\partial \tau}, \quad \frac{dy}{d\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial f_2}{\partial \tau}.$$

Bei einer willkürlich gewählten Funktion $f(t, \tau)$ können wir das Verhältnis des partiellen Zuwuchses $\Delta_t f = f(t + \Delta t, \tau) - f(t, \tau)$ zu dem entsprechenden Zuwuchs der Bogenlänge σ_1 betrachten und dann zur Grenze $\Delta t = 0$ übergehen. Den Grenzwert von $\frac{\Delta_t f}{\Delta \sigma_1}$ bezeichnen wir mit $\frac{df}{d\sigma_1}$ und erhalten:

$$\frac{df}{d\sigma_1} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{f_1(t + \Delta t, \tau) - f_1(t, \tau)}{\int\limits_t^{t + \Delta t} \sqrt{E}\, dt} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Entsprechend fassen wir das Verhältnis des partiellen Zuwuchses $\Delta_\tau f = f(t, \tau + \Delta \tau) - f(t, \tau)$ zu dem zugehörigen Zuwuchs der Bogenlänge σ_2 auf einer Kurve $t = \text{const.}$ ins Auge und bezeichnen seinen Grenzwert mit $\frac{df}{d\sigma_2}$, so daß:

$$\frac{df}{d\sigma_2} = \lim_{(\Delta \tau = 0)} \frac{f(t, \tau + \Delta \tau) - f(t, \tau)}{\int\limits_\tau^{\tau + \Delta \tau} \sqrt{G}\, d\tau} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial f}{\partial \tau}.$$

Hierdurch sind zwei an einer beliebigen Funktion von t und τ ausführbare Rechnungsoperationen definiert, die wir **Ableitungen nach den Bogenlängen** σ_1 **oder** σ_2 nennen wollen. Der Ausdruck **Ableitung** rechtfertigt sich aus dem Umstand, daß die fraglichen Operationen Grenzwerte von Differenzenquotienten liefern. Die Bezeichnung Ableitung **nach der Bogenlänge** σ_1 **oder** σ_2 rechtfertigt sich aus dem Umstand, daß die Nenner jener Differenzenquotienten die Bedeutung der Maßzahlen von Bogenlängen besitzen. Wir wenden bei der Bezeichnung jener Ableitungen die geraden „d" und nicht die runden „∂" an, um anzudeuten, daß im allgemeinen, d. h. bei Ausschluß der Translationsscharen (Nr. 1) die Bogenlängen σ_1 und σ_2

nicht als unabhängige Veränderliche eingeführt werden können, ohne daß die Scharen $t = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ von den Scharen σ_1, $\sigma_2 = \text{const.}$ verschieden sind.

Man sieht unmittelbar, daß für die Ableitungen nach Bogenlängen die für die Ableitungen nach einer unabhängigen Veränderlichen geltenden Regeln:

$$\frac{d\big(f(t,\tau) \pm g(t,\tau)\big)}{d\sigma_\alpha} = \frac{df}{d\sigma_\alpha} \pm \frac{dg}{d\sigma_\alpha},$$

$$\frac{df(t,\tau)g(t,\tau)}{d\sigma_\alpha} = f\frac{dg}{d\sigma_\alpha} + g\frac{df}{d\sigma_\alpha},$$

$$\frac{d\dfrac{f(t,\tau)}{g(t,\tau)}}{d\sigma_\alpha} = \frac{g\dfrac{df}{d\sigma_\alpha} - f\dfrac{dg}{d\sigma_\alpha}}{g^2}$$

ebenfalls gelten.

3. Wiederholte Anwendung der Ableitungen nach Bogenlängen auf die Koordinaten. Es empfiehlt sich, hier folgende Bestimmung über die positiven Halbnormalen der Kurven $\tau = \text{const.}$, $t = \text{const.}$ zu treffen. Bei den ersteren behalten wir die frühere Festsetzung bei, nach welcher die positive Halbnormale aus der positiven Halbtangente durch eine positive Drehung von der Größe $\frac{\pi}{2}$ entsteht. Aber bei den Kurven $t = \text{const.}$ wollen wir die positive Halbnormale durch eine negative Drehung aus der positiven Halbtangente entstehend annehmen. Es hat dies den Vorteil, daß man bei rechtwinkligen Scharen jede positive Halbtangente mit der positiven Halbnormale der Orthogonalkurve zusammenfallen lassen kann. Hinsichtlich der Bezeichnung mehrfacher Ableitungen nach Bogenlängen setzen wir fest, daß unter dem Zeichen $\frac{d^2f(t,\tau)}{d\sigma_\alpha^2}$ die Ableitung von $\frac{df(t,\tau)}{d\sigma_\alpha}$ nach σ_α, unter dem Zeichen $\frac{d^2f(t,\tau)}{d\sigma_\alpha d\sigma_\beta}$ die Ableitung von $\frac{df(t,\tau)}{d\sigma_\alpha}$ nach σ_β verstanden werden soll. Dabei ist die Aufeinanderfolge von α und β nicht gleichgültig; $\frac{d^2f(t,\tau)}{d\sigma_\beta d\sigma_\alpha}$ bedeutet die Ableitung von $\frac{df(t,\tau)}{d\sigma_\beta}$ nach σ_α, und dies ist, wie wir sehen werden, im allgemeinen nicht gleich $\frac{d^2f(t,\tau)}{d\sigma_\alpha d\sigma_\beta}$.

Der Krümmungshalbmesser der Kurven $\tau = \text{const.}$ werde mit ϱ_1, derjenige der Kurven $t = \text{const.}$ mit ϱ_2 bezeichnet.

Die Anwendung der Frenetschen Formeln (S. 24) ergibt:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{d\sigma_1^2} = -\dfrac{1}{\varrho_1}\dfrac{dy}{d\sigma_1}, & \dfrac{d^2y}{d\sigma_1^2} = \dfrac{1}{\varrho_1}\dfrac{dx}{d\sigma_1}, \\[2ex] \dfrac{d^2x}{d\sigma_2^2} = \dfrac{1}{\varrho_2}\dfrac{dy}{d\sigma_2}, & \dfrac{d^2y}{d\sigma_2^2} = -\dfrac{1}{\varrho_2}\dfrac{dx}{d\sigma_2}. \end{cases}$$

Den Winkel, unter dem sich die Einzelkurven der Scharen $\tau = \text{const.}$ und $t = \text{const.}$ schneiden, nennen wir φ und beschränken

uns auf einen Ebenenteil, innerhalb dessen φ an keiner Stelle verschwindet.

Wird:

$$\frac{dx}{d\sigma_1} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{d\sigma_1} = \sin\alpha,$$

$$\frac{dx}{d\sigma_2} = \cos\beta, \quad \frac{dy}{d\sigma_2} = \sin\beta$$

gesetzt, so soll unter φ der Winkel $\beta - \alpha$ verstanden werden.

Dann ist:

$$\frac{dx}{d\sigma_1}\frac{dx}{d\sigma_2} + \frac{dy}{d\sigma_1}\frac{dy}{d\sigma_2} = \cos\varphi,$$

$$\frac{dx}{d\sigma_1}\frac{dy}{d\sigma_2} - \frac{dy}{d\sigma_1}\frac{dx}{d\sigma_2} = \sin\varphi.$$

Bildet man von beiden Seiten dieser Gleichungen die Ableitungen nach σ_2 und σ_1, so findet man:

$$\frac{d^2x}{d\sigma_1 d\sigma_2} = \left(-\sin\varphi\frac{dx}{d\sigma_2} + \cos\varphi\frac{dy}{d\sigma_2}\right)\left(\frac{d\varphi}{d\sigma_2} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = \frac{dy}{d\sigma_1}\left(\frac{d\varphi}{d\sigma_2} + \frac{1}{\varrho_2}\right),$$

$$\frac{d^2y}{d\sigma_1 d\sigma_2} = \left(-\sin\varphi\frac{dy}{d\sigma_2} - \cos\varphi\frac{dx}{d\sigma_2}\right)\left(\frac{d\varphi}{d\sigma_2} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = -\frac{dx}{d\sigma_1}\left(\frac{d\varphi}{d\sigma_2} + \frac{1}{\varrho_2}\right),$$

$$\frac{d^2x}{d\sigma_2 d\sigma_1} = \left(-\sin\varphi\frac{dx}{d\sigma_1} - \cos\varphi\frac{dy}{d\sigma_1}\right)\left(\frac{d\varphi}{d\sigma_1} + \frac{1}{\varrho_1}\right) = -\frac{dy}{d\sigma_2}\left(\frac{d\varphi}{d\sigma_1} + \frac{1}{\varrho_1}\right),$$

$$\frac{d^2y}{d\sigma_2 d\sigma_1} = \left(-\sin\varphi\frac{dy}{d\sigma_1} + \cos\varphi\frac{dx}{d\sigma_1}\right)\left(\frac{d\varphi}{d\sigma_1} + \frac{1}{\varrho_1}\right) = \frac{dx}{d\sigma_2}\left(\frac{d\varphi}{d\sigma_1} + \frac{1}{\varrho_1}\right).$$

Um die geometrische Bedeutung der Ausdrücke $\frac{d\varphi}{d\sigma_1} + \frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{d\varphi}{d\sigma_2} + \frac{1}{\varrho_2}$ zu finden, fassen wir eine beliebige Einzelkurve einer Schar als den Ort der Berührungspunkte von Tangenten der anderen Schar auf. Da können wir einmal die Drehungen betrachten, durch welche diese Tangenten in benachbarte Lagen übergehen, und dann können wir die Einhüllende dieser Tangenten betrachten.

a) Drehungsmittelpunkte. Lassen wir t ungeändert und geben der Zahl τ den Zuwachs $\Delta\tau$, so gibt es eine bestimmte Drehung der Ebene, die den Punkt $P(x,y)$ in den Punkt $P'\big(f_1(t,\tau+\Delta\tau), f_2(t,\tau+\Delta\tau)\big)$ überführt und zugleich die in P berührende Tangente der Kurve $\tau=$const. in die in P' berührende Tangente der Kurve $\tau + \Delta\tau =$ const. Ebenso gibt es, wenn wir τ ungeändert lassen und der Zahl t den Zuwachs Δt geben, eine bestimmte Drehung, welche den Punkt $P(x,y)$ in den Punkt $P''\big(f_1(t+\Delta t,\tau),\ f_2(t+\Delta t,\tau)\big)$ überführt und zugleich die in P berührende Tangente der Kurve $t=$ const. in die in P'' berührende Tangente der Kurve $t+\Delta t =$ const. Lassen wir $\Delta\tau$ und Δt in die Null übergehen, so nähern sich die Mittelpunkte beider Drehungen

bestimmten Grenzlagen. Die Koordinaten derselben erhalten wir, indem wir in den S. 12 aufgestellten Formeln für ξ_0, η_0 im ersten Fall:

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \xi_1 = x + \frac{dx}{d\sigma_1}, \quad \eta_1 = y + \frac{dy}{d\sigma_1}, \quad \vartheta = \tau,$$

im zweiten:

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \xi_1 = x + \frac{dx}{d\sigma_2}, \quad \eta_1 = y + \frac{dy}{d\sigma_2}, \quad \vartheta = t$$

setzen. So ergibt sich für die Koordinaten des ersten Drehungsmittelpunkts ($\Delta\tau = 0$):

$$\xi' = x + \frac{dy}{d\sigma_2} \frac{\cos\varphi}{\frac{dy}{d\sigma_2}\frac{d^2x}{d\sigma_1 d\sigma_2} - \frac{dx}{d\sigma_2}\frac{d^2y}{d\sigma_1 d\sigma_2}},$$

$$\eta' = y - \frac{dx}{d\sigma_2} \frac{\cos\varphi}{\frac{dy}{d\sigma_2}\frac{d^2x}{d\sigma_1 d\sigma_2} - \frac{dx}{d\sigma_2}\frac{d^2y}{d\sigma_1 d\sigma_2}},$$

und für die Koordinaten des zweiten Drehungsmittelpunkts ($\Delta t = 0$):

$$\xi'' = x + \frac{dy}{d\sigma_1} \frac{\cos\varphi}{\frac{dy}{d\sigma_1}\frac{d^2x}{d\sigma_2 d\sigma_1} - \frac{dx}{d\sigma_1}\frac{d^2y}{d\sigma_2 d\sigma_1}},$$

$$\eta'' = y - \frac{dx}{d\sigma_1} \frac{\cos\varphi}{\frac{dy}{d\sigma_1}\frac{d^2x}{d\sigma_2 d\sigma_1} - \frac{dx}{d\sigma_1}\frac{d^2y}{d\sigma_2 d\sigma_1}}.$$

Nun folgt aus der Gleichung:

$$\frac{dx}{d\sigma_1}\frac{dy}{d\sigma_2} - \frac{dy}{d\sigma_1}\frac{dx}{d\sigma_2} = \sin\varphi$$

sowohl:

$$\frac{dx}{d\sigma_1}\frac{d^2y}{d\sigma_2 d\sigma_1} - \frac{dy}{d\sigma_1}\frac{d^2x}{d\sigma_2 d\sigma_1} = \cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{d\sigma_1} + \frac{1}{\varrho_1}\right),$$

als auch:

$$\frac{dy}{d\sigma_2}\frac{d^2x}{d\sigma_1 d\sigma_2} - \frac{dx}{d\sigma_2}\frac{d^2y}{d\sigma_1 d\sigma_2} = \cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{d\sigma_2} + \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

Da sich der erste Drehungsmittelpunkt auf der Normalen der Kurve $t = \text{const.}$, der zweite auf der Normalen der Kurve $\tau = \text{const.}$ befindet, bezeichnen wir die Maßzahl des Halbmessers der ersten Drehung mit r_2, die des Halbmessers der zweiten Drehung mit r_1. Dabei ist eine solche Maßzahl positiv oder negativ, je nachdem sich der entsprechende Drehungsmittelpunkt im positiven oder negativen Teil der entsprechenden Normalen befindet. Unter dieser Festsetzung erhält man:

$$(2) \qquad \frac{1}{r_1} = \frac{d\varphi}{d\sigma_1} + \frac{1}{\varrho_1}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{d\varphi}{d\sigma_2} + \frac{1}{\varrho_2}.$$

Die obigen Formeln für die zweiten Ableitungen der Koordinaten nach verschiedenen Bogenlängen nehmen jetzt die einfache Gestalt an:

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{d\sigma_1\,d\sigma_2} = \dfrac{1}{r_2}\dfrac{dy}{d\sigma_1}, & \dfrac{d^2x}{d\sigma_2\,d\sigma_1} = -\dfrac{1}{r_1}\dfrac{dy}{d\sigma_2}, \\ \dfrac{d^2y}{d\sigma_1\,d\sigma_2} = -\dfrac{1}{r_2}\dfrac{dx}{d\sigma_1}, & \dfrac{d^2y}{d\sigma_2\,d\sigma_1} = \dfrac{1}{r_1}\dfrac{dx}{d\sigma_2}. \end{cases}$$

b) **Berührungspunkte.** Um die Einhüllende der Tangenten der Kurven $\tau = \text{const.}$ längs einer Kurve $t = \text{const.}$ zu bestimmen, betrachten wir den Schnittpunkt der in den Punkten (t, τ) und $(t, \tau + \Delta\tau)$ berührenden Tangenten der Kurven $\tau = \text{const.}$ und $\tau + \Delta\tau = \text{const.}$ Die Gleichungen der ersten dieser Tangenten sind:

$$\xi = x + h\frac{dx}{d\sigma_1}, \quad \eta = y + h\frac{dy}{d\sigma_1},$$

die der zweiten:

$$\xi = x + \Delta_\tau x + l\left(\frac{dx}{d\sigma_1} + \Delta_\tau\frac{dx}{d\sigma_1}\right), \quad \eta = y + \Delta_\tau y + l\left(\frac{dy}{d\sigma_1} + \Delta_\tau\frac{dy}{d\sigma_1}\right).$$

Für den Schnittpunkt beider Tangenten folgt:

$$h = \frac{\Delta_\tau x\left(\dfrac{dy}{d\sigma_1} + \Delta_\tau\dfrac{dy}{d\sigma_1}\right) - \Delta_\tau y\left(\dfrac{dx}{d\sigma_1} + \Delta_\tau\dfrac{dx}{d\sigma_1}\right)}{\dfrac{dx}{d\sigma_1}\Delta_\tau\dfrac{dy}{d\sigma_1} - \dfrac{dy}{d\sigma_1}\Delta_\tau\dfrac{dx}{d\sigma_1}}.$$

Da:

$$\Delta_\tau x = \frac{dx}{d\sigma_2}\sqrt{G}\,\Delta\tau + \cdots, \quad \Delta_\tau\frac{dx}{d\sigma_1} = \frac{d^2x}{d\sigma_1\,d\sigma_2}\sqrt{G}\,\Delta\tau \cdots, \quad \text{usw.},$$

so ergibt sich für $\Delta\tau = 0$:

$$h = \frac{\dfrac{dy}{d\sigma_1}\dfrac{dx}{d\sigma_2} - \dfrac{dy}{d\sigma_2}\dfrac{dx}{d\sigma_1}}{\dfrac{dx}{d\sigma_1}\dfrac{d^2y}{d\sigma_1\,d\sigma_2} - \dfrac{dy}{d\sigma_1}\dfrac{d^2x}{d\sigma_1\,d\sigma_2}} = r_2 \sin\varphi.$$

Dies zeigt, daß der Berührungspunkt der zu (t, τ) gehörenden Tangente der Kurve $\tau = \text{const.}$ auf der Einhüllenden der betrachteten Tangentenschar erhalten wird, wenn man den zu r_2 gehörenden Drehungsmittelpunkt senkrecht auf die fragliche Tangente projiziert.

Ganz entsprechend können wir den Schnittpunkt zweier zu den Werten (t, τ) und $t + \Delta t, \tau$ gehörender Tangenten der Kurven $t = \text{const.}$ und $t + \Delta t = \text{const.}$ betrachten und dann zur Grenze $\Delta t = 0$ übergehen. Die Koordinaten des Schnittpunkts werden dann:

$$\xi = x + r_1 \sin\varphi\frac{dx}{d\sigma_2}, \quad \eta = y + r_1 \sin\varphi\frac{dy}{d\sigma_2}.$$

Der Berührungspunkt der zu (t, τ) gehörenden Tangente der Kurve $t = \text{const.}$ auf der Einhüllenden der Tangenten der Kurven

$t = \text{const.}$ bei festgehaltenem τ ist somit die senkrechte Projektion des zu r_1 gehörenden Drehungsmittelpunkts auf die erstgenannte Tangente.

Bemerkung. Die Zahlen r_1 und r_2 dürften hier zum erstenmal in ihrer kinematischen Bedeutung auftreten. Bei Aoust (Analyse infinitésimale des courbes planes. Paris 1873, S. 363) sind die Zahlen $\frac{1}{r_1}$ und $\frac{1}{r_2}$ unter dem Namen Seitenkrümmungen benutzt und ihre Ausdrücke durch die beiden Werte von h richtig angegeben. Aber diese Seitenkrümmungen treten nur als Quotienten unendlich kleiner Größen auf, so daß die Festlegung der entsprechenden Mittelpunkte der Seitenkrümmungen nur nach Willkür vorgenommen werden kann.

4. Wiederholte Anwendung der Ableitungen nach den Bogenlängen σ_1 und σ_2 auf eine beliebige Funktion.

Wir haben hier zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem eine für den Wertbereich der Veränderlichen t, τ definierte, oder eine für den Wertbereich der Veränderlichen x, y definierte Funktion vorgelegt ist. Eine Funktion von t und τ nennt man auch eine Funktion des Ortes in der t, τ-Ebene, eine Funktion von x und y eine solche des Ortes in der x, y-Ebene.

a) Für eine Funktion von t und τ erhalten wir:

$$\frac{df(t,\tau)}{d\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial f(t,\tau)}{\partial t}, \quad \frac{df(t,\tau)}{d\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial f(t,\tau)}{\partial \tau},$$

$$\frac{d^2 f(t,\tau)}{d\sigma_1\, d\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{E}\sqrt{G}} \frac{\partial^2 f(t,\tau)}{\partial t \partial \tau} - \frac{df(t,\tau)}{d\sigma_1} \frac{d\log\sqrt{E}}{d\sigma_2},$$

$$\frac{d^2 f(t,\tau)}{d\sigma_2\, d\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{E}\sqrt{G}} \frac{\partial^2 f(t,\tau)}{\partial t \partial \tau} - \frac{df(t,\tau)}{d\sigma_2} \frac{d\log\sqrt{G}}{d\sigma_1},$$

somit:

$$\frac{d^2 f(t,\tau)}{d\sigma_1\, d\sigma_2} - \frac{d^2 f(t,\tau)}{d\sigma_2\, d\sigma_1} = -\frac{df(t,\tau)}{d\sigma_1} \frac{d\log\sqrt{E}}{d\sigma_2} + \frac{df(t,\tau)}{d\sigma_2} \frac{d\log\sqrt{G}}{d\sigma_1}. \tag{4}$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Reihenfolge der Ableitungen nach den Bogenlängen σ_1 und σ_2 nur dann ohne Einfluß ist, wenn E nur von t, und G nur von τ abhängt, d. h. mit anderen Worten, wenn die Kurvenscharen $\sigma_1 = \text{const.}$, $\sigma_2 = \text{const.}$ mit den Scharen $\tau = \text{const.}$, $t = \text{const.}$ zusammenfallen.

Um die geometrische Bedeutung der Ausdrücke $\frac{d\log\sqrt{E}}{d\sigma_2}$ und $\frac{d\log\sqrt{G}}{d\sigma_1}$ aufzufinden, setzen wir in der letzten Gleichung zuerst $f(t,\tau) = f_1(t,\tau) = x$, sodann $f(t,\tau) = f_2(t,\tau) = y$. Dann wird nach (3):

$$-\frac{dx}{d\sigma_1} \frac{d\log\sqrt{E}}{d\sigma_2} + \frac{dx}{d\sigma_2} \frac{d\log\sqrt{G}}{d\sigma_1} = \frac{1}{r_2} \frac{dy}{d\sigma_1} + \frac{1}{r_1} \frac{dy}{d\sigma_2},$$

$$-\frac{dy}{d\sigma_1} \frac{d\log\sqrt{E}}{d\sigma_2} + \frac{dy}{d\sigma_2} \frac{d\log\sqrt{G}}{d\sigma_1} = -\frac{1}{r_2} \frac{dx}{d\sigma_1} - \frac{1}{r_1} \frac{dx}{d\sigma_2},$$

folglich:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\log\sqrt{E}}{d\sigma_2} = -\dfrac{1}{r_2}\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} - \dfrac{1}{r_1\sin\varphi}, \\ \dfrac{d\log\sqrt{G}}{d\sigma_1} = -\dfrac{1}{r_2}\dfrac{1}{\sin\varphi} - \dfrac{1}{r_1}\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}. \end{cases}$$

Die hier auf den rechten Seiten befindlichen Ausdrücke besitzen eine einfache geometrische Bedeutung. Es liegt nahe, die Schnittpunkte der im Punkte (t, τ) berührenden Tangenten der Kurven $\tau = \text{const.}$, $t = \text{const.}$ mit der Verbindungslinie der beiden Drehungsmittelpunkte aufzusuchen. Die letztere besitzt die Gleichung:

$$(\xi - x)\left(\frac{1}{r_1}\frac{dx}{d\sigma_2} + \frac{1}{r_2}\frac{dx}{d\sigma_1}\right) + (\eta - y)\left(\frac{1}{r_1}\frac{dy}{d\sigma_2} + \frac{1}{r_2}\frac{dy}{d\sigma_1}\right) = \sin\varphi.$$

Die Koordinaten des Schnittpunkts dieser Geraden mit der Tangente der Kurve $t = \text{const.}$ sollen mit $x + t_2\dfrac{dx}{d\sigma_2}$, $y + t_2\dfrac{dy}{d\sigma_2}$; die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden mit der Tangente der Kurve $\tau = \text{const.}$ sollen mit $x + t_1\dfrac{dx}{d\sigma_1}$, $y + t_1\dfrac{dy}{d\sigma_1}$ bezeichnet werden. Dann ergibt sich:

$$(6)\qquad \frac{1}{t_1} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \quad \frac{1}{t_2} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{\cos\varphi}{r_2}\right).$$

Man hat daher auch:

$$(7)\qquad \frac{d\log\sqrt{E}}{d\sigma_2} = -\frac{1}{t_2}, \quad \frac{d\log\sqrt{G}}{d\sigma_1} = -\frac{1}{t_1}.$$

Entnimmt man den Gleichungen (5) die Ausdrücke von $\dfrac{1}{r_1}$ und $\dfrac{1}{r_2}$, so erhält die Gleichung der Verbindungslinie der Drehungsmittelpunkte die Gestalt:

$$(8)\qquad \begin{aligned} &(\xi - x)\left(\frac{dy}{d\sigma_1}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial\tau} - \frac{dy}{d\sigma_2}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial t}\right) \\ &- (\eta - y)\left(\frac{dx}{d\sigma_1}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial\tau} - \frac{dx}{d\sigma_2}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial t}\right) = \sqrt{E}\sqrt{G}\sin\varphi. \end{aligned}$$

b) Für eine Funktion von x und y haben wir:

$$\frac{df(x,y)}{d\sigma_1} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\sigma_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\sigma_1}, \quad \frac{df}{d\sigma_2} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\sigma_2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\sigma_2},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2f(x,y)}{d\sigma_1\,d\sigma_2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{dx}{d\sigma_1}\frac{dx}{d\sigma_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{dx}{d\sigma_1}\frac{dy}{d\sigma_2} + \frac{dy}{d\sigma_1}\frac{dx}{d\sigma_2}\right) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{d\sigma_1}\frac{dy}{d\sigma_2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2x}{d\sigma_1\,d\sigma_2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{d\sigma_1\,d\sigma_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2f(x,y)}{d\sigma_2\,d\sigma_1} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{dx}{d\sigma_1}\frac{dx}{d\sigma_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{dx}{d\sigma_1}\frac{dy}{d\sigma_2} + \frac{dy}{d\sigma_1}\frac{dx}{d\sigma_2}\right) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{d\sigma_1}\frac{dy}{d\sigma_2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2x}{d\sigma_1\,d\sigma_2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{d\sigma_1\,d\sigma_2}. \end{aligned}$$

Daher folgt:

$$(9)\left\{\begin{aligned}\frac{d^2 f(x,y)}{d\sigma_1 d\sigma_2}-\frac{d^2 f(x,y)}{d\sigma_2 d\sigma_1}&=\frac{\partial f}{\partial x}\left(-\frac{dx}{d\sigma_1}\frac{d\log\sqrt{E}}{d\sigma_2}+\frac{dx}{d\sigma_2}\frac{d\log\sqrt{G}}{d\sigma_1}\right)\\&\quad+\frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{dy}{d\sigma_1}\frac{d\log\sqrt{E}}{d\sigma_2}+\frac{dy}{d\sigma_2}\frac{d\log\sqrt{G}}{d\sigma_1}\right)\\&=-\frac{df}{d\sigma_1}\frac{d\log\sqrt{E}}{d\sigma_2}+\frac{df}{d\sigma_2}\frac{d\log\sqrt{G}}{d\sigma_1}.\end{aligned}\right.$$

5. Fundamentalgleichungen. Mit dem Namen Fundamentalgleichungen belegen wir die Differentialgleichungen erster Ordnung, welche zwischen den Größen $\varrho_1, \varrho_2, r_1, r_2$ bestehen.

Nehmen wir in der Beziehung (4) statt $f(t, \tau)$ die Funktion $\frac{dx}{d\sigma_1}$, sodann $\frac{dx}{d\sigma_2}$, so folgt:

$$\frac{d^3x}{d\sigma_1^2 d\sigma_2}-\frac{d^3x}{d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_1}=-\frac{d^2x}{d\sigma_1^2}\frac{d\log\sqrt{E}}{d\sigma_2}+\frac{d^2x}{d\sigma_1 d\sigma_2}\frac{d\log\sqrt{G}}{d\sigma_1},$$

$$\frac{d^3x}{d\sigma_2 d\sigma_1 d\sigma_2}-\frac{d^3x}{d\sigma_2^2 d\sigma_1}=-\frac{d^2x}{d\sigma_2 d\sigma_1}\frac{d\log\sqrt{E}}{d\sigma_2}+\frac{d^2x}{d\sigma_2^2}\frac{d\log\sqrt{G}}{d\sigma_1}.$$

Wenden wir nun die Formeln (1) und (3) an, so ergibt eine einfache Rechnung:

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d\frac{1}{\varrho_1}}{d\sigma_2}+\frac{d\frac{1}{r_2}}{d\sigma_1}&=-\frac{1}{\varrho_1}\frac{d\log\sqrt{E}}{d\sigma_2}-\frac{1}{r_2}\frac{d\log\sqrt{G}}{d\sigma_1},\\\frac{d\frac{1}{r_1}}{d\sigma_2}+\frac{d\frac{1}{\varrho_2}}{d\sigma_1}&=-\frac{1}{r_1}\frac{d\log\sqrt{E}}{d\sigma_2}-\frac{1}{\varrho_2}\frac{d\log\sqrt{G}}{d\sigma_1}.\end{aligned}\right.$$

Hiermit sind die Fundamentalgleichungen gefunden. Dieselben werden durch eine einzige Gleichung vertreten, wenn der Winkel φ konstant ist. Alsdann wird $r_1 = \varrho_1$, $r_2 = \varrho_2$, und wir erhalten an Stelle des Systems (10) bei Anwendung der Gleichungen (5) die eine Fundamentalgleichung:

$$(11)\qquad\frac{d\frac{1}{\varrho_1}}{d\sigma_2}+\frac{d\frac{1}{\varrho_2}}{d\sigma_1}=\frac{1}{\sin\varphi}\left\{\frac{1}{\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_2^2}+\frac{2\cos\varphi}{\varrho_1\varrho_2}\right\}.$$

§ 20. Allgemeiner Satz über Drehungsmittelpunkte.

Die naheliegende Aufgabe, die Krümmungsmittelpunkte der orthogonalen Trajektorien (Kurven senkrechter Durchdringung) zweier gegebener Scharen zu bestimmen, wird uns zu einem wichtigen Satz über die Drehungsmittelpunkte führen.

Die Bogenlänge der orthogonalen Trajektorien der Kurven $\tau = \text{const.}$ bezeichnen wir mit σ_3 und rechnen sie als wachsend in der Richtung der positiven Halbnormalen der Kurven $\tau = \text{const.}$ Dann ist:

$$\frac{dx}{d\sigma_3} = -\frac{dy}{d\sigma_1}, \quad \frac{dy}{d\sigma_3} = \frac{dx}{d\sigma_1}.$$

Die Bogenlänge der orthogonalen Trajektorien der Kurven $t = \text{const.}$ bezeichnen wir mit σ_4 und rechnen sie als wachsend im Sinne der positiven Halbnormalen der Kurven $t = \text{const.}$ Dann ist:

$$\frac{dx}{d\sigma_4} = \frac{dy}{d\sigma_2}, \quad \frac{dy}{d\sigma_4} = -\frac{dx}{d\sigma_2}.$$

Die positiven Halbnormalen der orthogonalen Trajektorien der Kurven $\tau = \text{const.}$ bzw. $t = \text{const.}$ sollen mit den positiven Halbtangenten der Kurven $\tau = \text{const.}$ bzw. $t = \text{const.}$ zusammenfallen.

Um die Ableitungen einer Funktion von t und τ, oder von x und y nach den Bogenlängen σ_3 und σ_4 zu definieren, drücken wir zunächst die Ableitungen der Koordinaten nach σ_3 und σ_4 durch diejenigen nach σ_1 und σ_2 aus.

Aus dem System:

$$-\frac{dx}{d\sigma_3}\frac{dy}{d\sigma_1} + \frac{dy}{d\sigma_3}\frac{dx}{d\sigma_1} = 1,$$

$$-\frac{dx}{d\sigma_3}\frac{dy}{d\sigma_2} + \frac{dy}{d\sigma_3}\frac{dx}{d\sigma_2} = \cos\varphi$$

folgt:

$$(1) \quad \frac{dx}{d\sigma_3} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{dx}{d\sigma_2} - \frac{dx}{d\sigma_1}\cos\varphi\right), \quad \frac{dy}{d\sigma_3} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{dy}{d\sigma_2} - \frac{dy}{d\sigma_1}\cos\varphi\right).$$

Aus dem System:

$$\frac{dx}{d\sigma_4}\frac{dy}{d\sigma_1} - \frac{dy}{d\sigma_4}\frac{dx}{d\sigma_1} = \cos\varphi,$$

$$\frac{dx}{d\sigma_4}\frac{dy}{d\sigma_2} - \frac{dy}{d\sigma_4}\frac{dx}{d\sigma_2} = 1$$

folgt:

$$(2) \quad \frac{dx}{d\sigma_4} = \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\frac{dx}{d\sigma_1} - \frac{dx}{d\sigma_2}\cos\varphi\right\}, \quad \frac{dy}{d\sigma_4} = \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\frac{dy}{d\sigma_1} - \frac{dy}{d\sigma_2}\cos\varphi\right\}.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhalten wir die Definitionsgleichungen für die Ableitungen einer Funktion von t und τ nach den Bogenlängen σ_3 und σ_4. Man hat zunächst:

$$\frac{dt}{d\sigma_3} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{dt}{d\sigma_2} - \frac{dt}{d\sigma_1}\cos\varphi\right), \quad \frac{d\tau}{d\sigma_3} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{d\tau}{d\sigma_2} - \frac{d\tau}{d\sigma_1}\cos\varphi\right),$$

$$\frac{dt}{d\sigma_4} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{dt}{d\sigma_1} - \frac{dt}{d\sigma_2}\cos\varphi\right), \quad \frac{d\tau}{d\sigma_4} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{d\tau}{d\sigma_1} - \frac{d\tau}{d\sigma_2}\cos\varphi\right),$$

und damit:

$$(3) \quad \frac{df(t,\tau)}{d\sigma_3} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{df}{d\sigma_2} - \frac{df}{d\sigma_1}\cos\varphi\right), \quad \frac{df(t,\tau)}{d\sigma_4} = \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\frac{df}{d\sigma_1} - \frac{df}{d\sigma_2}\cos\varphi\right\}.$$

Für eine Funktion von x und y ergibt sich:

$$(4)\qquad \frac{df(x,y)}{d\sigma_3} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\sigma_3} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\sigma_3}, \quad \frac{df(x,y)}{d\sigma_4} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\sigma_4} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\sigma_4}.$$

Da wir es hier mit vier Kurvenscharen zu tun haben, empfiehlt es sich zur Abkürzung die Kurven $\tau = \text{const.}$ mit dem Namen Kurven (σ_1), die Kurven $t = \text{const.}$ mit dem Namen Kurven (σ_2) zu belegen, und die orthogonalen Trajektorien der Kurven $\tau = \text{const.}$ bzw. $t = \text{const.}$ als Kurven (σ_3) bezüglich als Kurven (σ_4) zu bezeichnen. Den Krümmungshalbmesser der Kurven (σ_3) bzw. (σ_4) nennen wir ϱ_3 bzw. ϱ_4. Für diese Größen haben wir einerseits die Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{d\sigma_3^2} = \frac{1}{\varrho_3}\frac{dx}{d\sigma_1}, \quad \frac{d^2y}{d\sigma_3^2} = \frac{1}{\varrho_3}\frac{dy}{d\sigma_1}, \quad \frac{d^2x}{d\sigma_4^2} = \frac{1}{\varrho_4}\frac{dx}{d\sigma_2}, \quad \frac{d^2y}{d\sigma_4^2} = \frac{1}{\varrho_4}\frac{dy}{d\sigma_2},$$

anderseits ist:

$$\frac{d^2x}{d\sigma_3^2} = -\frac{d\frac{dy}{d\sigma_1}}{d\sigma_3} = \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\frac{d^2y}{d\sigma_1^2}\cos\varphi - \frac{d^2y}{d\sigma_1\,d\sigma_2}\right\} = \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\frac{\cos\varphi}{\varrho_1} + \frac{1}{r_2}\right\}\frac{dx}{d\sigma_1},$$

$$\frac{d^2x}{d\sigma_4^2} = \frac{d\frac{dy}{d\sigma_2}}{d\sigma_4} = \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\frac{d^2y}{d\sigma_2\,d\sigma_1} - \frac{d^2y}{d\sigma_2^2}\cos\varphi\right\} = \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\frac{1}{r_1} + \frac{\cos\varphi}{\varrho_2}\right\}\frac{dx}{d\sigma_2}.$$

Wir erhalten somit:

$$(5)\qquad \frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\frac{\cos\varphi}{\varrho_1} + \frac{1}{r_2}\right\}, \quad \frac{1}{\varrho_4} = \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\frac{\cos\varphi}{\varrho_2} + \frac{1}{r_1}\right\},$$

und daraus:

$$(6)\qquad \frac{1}{r_1} = \frac{\sin\varphi}{\varrho_4} - \frac{\cos\varphi}{\varrho_2}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{\sin\varphi}{\varrho_3} - \frac{\cos\varphi}{\varrho_1}.$$

Diese Gleichungen enthalten die geometrisch wichtige Tatsache, daß sich der zu r_1 gehörende Drehungsmittelpunkt auf der Geraden befindet, welche die zu ϱ_2 und ϱ_4 gehörenden Krümmungsmittelpunkte enthält, und daß sich der zu r_2 gehörende Drehungsmittelpunkt auf der Geraden befindet, welche die zu ϱ_1 und ϱ_3 gehörenden Krümmungsmittelpunkte enthält. Die Gleichungen dieser beiden Geraden sind nämlich die folgenden:

$$(\xi - x)\left(\frac{1}{\varrho_2}\frac{dy}{d\sigma_2} + \frac{1}{\varrho_4}\frac{dx}{d\sigma_2}\right) - (\eta - y)\left(\frac{1}{\varrho_2}\frac{dx}{d\sigma_2} - \frac{1}{\varrho_4}\frac{dy}{d\sigma_2}\right) = 1,$$

$$(\xi - x)\left(\frac{1}{\varrho_3}\frac{dx}{d\sigma_1} - \frac{1}{\varrho_1}\frac{dy}{d\sigma_1}\right) + (\eta - y)\left(\frac{1}{\varrho_3}\frac{dy}{d\sigma_1} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{dx}{d\sigma_1}\right) = 1.$$

Der ersten dieser Gleichungen genügen die Koordinaten des zu r_1 gehörenden Drehungsmittelpunkts, nämlich:

$$\xi = x - \frac{\frac{dy}{d\sigma_1}}{\frac{\sin\varphi}{\varrho_4} - \frac{\cos\varphi}{\varrho_2}}, \quad \eta = y + \frac{\frac{dx}{d\sigma_1}}{\frac{\sin\varphi}{\varrho_4} - \frac{\cos\varphi}{\varrho_2}},$$

und der zweiten genügen die Koordinaten des zu r_2 gehörenden Drehungsmittelpunkts, nämlich:

$$\xi = x + \frac{\frac{dy}{d\sigma_2}}{\frac{\sin\varphi}{\varrho_3} - \frac{\cos\varphi}{\varrho_1}}, \quad \eta = y - \frac{\frac{dx}{d\sigma_2}}{\frac{\sin\varphi}{\varrho_3} - \frac{\cos\varphi}{\varrho_1}}.$$

Wollen wir unser Ergebnis durch eine Figur veranschaulichen, so ziehen wir am einfachsten von dem betrachteten Punkt P aus die vier positiven Halbtangenten C_1, C_2, C_3, C_4 der Kurven $\sigma_1 \ldots \sigma_4$. Die Krümmungsmittelpunkte werden durch K_1, K_2, K_3, K_4 bezeichnet, die Drehungsmittelpunkte durch D_1 (Endpunkt von r_1) und D_2 (Endpunkt von r_2). D_1 muß auf der durch K_2 und K_4 gehenden, D_2 auf der durch K_1 und K_3 gehenden Geraden liegen. Die Punkte, in denen die durch die Drehungsmittelpunkte gehende Gerade die Tangenten der Kurven $\tau = \text{const.}$ bzw. $t = \text{const.}$ schneidet, werden in der Figur mit T_1 und T_2 bezeichnet.

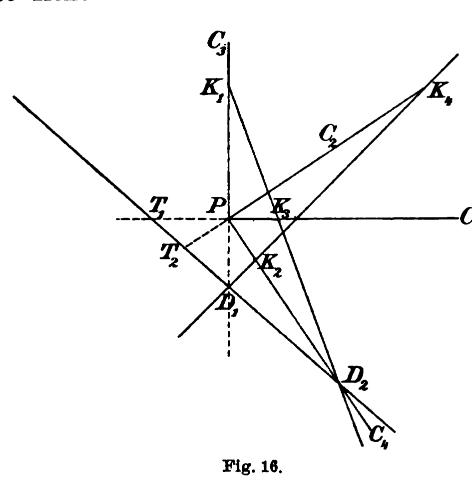


Fig. 16.

§ 21. Besondere Sätze über Drehungsmittelpunkte. Kurvennetz ohne Umwege.

Der Wert jeder theoretischen Betrachtung, wie sie hier in der Einführung der kinematischen Größen r_1 und r_2 vorliegt, wird durch den Umfang und die Bedeutung der Aufgaben gemessen, die sich mit ihrer Hilfe lösen lassen. Wir gehen daher dazu über, Sätze hinsichtlich der Größen r_1 und r_2 zu entwickeln.

1. Wenn die Schar $t = \text{const.}$ dadurch entsteht, daß von einer Einzelkurve derselben aus auf den Kurven $\tau = \text{const.}$ gleiche Bogenlängen abgetragen werden, so liegt die Gerade, welche die Drehungsmittelpunkte D_1 und D_2 enthält, parallel der Tangente der Kurve $t = \text{const.}$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus den ersten Gleichungen in (5) und (7) S. 116, nämlich:

$$\frac{d \log \sqrt{E}}{d\sigma_2} = -\frac{1}{t_2} = \frac{-1}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{\cos\varphi}{r_2}\right).$$

Damit die Kurven $t = \text{const.}$ die vorausgesetzte Eigenschaft besitzen, muß E von τ unabhängig sein, d. h. $\frac{d \log \sqrt{E}}{d \sigma_2}$ muß verschwinden. Wegen $\frac{1}{t_2} = 0$ ist die Verbindungslinie der Drehungsmittelpunkte parallel der Tangente der Kurve (σ_2), dasselbe ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{\cos \varphi}{r_2} = 0.$$

In der Figur 17 sind die positiven Halbtangenten durchgezogen, die negative Halbtangente der Kurve (σ_3) ist punktiert. Es bedeutet somit r_1 die negativ genommene Maßzahl der Strecke PD_1, während r_2 die Maßzahl der Strecke PD_2 bedeutet. Die Gerade $D_1 D_2$ ist parallel zur Geraden PK_4.

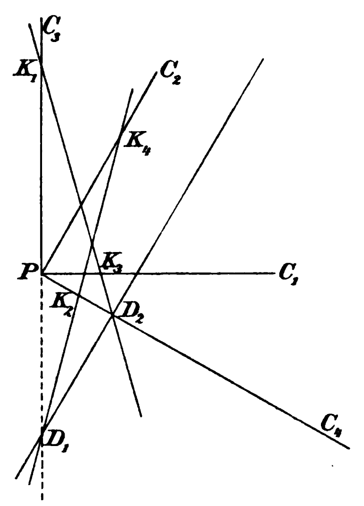


Fig. 17.

Schneiden sich die Scharen $\tau = \text{const.}$, $t = \text{const.}$ rechtwinklig, so kann der betrachtete Fall nur eintreten, wenn $\frac{1}{r_1}$, und damit, wenn $\frac{1}{\varrho_1}$ verschwindet. Hier werden die Kurven $\tau = \text{const.}$ durch gerade Linien vertreten, während die Kurven $t = \text{const.}$ eine Schar von Parallelkurven bilden.

Wenn die Kurven $t = \text{const.}$ die betrachtete Eigenschaft besitzen, und gleichzeitig die Kurven $\tau = \text{const.}$ aus einer ihrer Einzelkurven dadurch entstehen, daß man von ihr aus auf den Kurven $t = \text{const.}$ gleiche Bogenlängen abträgt, so kommt zu der vorigen Beziehung zwischen r_1 und r_2 noch die folgende, wegen $\frac{d \log \sqrt{G}}{d \sigma_1} = 0$ bestehende, nämlich:

$$\frac{\cos \varphi}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 0$$

hinzu. Jetzt verschwindet sowohl $\frac{1}{r_1}$ wie $\frac{1}{r_2}$. Da nun, wie wir sahen, D_1 auf der die Krümmungsmittelpunkte K_2 und K_4 enthaltenden, D_2 auf der die Krümmungsmittelpunkte K_1 und K_3 enthaltenden Geraden liegt, muß die erstere Gerade parallel der Tangente der Kurve (σ_3), die zweite parallel der Tangente der Kurve (σ_4) sein, oder auch: die Tangente der Kurve (σ_1) bzw. (σ_2) steht senkrecht auf der Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte der Kurven (σ_2) und (σ_4) bzw. (σ_1) und (σ_3). Aus dem Umstand, daß hier E nur von t, G nur

von τ abhängt, folgt, daß **wir es mit Translationsscharen zu tun haben.** (Fig. 18.)

Um ein Beispiel für den zuerst untersuchten Fall anzuführen, zeichnen wir in der x-, y-Ebene eine beliebige Kurve und drehen sie in positiver Richtung um den Koordinatenanfangspunkt. Die Gleichungen der Kurve in der Anfangslage seien:

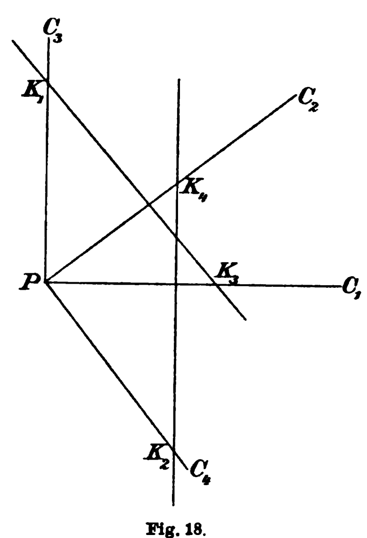


Fig. 18.

$$x = g_1(t), \quad y = g_2(t),$$

und t bedeute die Bogenlänge der Kurve. Bezeichnen wir den Drehungswinkel mit τ, so sind:

$$x = g_1(t) \cos \tau - g_2(t) \sin \tau,$$
$$y = g_1(t) \sin \tau + g_2(t) \cos \tau$$

die Gleichungen der betrachteten Schar, wenn τ als Parameter angesehen wird.

Die zugehörige Schar $t = \text{const.}$ besteht aus den Kreisen, die mit den Halbmessern $\sqrt{g_1^2 + g_2^2}$ um den Koordinatenanfangspunkt beschrieben sind. Je zwei dieser Kreise schneiden aus den Kurven $\tau = \text{const.}$ Stücke von gleicher Bogenlänge aus.

Hier zeigt eine einfache Rechnung, daß:

$$\cos \varphi = \frac{g_1 g_2' - g_2 g_1'}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{g_1 g_1' + g_2 g_2'}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\sigma_1} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} - \frac{1}{\varrho_1};$$

somit ist:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}.$$

Da φ nur von t abhängt und der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Kreise $t = \text{const.}$ jedesmal auf den negativen Halbnormalen dieser Kreise liegt, wird:

$$r_2 = -\sqrt{g_1^2 + g_2^2},$$

somit:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{\cos \varphi}{r_2} = 0.$$

Der Drehungsmittelpunkt D_2 fällt mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammen, der Drehungsmittelpunkt D_1 ist der Schnittpunkt der Tangente der Kurve (σ_2) mit der durch D_2 gelegten Parallelen zur Tangente der Kurve (σ_1). (Fig. 19.)

Man sieht leicht, daß sich bei diesem Beispiele noch eine zweite Kurvenschar ergibt, auf der irgend zwei Kreise $t =$ const. dieselben Bogenlängen abschneiden, wie auf den Kurven $\tau =$ const. Man braucht nur die Kurven $\tau =$ const. an der x-Achse zu spiegeln, um die zweite Schar zu erhalten. In der Figur 20 sind die Kurven $\tau =$ const. durchgezogen, die der zweiten Schar punktiert. Beschreiben wir nun von P_1 aus nach P_3 zwei auf Kurven unseres Netzes verlaufende Wege, etwa von P_1 bis P_4 und von P_2 bis P_3 auf durchgezogenen, von P_4 bis P_3 und von P_1 bis P_2 auf punktierten Kurven, so ergibt sich

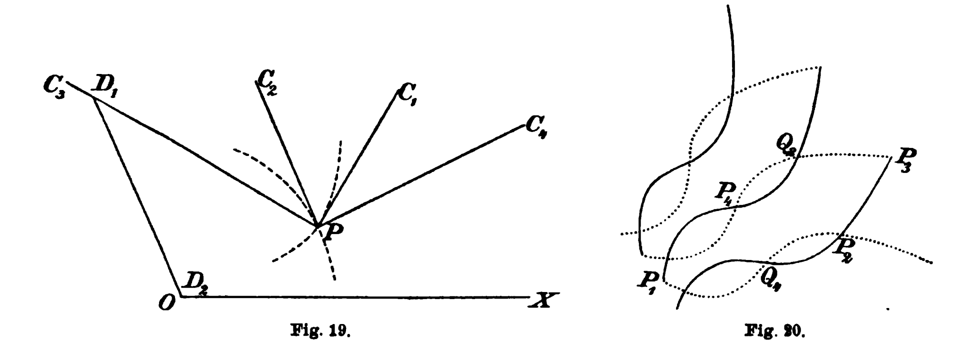


Fig. 19. Fig. 20.

beidemal dieselbe Wegelänge; denn sowohl die Bogenlängen $P_1 P_4$ und $P_1 Q_4$ sind einander gleich, als die Bogenlängen $P_4 Q_2$ und $Q_4 P_2$ und die Bogenlängen $Q_2 P_3$ und $P_2 P_3$, da sie jedesmal zwischen denselben Kreisen gelegen sind. Ein System von zwei einfach unendlichen Kurvenscharen oder, wie man sagt, ein Kurvennetz, in dem alle, auf Kurven des Netzes verlaufenden und zwei beliebig gewählte Punkte verbindenden Wege dieselbe Länge besitzen, hat G. Scheffers zuerst betrachtet und es ein Kurvennetz ohne Umwege genannt. (Berichte der mathem.-phys. Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. 57. S. 353. 1905. Vgl. R. v. Lilienthal, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 16. S. 204. 1907.) Hier ist aber eine wesentliche Einschränkung zu machen. In unserem Beispiel entfernt man sich beständig vom Koordinatenanfangspunkt, wenn man den Weg $P_1 P_4 Q_2 P_3$, und wenn man den Weg $P_1 Q_4 P_2 P_3$ beschreibt. Betrachtet man aber die beiden von P_4 nach P_2 führenden Wege $P_4 Q_2 P_3 P_2$ und $P_4 P_1 Q_4 P_2$, so sind sie nicht einander gleich, wenn $Q_2 P_3$ nicht gleich $P_4 P_1$ ist. Hier besteht vielmehr die Gleichung $P_4 P_3 - P_3 P_2 = P_1 P_2 - P_1 P_4$. Man hat daher auf jeder Kurve des Systems eine bestimmte Fortschreitungsrichtung festzulegen, in unserem Falle z. B. die, in der man sich vom Koordinatenanfangspunkt entfernt. Bei der Berechnung der Maßzahl einer Wegelänge sind alsdann die in dieser

Richtung zurückgelegten Strecken als positiv, die in der entgegengesetzten Richtung zurückgelegten Strecken als negativ in Rechnung zu setzen. Zwei Wege, die aus lauter positiv oder aus lauter negativ zu rechnenden Strecken bestehen, sind gleich. Sind aber zwei Wege sowohl aus positiv wie aus negativ zu nehmenden Strecken zusammengesetzt, so sind zwar die Maßzahlen der Wegelängen, wie wir sie eben definiert haben, gleich, aber die Längen selbst können sehr verschieden sein, so daß der eine Weg einen gründlichen Umweg im Vergleich zum anderen darstellen kann.

Wir werden im folgenden auf einem anderen, als dem von G. Scheffers verfolgten Pfade zu den fraglichen Kurvennetzen gelangen.

2. Wenn je zwei beliebig gewählte Kurven $(t = t_a)$, $(t = t_b)$ der Schar $t = \text{const.}$ aus den Kurven einer Schar $\tau = \text{const.}$ dieselbe Bogenlänge s_{ab} ausschneiden, und die Scharen $t = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ nicht zueinander senkrecht sind, so gibt es noch eine weitere Schar $\vartheta = \text{const.}$, aus deren Einzelkurven die beliebig gewählten Kurven $(t = t_a)$, $(t = t_b)$ ebenfalls die Bogenlänge s_{ab} ausschneiden.

Die Scharen $\tau = \text{const.}$, $t = \text{const.}$ seien dargestellt durch die Gleichungen:

$$x = f_1(t, \tau), \quad y = f_2(t, \tau),$$

in denen t die Bogenlänge der Kurven $\tau = \text{const.}$ bedeute, so daß E gleich Eins ausfällt. Wir betrachten τ als eine Funktion von t und ϑ (wodurch die Schar $t = \text{const.}$ nicht geändert wird) und suchen die Schar $\vartheta = \text{const.}$ so zu bestimmen, daß auch für sie die Veränderliche t die Bedeutung der Bogenlänge besitzt. Nehmen wir $\tau = g(t, \vartheta)$, so werden die Scharen $t = \text{const.}$, $\vartheta = \text{const.}$ durch die Gleichungen dargestellt:

$$x = f_1\big(t, g(t, \vartheta)\big), \quad y = f_2\big(t, g(t, \vartheta)\big).$$

Um die vollständigen partiellen Ableitungen von x und y nach t zu kennzeichnen, benutzen wir die bereits S. 93 angewandte Schreibweise, gemäß welcher für eine beliebige Funktion $F\big(t, g(t, \vartheta)\big)$ die vollständige Ableitung nach t, nämlich $\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial t}$ mit $\frac{\partial F}{d t}$ bezeichnet wird. Setzen wir:

$$E_1 = \left(\frac{\partial x}{d t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{d t}\right)^2, \quad F_1 = \frac{\partial x}{d t}\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial y}{d t}\frac{\partial y}{\partial \vartheta}, \quad G_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\right)^2,$$

so ergibt sich:

$$E_1 = 1 + 2F\frac{\partial g}{\partial t} + G\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2, \quad F_1 = \left(F + G\frac{\partial g}{\partial t}\right)\frac{\partial g}{\partial \vartheta}, \quad G_1 = G\left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta}\right)^2.$$

Damit E_1 gleich Eins werde, muß:

$$2F + G\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

sein. Nun kann F nur verschwinden, wenn die Schar $t = \text{const.}$ aus Parallelkurven, die Schar $\tau = \text{const.}$ aus ihren orthogonalen Trajektorien besteht. (S. 121.) Schließen wir diesen Fall aus, so liefert die vorstehende Differentialgleichung das g als eine Funktion von t und einem Parameter, den wir gleich ϑ nehmen können.

Wir erhalten $\sqrt{G_1}$ gleich $\sqrt{G}\frac{\partial g}{\partial \vartheta}$ oder gleich $-\sqrt{G}\frac{\partial g}{\partial \vartheta}$, je nachdem $\frac{\partial g}{\partial \vartheta}$ positiv oder negativ ist. Im ersten Fall folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial x}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial \tau}, \quad \frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial \tau},$$

und die dem wachsenden ϑ entsprechende Halbtangente der Kurve $t = \text{const.}$ fällt mit der dem wachsenden τ entsprechenden Halbtangente der Kurve $t = \text{const.}$ zusammen; im zweiten Fall fällt die erstere Halbtangente mit der dem abnehmenden τ entsprechenden Halbtangente der Kurve $t = \text{const.}$ zusammen. Nennen wir den Winkel zwischen den positiven Halbtangenten der Kurven $t = \text{const.}$, $\vartheta = \text{const.}$ φ_1, so wird im ersten Fall:

$$\cos\varphi_1 = \frac{-F}{\sqrt{G}} = -\cos\varphi,$$

im zweiten:

$$\cos\varphi_1 = \frac{F}{\sqrt{G}} = \cos\varphi;$$

somit halbiert die Tangente der Kurve $t = \text{const.}$ entweder den Nebenwinkel des von den positiven Halbtangenten der Kurven $\tau = \text{const.}$, $\vartheta = \text{const.}$ gebildeten Winkels, oder diesen Winkel selbst.

Eine zweite Eigenschaft der Kurven $\vartheta = \text{const.}$ erhalten wir, wenn wir das Netz der Kurven $\vartheta = \text{const.}$ und $\tau = \text{const.}$ betrachten. Zu diesem Zweck ist die Gleichung $\tau = g(t, \vartheta)$ nach t aufzulösen. Es ergebe sich $t = h(\tau, \vartheta)$, so daß: $1 = \frac{\partial h}{\partial \tau}\frac{\partial g}{\partial t}$. Unser Netz wird dargestellt durch die Gleichungen:

$$x = f_1(h(\tau, \vartheta), \tau), \quad y = f_2(h(\tau, \vartheta), \tau).$$

Man erhält:

$$E_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\right)^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial \vartheta}\right)^2, \quad F_2 = \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{d\tau} + \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\frac{\partial y}{d\tau} = \frac{\partial h}{\partial \vartheta}\left(\frac{\partial h}{\partial \tau} + F\right),$$

$$G_2 = \left(\frac{\partial h}{\partial \tau}\right)^2 + 2F\frac{\partial h}{\partial \tau} + G = \left(\frac{\partial h}{\partial \tau}\right)^2.$$

Nun können $\frac{\partial h}{\partial \vartheta}$ und $\frac{\partial h}{\partial \tau}$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen besitzen; es ist also entweder $\sqrt{E_2}\,d\vartheta + \sqrt{G_2}\,d\tau$ oder $\sqrt{E_2}\,d\vartheta - \sqrt{G_2}\,d\tau$ ein Differential, oder mit anderen Worten, es ist entweder $\frac{\partial \sqrt{E_2}}{\partial \tau} = \frac{\partial \sqrt{G_2}}{\partial \vartheta}$, oder es ist $\frac{\partial \sqrt{E_2}}{\partial \tau} = -\frac{\partial \sqrt{G_2}}{\partial \vartheta}$.

Zufolge der Gleichungen (5) in Paragraph 19 S. 116 ergibt sich, daß die absoluten Werte der beiden Drehungshalbmesser einander gleich sind. Damit ist zugleich gezeigt, daß die beiden Berührungspunkte, von denen im vorigen Paragraphen unter 3b) die Rede war, gleichen Abstand von dem Punkte (ϑ, τ) besitzen.

Die Gleichung (8) desselben Paragraphen lehrt, daß die Verbindungslinie der Drehungsmittelpunkte der Halbierungslinie des Schnittwinkels der Kurven $\tau = \text{const.}$, $\vartheta = \text{const.}$ parallel ist, wenn:

$$\frac{\partial \sqrt{E_2}}{\partial \tau} = -\frac{\partial \sqrt{G_2}}{\partial \vartheta},$$

daß sie der Halbierungslinie des Nebenwinkels des Schnittwinkels parallel ist, wenn:

$$\frac{\partial \sqrt{E_2}}{\partial \tau} = \frac{\partial \sqrt{G_2}}{\partial \vartheta}.$$

In dem oben angeführten Beispiel läßt sich die Differentialgleichung:

$$2F + G\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

sofort integrieren. Sie besitzt die Form:

$$2(g_1 g_2' - g_2 g_1') + (g_1^2 + g_2^2)\frac{\partial g}{\partial t} = 0,$$

somit:

$$g = -2 \operatorname{arc\,tg} \frac{g_2}{g_1} + \vartheta.$$

Setzen wir: $\operatorname{arc\,tg} \frac{g_2}{g_1} = \omega$, so ist:

$$g_1 = f(\omega) \cos \omega, \quad g_2 = f(\omega) \sin \omega,$$

und wegen: $\omega = \frac{\vartheta - \tau}{2}$ folgt:

$$x = f\left(\frac{\vartheta - \tau}{2}\right) \cos \frac{\vartheta + \tau}{2}, \quad y = f\left(\frac{\vartheta - \tau}{2}\right) \sin \frac{\vartheta + \tau}{2}.$$

Da:

$$\frac{\vartheta + \tau}{2} = \omega + \tau = -\omega + \vartheta,$$

so entstehen die Kurven $\tau = \text{const.}$ durch Umdrehung der Kurve mit den Gleichungen $x = f(\omega) \cos \omega$, $y = f(\omega) \sin \omega$ um den Koordinaten-

anfangspunkt, und die Kurven $\vartheta = \text{const.}$ entstehen durch dieselbe Umdrehung aus der Kurve mit den Gleichungen $x = f(\omega)\cos\omega$, $y = -f(\omega)\sin\omega$; die Kurven $\vartheta = \text{const.}$ gehen somit aus den Kurven $\tau = \text{const.}$ durch Spiegelung an der x-Achse hervor.

Die vorstehenden Erörterungen beantworten zugleich die Frage, unter welcher Bedingung zu einem gegebenen System von zwei einfach unendlichen Kurvenscharen eine dritte Schar gehört, in der je zwei beliebige Kurven aus sämtlichen Kurven des Systems gleiche Bogenlängen ausschneiden. Ist das System durch die Gleichungen:

$$x = f_1(t, \tau), \quad y = f_2(t, \tau)$$

dargestellt, so gehört zu ihm eine dritte Schar mit der verlangten Eigenschaft, wenn entweder:

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial\tau} = \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial t}, \quad \text{oder:} \quad \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial\tau} = -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial t},$$

d. h. geometrisch, wenn $r_1^2 = r_2^2$. Im ersten Fall ist:

$$\int\{\sqrt{E}dt + \sqrt{G}\,d\tau\} = \text{const.},$$

im zweiten ist:

$$\int\{\sqrt{E}dt - \sqrt{G}\,d\tau\} = \text{const.}$$

die Gleichung der dritten Schar.

Die Richtungskosinus der Tangenten der Kurven der dritten Schar sind im ersten Fall:

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{\frac{dx}{d\sigma_1} - \frac{dx}{d\sigma_2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}, \quad \frac{dy}{d\sigma} = \frac{\frac{dy}{d\sigma_1} - \frac{dy}{d\sigma_2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

im zweiten sind sie:

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{\frac{dx}{d\sigma_1} + \frac{dx}{d\sigma_2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}, \quad \frac{dy}{d\sigma} = \frac{\frac{dy}{d\sigma_1} + \frac{dy}{d\sigma_2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

d. h. die Kurven der dritten Schar halbieren entweder die von den positiven Halbtangenten der Kurven $\tau = \text{const.}$, $t = \text{const.}$ gebildeten Winkel, oder die Nebenwinkel der letzteren.

Wir zeigen nun, daß, wenn die Bedingung:

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial\tau} = \pm\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial t}$$

erfüllt ist, die Scharen $\tau = \text{const.}$, $t = \text{const.}$ ein Kurvennetz ohne Umwege bilden.

Zu diesem Zweck werde ein krummliniges aus zwei Kurven $\tau = \text{const.}$ und zwei Kurven $t = \text{const.}$ gebildetes Viereck betrachtet, dessen Ecken $P_1 P_2 P_3 P_4$ den Wertepaaren (t_0, τ_0), (t_0, τ), (t, τ), (t, τ_0) entsprechen mögen, wo der Einfachheit halber $t_0 < t$, $\tau_0 < \tau$ angenommen werde. Verlangen wir, daß für ein beliebiges Wertepaar (t, τ) stets $P_1 P_2 + P_2 P_3 = P_1 P_4 + P_4 P_3$ sei, so muß die Gleichung bestehen:

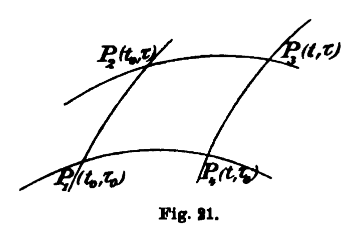


Fig. 21.

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{G(t_0,\tau)}\, d\tau + \int_{t_0}^{t} \sqrt{E(t,\tau)}\, dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E(t,\tau_0)}\, dt + \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{G(t,\tau)}\, d\tau.$$

Differenzieren wir dieselbe nach t, so folgt:

$$\sqrt{E(t,\tau)} = \sqrt{E(t,\tau_0)} + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial \sqrt{G(t,\tau)}}{\partial t}\, d\tau.$$

Differenzieren wir diese Beziehung nach τ, so folgt:

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial \tau} = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial t}.$$

Umgekehrt erhält man durch zweimalige Integration der letzten Bedingung die Ausgangsgleichung. Hier sind die Strecken, die mit wachsendem t, oder wachsendem τ durchlaufen werden, als positiv in Rechnung zu setzen.

Verlangen wir aber, daß $P_2 P_3 + P_3 P_4 = P_2 P_1 + P_1 P_4$ sei, so muß die Gleichung bestehen:

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{E(t,\tau)}\, dt + \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{G(t,\tau)}\, d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{G(t_0,\tau)}\, d\tau + \int_{t_0}^{t} \sqrt{E(t,\tau_0)}\, dt,$$

und dies liefert:

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial \tau} = -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial t}.$$

Hier sind die Strecken, die mit wachsendem t, oder abnehmendem τ durchlaufen werden, als positiv zu rechnen.

Auf die Summe zweier aneinanderstoßender Seiten eines krummlinigen Vierecks, dessen Begrenzung aus Kurven $t = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ besteht, lassen sich die ganz auf Kurven des Systems verlaufenden Wege zwischen zwei Punkten zurückführen.

§ 22. Differentialgleichung eines Kurvennetzes ohne Umwege.

Wir gehen nun von den Veränderlichen t, τ zu den Veränderlichen x, y über und schreiben, um alle Fälle zu umfassen, die Bedingungsgleichung in der Form:

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial \tau} = \varepsilon \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial t},$$

wo ε die positive oder negative Einheit bedeuten soll. Das Integral:

$$\int_{(t_0, \tau_0)}^{(t, \tau)} (\sqrt{E} dt + \varepsilon \sqrt{G} d\tau)$$

ist eine Funktion von t und τ und damit eine solche von x und y, die wir $\varphi(x, y)$ nennen wollen. Für diese Funktion haben wir:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \sqrt{E} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} = \varepsilon \sqrt{G} = \varepsilon \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)^2},$$

folglich sind die Kurven eines Netzes ohne Umwege die Integralkurven der Differentialgleichung:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy\right)^2 = dx^2 + dy^2.$$

Von dieser Bemerkung ist G. Scheffers ausgegangen.

Legt nun umgekehrt eine Differentialgleichung wie die vorige, die also mit Hilfe einer beliebig angenommenen Funktion $\varphi(x, y)$ gebildet ist, ein Kurvennetz ohne Umwege fest? Zu diesem Zweck muß die Differentialgleichung jedenfalls ein reelles Integral besitzen, das geometrisch durch zwei Kurvenscharen dargestellt wird.

Nehmen wir zur Abkürzung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi_2, \quad \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 1} = \omega,$$

so ist unsere Differentialgleichung, wie ihre Auflösung nach $\frac{dy}{dx}$ ergibt, gleichbedeutend mit den beiden folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi_1 \varphi_2 + \omega}{1 - \varphi_2^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi_1 \varphi_2 - \omega}{1 - \varphi_2^2}.$$

Wenn daher in einem Ebenenteil beständig $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 < 1$ ist, so wird er nicht von Integralkurven bedeckt. Sollte für alle Wertepaare x, y $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 < 1$ sein, so gibt es überhaupt keine reellen Integralkurven, wie z. B. wenn:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{n}} (\sin(x + y) + \cos(x - y))$$

und $n > 2$ ist.

Wenn beständig $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1$ ist, so besteht die Schar $\varphi = \text{const.}$ aus Parallelkurven, und φ selbst bedeutet, wie in § 26 S. 164 gezeigt werden soll, die Bogenlänge der gemeinschaftlichen Normalen der Parallelkurven. Da hier die vorgelegte Differentialgleichung mit der folgenden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$$

gleichbedeutend ist, so bilden jene Normalen die Gesamtschar der Integralkurven.

Wenn endlich in einem Ebenenteil beständig $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 > 1$ ist, so wird er von zwei Scharen von reellen Integralkurven überzogen, und diesen Fall wollen wir jetzt näher ins Auge fassen. Die Bogenlängen der Scharen bezeichnen wir mit σ_1 und σ_2 und denken uns die Richtungen, in denen sie wachsen, irgendwie festgelegt. Da:

$$(\varphi_1\varphi_2 + \omega)^2 + (1 - \varphi_2^2)^2 = (\varphi_1 + \varphi_2\omega)^2,$$

so erhalten wir:

$$\frac{dx}{d\sigma_1} = \varepsilon_1 \frac{1-\varphi_2^2}{\varphi_1 + \varphi_2\omega} = \varepsilon_1 \frac{\varphi_1 - \varphi_2\omega}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}, \quad \frac{dy}{d\sigma_1} = \varepsilon_1 \frac{\varphi_1\varphi_2 + \omega}{\varphi_1 + \varphi_2\omega} = \varepsilon_1 \frac{\varphi_2 + \varphi_1\omega}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2},$$

$$\frac{dx}{d\sigma_2} = \varepsilon_2 \frac{1-\varphi_2^2}{\varphi_1 - \varphi_2\omega} = \varepsilon_2 \frac{\varphi_1 + \varphi_2\omega}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}, \quad \frac{dy}{d\sigma_2} = \varepsilon_2 \frac{\varphi_1\varphi_2 - \omega}{\varphi_1 - \varphi_2\omega} = \varepsilon_2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1\omega}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2},$$

wo ε_1 und ε_2 die positive oder negative Einheit bedeuten.

Mit Hilfe dieser Formeln zeigt man leicht, daß die Kurven $\varphi = \text{const.}$ im Falle $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$ die von den positiven Tangenten der Integralkurven gebildeten Winkel halbieren, im Falle $\varepsilon_1\varepsilon_2 = +1$ aber die Nebenwinkel dieser Winkel.

Es ist:

$$d\sigma_1 = \varepsilon_1(\varphi_1 dx + \varphi_2 dy), \quad d\sigma_2 = \varepsilon_2(\varphi_1 dx + \varphi_2 dx).$$

Integriert man hier zwischen zwei Kurven $\varphi = \text{const.}$, so erhält man Bogenstücke von gleicher Länge. Dies ergibt im Falle $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$, wenn wir durch die Ecken eines krummlinigen, aus Integralkurven gebildeten Vierecks die Kurven $\varphi = \text{const.}$ legen (in der Figur 22 punktiert), daß

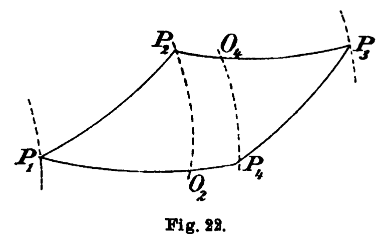


Fig. 22.

$$P_1P_2 = P_1Q_2,$$
$$P_2Q_4 = Q_2P_4,$$
$$Q_4P_3 = P_4P_3,$$

also:

$$P_1P_2 + P_2P_3 = P_1P_4 + P_4P_3$$

ist.

Da:

$$\frac{dx}{d\sigma_1}\frac{dx}{d\sigma_2} + \frac{dy}{d\sigma_1}\frac{dy}{d\sigma_2} = \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{2 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2},$$

so schneiden sich die Kurven des Netzes nur dann senkrecht wenn $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 2$, d. h. die Kurven $\varphi =$ const. sind hier Parallelkurven, und die Kurven des Netzes bestehen aus den Halbierungslinien der Winkel, welche von den Parallelkurven und ihren orthogonalen Trajektorien gebildet werden.

Nimmt man z. B. an Stelle der Parallelkurven eine Schar konzentrischer Kreise, so wird das Netz von zwei Scharen logarithmischer Spiralen gebildet, von denen die eine durch Spiegelung an einer Geraden aus der anderen hervorgeht.

Denkt man sich die Funktion $\varphi(x, y)$ gewählt, und ist $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 > 1$, so gehören zu φ die beiden durch unsere Differentialgleichung bestimmten Kurvenscharen, und wenn wir die Gleichung $\varphi(x, y) = c$ als die Gleichung einer Kurvenschar betrachten, so besitzt der Parameter c die Bedeutung der Bogenlänge irgendeiner Integralkurve der Differentialgleichung. Die durch $\varphi = c$ dargestellte Kurvenschar ändert sich nicht, wenn wir sie durch die Gleichung $F(\varphi) = \lambda$ darstellen, wohl aber ändert sich unsere Differentialgleichung, wenn statt φ die Funktion $F(\varphi)$ gesetzt wird. Zu einer gegebenen Kurvenschar (C) gehören daher unendlich viele Kurvennetze ohne Umwege. Sobald man aber verlangt, daß eine willkürlich gewählte und nicht in der gegebenen Schar enthaltene Kurve (L) dem Netz angehören soll, ist das letztere völlig bestimmt. Die Kurve (L) sei gegeben durch die Gleichungen:

$$x = g_1(s), \quad y = g_2(s),$$

in denen s die Bogenlänge der Kurve bedeutet, während die Schar (C) durch die Gleichung $F(x, y, \lambda) = 0$ gegeben sei. Derjenige Wert von s, der zu dem Punkte gehört, in welchem die Kurve (L) von der zu λ gehörenden Einzelkurve der Schar (C) geschnitten wird, genügt der Gleichung:

$$F(g_1(s), g_2(s), \lambda) = 0.$$

Eliminieren wir λ aus dieser Gleichung und der Gleichung $F(x, y, \lambda) = 0$, so ergebe sich $s = \varphi(x, y)$. Hierdurch ist die Schar (C) mit Hilfe eines Parameters ausgedrückt, der die Bedeutung der Bogenlänge der Kurve (L) hat. Für den Fall, daß die Kurve (L) als gerade Linie (D) angenommen wird, ist die in Rede stehende Aufgabe von M. d'Ocagne behandelt (Bulletin de la société mathém. de France Bd. 13. S. 71. 1885, vgl. Bd. 17. S. 171. 1889) und an mehreren Beispielen gelöst, wobei aber nur die Eigenschaft des Systems (C), daß je zwei ihrer Einzelkurven aus den Kurven des Netzes gleiche Bogenlängen ausschneiden, angeführt wird. Wir wollen das erste dieser Beispiele hier mitteilen. Die Schar (C) entstehe durch Schiebung einer willkürlich gewählten Kurve längs der y-Achse, während die Gerade (D) parallel der y-Achse sei und zu $x = a$ gehöre, so daß

ihre Gleichungen $x = a$, $y = s$ sind. Die Gleichung der Schar (C) ist von der Form:

$$y - f(x) = \lambda,$$

somit hat man:

$$s = f(a) + \lambda$$

und:

$$\varphi(x, y) = y - f(x) + f(a).$$

Unsere Differentialgleichung wird:

$$(dy - f'(x)dx)^2 = dx^2 + dy^2.$$

Der Faktor $dx = 0$ liefert die Schar der Parallelen zur y-Achse, der andere Faktor ergibt das Integral:

$$y = \frac{1}{2}\left\{f(x) - \int \frac{dx}{f'(x)}\right\} + \text{const.}$$

Nun ist

$$y = -\int \frac{dx}{f'(x)} + \text{const.}$$

die Gleichung der orthogonalen Trajektorien der Schar (C). Um die zweite Integralschar zu bestimmen, braucht man nur eine Einzelkurve aus der Schar (C) und eine aus der Orthogonalschar zu nehmen und die Mittelpunkte derjenigen Strecken zu konstruieren, welche von den beiden Kurven aus den zur y-Achse parallelen Geraden ausgeschnitten werden. Durch Verschiebung dieser Mittelpunktskurve längs der y-Achse entsteht die zweite Integralschar.

Nehmen wir im besonderen:

$$y = \frac{x^2}{2p} + s,$$

so ist

$$y = -p \log x + \text{const.}$$

der Gleichung der orthogonalen Trajektorien der betrachteten Parabelnschar. Die Gleichung der zweiten Integralschar ist:

$$y = \frac{x^2}{4p} - \frac{p}{2} \log x + \text{const.}$$

Diese Schar entsteht also durch Verschieben einer sogenannten Hundekurve längs der y-Achse. (Vgl. G. Loria. Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Deutsch von F. Schütte. Leipzig 1902. S. 609.)

Wir wollen nun die von G. Scheffers gefundene Bedingung dafür, daß zwei durch Differentialgleichungen erster Ordnung gegebene Kurvenscharen ein Netz ohne Umwege bilden, aus der Bedingungsform:

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial \tau} = \pm \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial t}$$

herleiten. Die gegebenen Differentialgleichungen seien:

$$\alpha(x, y)dx - dy = 0, \quad \beta(x, y)dx - dy = 0.$$

Die erste fassen wir als Gleichung einer Schar $\tau = \text{const.}$, die zweite als Gleichung einer Schar $t = \text{const.}$ auf und setzen, unter λ und μ integrierende Faktoren verstehend:

$$\lambda(\alpha dx - dy) = d\tau, \quad \mu(\beta dx - dy) = dt,$$

so daß:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \lambda\alpha, \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\lambda; \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \mu\beta, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = -\mu.$$

Aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 1,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\frac{\partial \tau}{\partial y}}{\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial \tau}{\partial x}} = \frac{1}{\mu(\beta - \alpha)},$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{-\frac{\partial \tau}{\partial x}}{\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial \tau}{\partial x}} = \frac{\alpha}{\mu(\beta - \alpha)}.$$

Aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial \tau}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} = 1$$

folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{-\frac{\partial t}{\partial y}}{\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial \tau}{\partial x}} = \frac{-1}{\lambda(\beta - \alpha)},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\frac{\partial t}{\partial x}}{\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial \tau}{\partial x}} = \frac{-\beta}{\lambda(\beta - \alpha)},$$

somit:

$$\sqrt{E} = \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\mu(\beta - \alpha)}, \quad \sqrt{G} = \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{\lambda(\beta - \alpha)}.$$

Die beiden Differentialgleichungen, welche aussagen, daß λ und μ integrierende Faktoren bedeuten, sind:

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \log \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

und:

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x} + \beta \frac{\partial \log \mu}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0,$$

oder:

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial t} \mu(\beta - \alpha) + \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \log \mu}{\partial \tau} \lambda(\beta - \alpha) - \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0.$$

Unsere Bedingungsgleichung benutzen wir in der Form:

$$\sqrt{E} \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial \tau} = \pm \sqrt{G} \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial t}.$$

Man erhält:

$$\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial \tau} = \frac{\frac{\partial \beta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y}}{\lambda(\beta - \alpha)^2} - \frac{(1 + \alpha\beta)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)}{\lambda(1 + \alpha^2)(\beta - \alpha)^2},$$

$$\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial t} = \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y}}{\mu(\beta - \alpha)^2} - \frac{(1 + \alpha\beta)\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)}{\mu(1 + \beta^2)(\beta - \alpha)^2}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die drittletzte Gleichung ein, so gibt eine einfache Rechnung die gesuchte Form der Bedingung in der Gestalt:

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) \sqrt{1 + \beta^2} = \pm \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y}\right) \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

§ 23. Die Kurven eines Netzes ohne Umwege aufgefaßt als Evoluten.

Wir leiten hier einen von G. Scheffers herrührenden Satz ab, auf den man kommt, wenn man die Kurven eines Netzes ohne Umwege als die Evoluten zweier Evolventenscharen betrachtet.

Im allgemeinen bilden die Krümmungskreise zweier einfach unendlicher Kurvenscharen zwei doppelt unendliche Kreisscharen; ein Kurvennetz ohne Umwege läßt sich aber auf einfach unendlich viele Weisen als das System der Evoluten zweier Kurvenscharen auffassen, deren Krümmungskreise nur eine einzige doppelt unendliche Kreisschar bilden, indem jeder Krümmungskreis einer Kurve der einen Schar zugleich ein solcher einer Kurve der anderen Schar ist. Dieser Satz läßt sich geometrisch folgendermaßen beweisen.

Man betrachte zwei Kurven $\tau = \text{const.}$, die durch P_2, P_1 und P_3, P_4 gehen mögen, und zwei Kurven $t = \text{const.}$ durch P_2, P_3 und P_1, P_4. (Fig. 23.) Wir tragen von P_1 aus auf den Kurven $P_2 P_1$ und

$P_4 P_1$ gleiche Bogenlängen $P_1 Q$ und $P_1 Q'$ ab und konstruieren diejenigen Evolventen beider Kurven, deren Spitzen in Q und Q' liegen. Auf der Kurve $P_3 P_2$ tragen wir von P_2 aus die Bogenlänge $P_2 Q_2$ gleich $P_2 Q$ ab und fassen Q_2 als die Spitze einer Evolvente von $P_2 P_3$ auf, ebenso tragen wir auf der Kurve $P_3 P_4$ von P_3 aus die Bogenlänge $P_3 Q_3 = P_3 Q_2$ auf und konstruieren die Evolvente von $P_3 P_4$, deren Spitze in Q_3 liegt. Tragen wir jetzt auf der Kurve $P_4 P_1$ von P_4 aus die Bogenlänge $P_4 Q_3$ auf, so müssen wir als Endpunkt dieser Bogenlänge den Punkt Q' erhalten, wenn jeder Kurve nur eine Evolvente entsprechen soll. Aber $P_4 Q_3$ ist gleich $P_1 Q + P_2 P_1 + P_3 P_3 - P_3 P_4$. Soll das gleich $P_1 P_4 + P_1 Q$ sein, so muß $P_1 P_2 + P_2 P_3$ gleich $P_1 P_4 + P_3 P_4$ sein, d. h. es muß ein Kurvennetz ohne Umwege vorliegen. Alsdann ist jeder Punkt $P(t, \tau)$ der Mittelpunkt eines Kreises, der ein Krümmungskreis sowohl für die Evolvente der durch P gehenden Kurve $\tau = \text{const.}$ wie für die Evolvente der durch P gehenden Kurve $t = \text{const.}$ ist. Die Berührungspunkte dieser Kreise liegen auf den in P berührenden Tangenten der Kurven $\tau = \text{const.}$, $t = \text{const.}$ Läßt man die Länge $P_1 Q$ sich ändern, so erhält man einfach unendlich viele Evolventenscharen von der betrachteten Art.

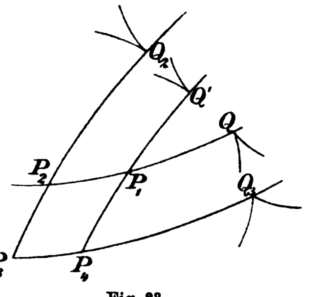


Fig. 23.

Um den in Rede stehenden Satz analytisch zu beweisen, rechnen wir die Bogenlänge der Kurven $\tau = \text{const.}$ von einer Kurve $t = t_0$, und die Bogenlängen der Kurven $t = \text{const.}$ von einer Kurve $\tau = \tau_0$ aus. Irgend eine Schar von Evolventen der Kurven $\tau = \text{const.}$ ist dann dargestellt durch die Gleichungen:

$$x = f_1 + \left(\psi_1(\tau) - \int_{t_0}^{t} \sqrt{E}\, dt\right) \frac{df_1}{d\sigma_1},$$

$$y = f_2 + \left(\psi_1(\tau) - \int_{t_0}^{t} \sqrt{E}\, dt\right) \frac{df_2}{d\sigma_1}$$

irgend eine Schar von Evolventen der Kurven $t = \text{const.}$ wird dargestellt durch die Gleichungen:

$$x = f_1 + \left(\psi_2(t) - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{G}\, d\tau\right) \frac{df_1}{d\sigma_2},$$

$$y = f_2 + \left(\psi_2(t) - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{G}\, d\tau\right) \frac{df_2}{d\sigma_2},$$

wo $\psi_1(\tau)$ und $\psi_2(t)$ willkürlich gewählte Funktionen bedeuten.

Sollen die beiden Krümmungskreise dieser Evolventen, die in den beiden dem Wertepaar (t, τ) entsprechenden Punkten berühren, zusammenfallen, so müssen die absoluten Werte von $\psi_1(\tau) - \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{E}\, dt$ und $\psi_2(t) - \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{G}\, d\tau$ einander gleich sein, und wenn diese Gleichheit für jedes Wertepaar (t, τ) stattfindet, bilden die Krümmungskreise der Evolventen nur eine doppelt unendliche Kreisschar. Setzen wir:

$$\psi_1(\tau) - \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{E}\, dt = \psi_2(t) - \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{G}\, d\tau,$$

so folgt durch Differentiation nach τ:

$$\psi_1'(\tau) - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial \tau} dt = -\sqrt{G},$$

und hieraus folgt durch Differentiation nach t:

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial \tau} = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial t}.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ergibt sich:

$$\psi_1(\tau) = -\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{G(t_0, \tau)}\, d\tau + c_1,$$

wenn c_1 eine Integrationskonstante bedeutet.

Entsprechend ergibt sich, wenn die Ausgangsgleichung zuerst nach t und dann nach τ differenziert wird, wiederum:

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial \tau} = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial t},$$

und:

$$\psi_2(t) = -\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{E(t, \tau_0)}\, dt + c_2,$$

wo c_2 eine neue Integrationskonstante bedeutet.

Aus der Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial \tau} = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial t}$$

folgt durch Integration:

$$\sqrt{E} = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial t} d\tau + \sqrt{E(t, \tau_0)}.$$

Eine nochmalige Integration liefert:

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{E}\,dt = \int_{t_0}^{t}\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial t}\,d\tau\,dt + \int_{t_0}^{t} \sqrt{E(t,\tau_0)}\,dt$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{G}\,d\tau - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{G(t_0,\tau)}\,d\tau + \int_{t_0}^{t} \sqrt{E(t,\tau_0)}\,dt.$$

Wir erhalten somit:

$$\psi_1(\tau) - \int_{t_0}^{t} \sqrt{E}\,dt = -\int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{G}\,d\tau - \int_{t_0}^{t} \sqrt{E(t,\tau_0)}\,dt + c_1$$

$$= \psi_2(t) - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{G}\,d\tau + c_1 - c_2;$$

es muß also $c_1 = c_2$ sein, und es gibt nur einfach unendlich viele Bestimmungsarten der Funktionen $\psi_1(\tau)$ und $\psi_2(t)$.

Geht man von der Annahme:

$$\psi_1(\tau) - \int_{t_0}^{t} \sqrt{E}\,dt = -\psi_2(t) + \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{G}\,d\tau$$

aus, so ergibt sich die Bedingung:

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial\tau} = -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial t},$$

und man erhält, wenn sie erfüllt ist:

$$\psi_1(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{G(t_0,\tau)}\,d\tau + c,$$

$$\psi_2(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E(t,\tau_0)}\,dt - c.$$

Auch hier sind, dem einen Integrationsparameter c entsprechend, nur einfach unendlich viele Bestimmungsarten der Funktionen $\psi_1(\tau)$ und $\psi_2(t)$ möglich.

§ 24. Drehungsmittelpunktsgeraden.

Wir haben im vorigen Paragraphen zwei Kurvenscharen $\tau = \text{const.}$, $t = \text{const.}$ betrachtet und jedem Schnittpunkt einer Kurve $\tau = \text{const.}$ mit einer Kurve $t = \text{const}$ zwei Drehungsmittelpunkte zugeordnet. Es soll jetzt untersucht werden, wie sich die Lage der den Kurven $\tau = \text{const.}$ zugeordneten Drehungsmittelpunkte ändert, wenn die Schar $t = \text{const.}$ durch eine andere Schar

ersetzt wird. Da es sich hier in letzter Linie um Eigenschaften einer gegebenen Schar $\tau = \text{const.}$ handelt, werden wir zur Durchführung der analytischen Entwicklungen die Ableitungen nach der Bogenlänge s_1 (im vorigen Paragraph σ_1) der Schar $\tau = \text{const.}$, und nach der Bogenlänge s_2 (im vorigen Paragraph σ_3) der orthogonalen Trajektorien der Kurven $\tau = \text{const.}$ benutzen. Anstatt die hier auftretenden Grundformeln aus denen des Paragraph 19 durch die Voraussetzung $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu gewinnen, wollen wir sie direkt herleiten, indem wir wieder die Schar $\tau = \text{const.}$ als durch zwei Gleichungen von der Form:

$$x = f_1(t, \tau), \quad y = f_2(t, \tau)$$

gegeben ansehen. Wie die fraglichen Ableitungen zu berechnen sind, wenn die Schar $\tau = \text{const.}$ in anderer Weise analytisch festgelegt ist, soll im § 26 dargetan werden.

Für die Ableitungen der Koordinaten nach der Bogenlänge s_1 erhalten wir:

$$\frac{dx}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial f_1}{\partial t}, \quad \frac{dy}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial f_2}{\partial t},$$

wo:

$$E = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)^2.$$

Für die Ableitungen der Koordinaten nach der Bogenlänge s_2 gilt zunächst:

$$\frac{dx}{ds_2} = -\frac{dy}{ds_1} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial f_2}{\partial t}, \quad \frac{dy}{ds_2} = \frac{dx}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial f_1}{\partial t}.$$

Setzen wir nun:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_1}{\partial \tau} + \frac{\partial f_2}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial \tau} = F,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial \tau} - \frac{\partial f_1}{\partial \tau} \frac{\partial f_2}{\partial t} = \Delta,$$

so folgt:

$$-F \frac{\partial f_1}{\partial t} + E \frac{\partial f_1}{\partial \tau} = -\frac{\partial f_2}{\partial t} \Delta,$$

$$-F \frac{\partial f_2}{\partial t} + E \frac{\partial f_2}{\partial \tau} = \frac{\partial f_1}{\partial t} \Delta,$$

daher ist anderseits:

$$\frac{dx}{ds_2} = \frac{-F \frac{\partial f_1}{\partial t} + E \frac{\partial f_1}{\partial \tau}}{\sqrt{E} \Delta}, \quad \frac{dy}{ds_2} = \frac{-F \frac{\partial f_2}{\partial t} + E \frac{\partial f_2}{\partial \tau}}{\sqrt{E} \Delta},$$

so daß:

$$\frac{dt}{ds_2} = \frac{-F}{\sqrt{E} \Delta}, \quad \frac{d\tau}{ds_2} = \frac{\sqrt{E}}{\Delta}.$$

Hiernach erhalten wir für die Ableitungen einer beliebig angenommenen Funktion $f(t, \tau)$ nach s_1 und s_2:

$$\frac{df(t,\tau)}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{df(t,\tau)}{ds_2} = \frac{-F\frac{\partial f}{\partial t} + E\frac{\partial f}{\partial \tau}}{\sqrt{E}\Delta},$$

für die Ableitungen einer beliebig angenommenen Funktion $f(x, y)$ nach s_1 und s_2:

$$\frac{df(x,y)}{ds_1} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds_1}, \quad \frac{df(x,y)}{ds_2} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds_2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds_2}.$$

Den Krümmungshalbmesser der Kurven $\tau = \text{const.}$ bezeichnen wir mit ϱ_1, den ihrer orthogonalen Trajektorien mit ϱ_2.

Dann ist:

$$\frac{d^2x}{ds_1^2} = -\frac{1}{\varrho_1}\frac{dy}{ds_1} = \frac{1}{\varrho_1}\frac{dx}{ds_2}, \quad \frac{d^2y}{ds_1^2} = \frac{1}{\varrho_1}\frac{dx}{ds_1} = \frac{1}{\varrho_1}\frac{dy}{ds_2},$$

$$\frac{d^2x}{ds_2^2} = \frac{1}{\varrho_2}\frac{dx}{ds_1} = \frac{1}{\varrho_2}\frac{dy}{ds_2}, \quad \frac{d^2y}{ds_2^2} = \frac{1}{\varrho_2}\frac{dy}{ds_1} = -\frac{1}{\varrho_2}\frac{dx}{ds_2}.$$

Aus den Beziehungen:

$$\left(\frac{dx}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds_1}\right)^2 = 1, \quad \frac{dx}{ds_1}\frac{dx}{ds_2} + \frac{dy}{ds_1}\frac{dy}{ds_2} = 0$$

folgt durch Bildung der Ableitungen nach s_2:

$$\frac{dx}{ds_1}\frac{d^2x}{ds_1\,ds_2} + \frac{dy}{ds_1}\frac{d^2y}{ds_1\,ds_2} = 0$$

$$\frac{dx}{ds_2}\frac{d^2x}{ds_1\,ds_2} + \frac{dy}{ds_2}\frac{d^2y}{ds_1\,ds_2} = -\frac{1}{\varrho_2}.$$

Die Determinante dieser Gleichungen wird, da:

$$\frac{dx}{ds_2} = -\frac{dy}{ds_1}, \quad \frac{dy}{ds_2} = \frac{dx}{ds_1}$$

gleich Eins, und wir erhalten:

$$\frac{d^2x}{ds_1\,ds_2} = \frac{1}{\varrho_2}\frac{dy}{ds_1} = -\frac{1}{\varrho_2}\frac{dx}{ds_2}, \quad \frac{d^2y}{ds_1\,ds_2} = -\frac{1}{\varrho_2}\frac{dx}{ds_1} = -\frac{1}{\varrho_2}\frac{dy}{ds_2},$$

und entsprechend:

$$\frac{d^2x}{ds_2\,ds_1} = -\frac{1}{\varrho_1}\frac{dx}{ds_1} = -\frac{1}{\varrho_1}\frac{dy}{ds_2}, \quad \frac{d^2y}{ds_2\,ds_1} = -\frac{1}{\varrho_1}\frac{dy}{ds_1} = \frac{1}{\varrho_1}\frac{dx}{ds_2}.$$

Um die Regel für den Einfluß der Aufeinanderfolge der Ableitungen nach s_1 und s_2 aufzufinden, berücksichtigen wir, daß für eine beliebig gewählte Funktion $f(x, y)$ die Gleichungen bestehen:

$$\frac{d^2 f(x,y)}{ds_1\,ds_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{dx}{ds_1}\frac{dx}{ds_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{dx}{ds_1}\frac{dy}{ds_2} + \frac{dy}{ds_1}\frac{dx}{ds_2}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{ds_1}\frac{dy}{ds_2}$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2 x}{ds_1 ds_2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{ds_1 ds_2},$$
$$\frac{d^2 f}{ds_2\,ds_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{dx}{ds_2}\frac{dx}{ds_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{dx}{ds_2}\frac{dy}{ds_1} + \frac{dy}{ds_2}\frac{dx}{ds_1}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{ds_1}\frac{dy}{ds_2}$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2 x}{ds_2 ds_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{ds_2 ds_1};$$

somit erhalten wir:

$$\frac{d^2 f(x,y)}{ds_1\,ds_2} - \frac{d^2 f(x,y)}{ds_2\,ds_1} = \frac{1}{\varrho_1}\frac{df(x,y)}{ds_1} - \frac{1}{\varrho_2}\frac{df(x,y)}{ds_2}.$$

Da eine Funktion von t und τ zugleich eine solche von x und y ist, erhalten wir ebenfalls:

$$\frac{d^2 f(t,\tau)}{ds_1\,ds_2} - \frac{d^2 f(t,\tau)}{ds_2\,ds_1} = \frac{1}{\varrho_1}\frac{df(t,\tau)}{ds_1} - \frac{1}{\varrho_2}\frac{df(t,\tau)}{ds_2}.$$

Der direkte Beweis dieser Beziehung ist etwas umständlicher.

Man hat nämlich:

$$\frac{dx}{ds_1} = \frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{dt}{ds_1}, \quad \frac{dx}{ds_2} = \frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{dt}{ds_2} + \frac{\partial f_1}{\partial \tau}\frac{d\tau}{ds_2},$$
$$\frac{d^2 x}{ds_1\,ds_2} = \frac{dt}{ds_1}\left\{\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\frac{dt}{ds_2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial t \partial \tau}\frac{d\tau}{ds_2}\right\} + \frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{d^2 t}{ds_1\,ds_2},$$
$$\frac{d^2 x}{ds_2\,ds_1} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\frac{dt}{ds_1}\frac{dt}{ds_2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial t \partial \tau}\frac{dt}{ds_1}\frac{d\tau}{ds_2} + \frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{d^2 t}{ds_2\,ds_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \tau}\frac{d^2 \tau}{ds_2\,ds_1},$$

folglich:

$$\frac{d^2 x}{ds_1\,ds_2} - \frac{d^2 x}{ds_2\,ds_1} = \frac{\partial f_1}{\partial t}\left(\frac{d^2 t}{ds_1\,ds_2} - \frac{d^2 t}{ds_2\,ds_1}\right) - \frac{\partial f_1}{\partial \tau}\frac{d^2 \tau}{ds_2\,ds_1}$$
$$= \frac{dx}{ds_1}\left\{\sqrt{E}\left(\frac{d^2 t}{ds_1\,ds_2} - \frac{d^2 t}{ds_2\,ds_1}\right) - \frac{F}{\sqrt{E}}\frac{d^2 \tau}{ds_2\,ds_1}\right\} - \frac{dx}{ds_2}\frac{\varDelta}{\sqrt{E}}\frac{d^2 \tau}{ds_2\,ds_1}.$$

Anderseits ist:

$$\frac{d^2 x}{ds_1\,ds_2} - \frac{d^2 x}{ds_2\,ds_1} = \frac{1}{\varrho_1}\frac{dx}{ds_1} - \frac{1}{\varrho_2}\frac{dx}{ds_2},$$

und beide Beziehungen bleiben bestehen, wenn man x durch y ersetzt.

Daraus ergibt sich:

$$\frac{d^2 \tau}{ds_2\,ds_1} = \frac{\sqrt{E}}{\varrho_2 \varDelta}, \quad \frac{d^2 t}{ds_1\,ds_2} - \frac{d^2 t}{ds_2\,ds_1} = \frac{1}{\varrho_1 \sqrt{E}} + \frac{F}{\varDelta \varrho_2 \sqrt{E}},$$

infolgedessen entsteht:

$$\frac{d^2 f(t,\tau)}{ds_1\,ds_2} - \frac{d^2 f(t,\tau)}{ds_2\,ds_1} = \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{1}{\varrho_1 \sqrt{E}} + \frac{F}{\varDelta \varrho_2 \sqrt{E}}\right) - \frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{\sqrt{E}}{\varDelta \varrho_2}$$
$$= \frac{1}{\varrho_1}\frac{df(t,\tau)}{ds_1} - \frac{1}{\varrho_2}\frac{df(t,\tau)}{ds_2},$$

was zu beweisen war.

Hiermit sind die Regeln für die Benutzung der Ableitungen nach den Bogenlängen zweier zueinander senkrechter Kurvenscharen gefunden.

Wir betrachten nun außer der Schar $\tau =$ const. eine zweite Schar, deren Bogenlänge mit σ bezeichnet werde. In einem Punkte $P(t, \tau)$ bilde die dem wachsenden σ entsprechende Halbtangente der durch P gehenden Kurve der zweiten Schar mit der in P berührenden positiven Halbtangente der Kurve $\tau =$ const. den Winkel ψ. Wir haben dann für die zweite Schar:

$$\frac{dx}{d\sigma} = \cos\psi \frac{dx}{ds_1} + \sin\psi \frac{dx}{ds_2}, \quad \frac{dy}{d\sigma} = \cos\psi \frac{dy}{ds_1} + \sin\psi \frac{dy}{ds_2},$$

und die Ableitung einer beliebigen Funktion f von x, y, oder t, τ nach der Bogenlänge σ wird definiert durch die Gleichung:

$$\frac{df}{d\sigma} = \cos\psi \frac{df}{ds_1} + \sin\psi \frac{df}{ds_2}.$$

Gehen wir auf der betrachteten Kurve der zweiten Schar von (P) aus bis zu einem Punkt (P') weiter, so wird die Bogenlänge σ einen Zuwachs $\Delta\sigma$ erhalten. Die durch (P') gehende Kurve der ersten Schar möge in (P') von der Tangente (T') berührt werden.

Man bestimme nun diejenige Drehung der Ebene, durch welche (P) in (P'), und (T) in (T') übergeht. Der zugehörige Drehungsmittelpunkt gelangt, wenn man $\Delta\sigma$ sich der Null nähern läßt, in eine Grenzlage, in welcher er der zum Winkel ψ gehörende Drehungsmittelpunkt der Kurve $\tau =$ const. für den betrachteten Punkt (P) genannt werde. Die Koordinaten des zu ψ gehörenden Drehungsmittelpunktes seien mit x_ψ, y_ψ bezeichnet. Wir erhalten ihre Werte aus den im § 3 S. 12 für ξ_0 und η_0 aufgestellten Ausdrücken, indem wir:

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \xi_1 = x + \frac{dx}{ds_1} \quad \eta_1 = y + \frac{dy}{ds_1}, \quad \vartheta = \sigma$$

setzen. Es ergibt sich:

$$x_\psi = x - \frac{dy}{d\sigma} r_\psi, \quad y = x + \frac{dx}{d\sigma} r_\psi,$$

wo:

$$r_\psi = \frac{\frac{dx}{ds_1}\frac{dx}{d\sigma} + \frac{dy}{ds_1}\frac{dy}{d\sigma}}{\frac{dx}{d\sigma}\frac{d^2y}{ds_1\,d\sigma} - \frac{dy}{d\sigma}\frac{d^2x}{ds_1\,d\sigma}}.$$

Nun ist:

$$\frac{d^2x}{ds_1\,d\sigma} = \cos\psi \frac{d^2x}{ds_1^2} + \sin\psi \frac{d^2x}{ds_1\,ds_2} = -\left(\frac{\cos\psi}{\varrho_1} - \frac{\sin\psi}{\varrho_2}\right)\frac{dy}{ds_1},$$

$$\frac{d^2y}{ds_1\,d\sigma} = \cos\psi \frac{d^2y}{ds_1^2} + \sin\psi \frac{d^2y}{ds_1\,ds_2} = \left(\frac{\cos\psi}{\varrho_1} - \frac{\sin\psi}{\varrho_2}\right)\frac{dx}{ds_1},$$

also:

$$r_\psi = \frac{1}{\frac{\cos\psi}{\varrho_1} - \frac{\sin\psi}{\varrho_2}},$$

und:

$$x_\psi = x + \frac{\cos\psi\sin\alpha + \sin\psi\cos\alpha}{\frac{\sin\psi}{\varrho_2} - \frac{\cos\psi}{\varrho_1}},$$

$$y_\psi = y + \frac{\sin\psi\sin\alpha - \cos\psi\cos\alpha}{\frac{\sin\psi}{\varrho_2} - \frac{\cos\psi}{\varrho_1}},$$

wo:

$$\frac{dx}{ds_1} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds_1} = \sin\alpha$$

gesetzt ist.

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(x_\psi - x)\cos\alpha + (y_\psi - y)\sin\alpha = \frac{\sin\psi}{\frac{\sin\psi}{\varrho_2} - \frac{\cos\psi}{\varrho_1}},$$

$$(x_\psi - x)\sin\alpha - (y_\psi - y)\cos\alpha = \frac{\cos\psi}{\frac{\sin\psi}{\varrho_2} - \frac{\cos\psi}{\varrho_1}}.$$

Die sämtlichen zu den verschiedenen Werten von ψ gehörenden Drehungsmittelpunkte liegen daher auf einer Geraden, deren Gleichung

$$(x' - x)\left(\frac{\cos\alpha}{\varrho_2} - \frac{\sin\alpha}{\varrho_1}\right) + (y' - y)\left(\frac{\sin\alpha}{\varrho_2} + \frac{\cos\alpha}{\varrho_1}\right) = 1$$

ist. Da diese Gleichung befriedigt wird, sowohl wenn wir:

$$x' - x = -\varrho_1 \sin\alpha, \quad y' - y = \varrho_1 \cos\alpha,$$

als wenn wir:

$$x' - x = \varrho_2 \cos\alpha, \quad y' - y = \varrho_2 \sin\alpha$$

setzen, so geht die fragliche Gerade durch die zu ϱ_1 und ϱ_2 gehörenden Krümmungsmittelpunkte.

Durch die gegebene Kurvenschar wird also jedem Punkt einer Einzelkurve der Schar, an dem $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$ endliche Werte besitzen, eine Gerade zugeordnet, die wir die Drehungsmittelpunktsgerade nennen wollen. Diese Zuordnung verdient näher untersucht und mit Beispielen erläutert zu werden.

Wir wollen hier nur noch die eine Frage beantworten, wie sich die in einem Punkte zugeordnete Drehungsmittelpunktsgerade ändert, wenn man statt der gegebenen Schar $\tau = \text{const.}$ eine andere Schar zur Bestimmung dieser Geraden benutzt. Den

Winkel, unter dem eine Einzelkurve der letzteren Schar eine Einzelkurve der Schar $\tau = \text{const.}$ schneidet, bezeichnen wir mit φ, die Bogenlänge der Kurven dieser Schar mit s, die ihrer orthogonalen Trajektorien mit s', den Krümmungshalbmesser der Kurven der Schar mit ϱ, den ihrer orthogonalen Trajektorien mit ϱ' und setzen:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi \frac{dx}{ds_1} + \sin\varphi \frac{dx}{ds_2}, \qquad \frac{dy}{ds} = \cos\varphi \frac{dy}{ds_1} + \sin\varphi \frac{dy}{ds_2},$$

$$\frac{dx}{ds'} = -\sin\varphi \frac{dx}{ds_1} + \cos\varphi \frac{dx}{ds_2}, \quad \frac{dy}{ds'} = -\sin\varphi \frac{dy}{ds_1} + \cos\varphi \frac{dy}{ds_2},$$

so daß die allgemeine Definition der Ableitungen einer Funktion $\mathfrak{F}(t, \tau)$ oder $\mathfrak{F}(x, y)$ nach den Bogenlängen s und s' in den Gleichungen:

$$\frac{d\mathfrak{F}}{ds} = \cos\varphi \frac{d\mathfrak{F}}{ds_1} + \sin\varphi \frac{d\mathfrak{F}}{d\sigma_2}, \quad \frac{d\mathfrak{F}}{ds'} = -\sin\varphi \frac{d\mathfrak{F}}{ds_1} + \cos\varphi \frac{d\mathfrak{F}}{ds_2}$$

enthalten ist.

Hiernach wird die positive Normalenrichtung der Kurven mit der Bogenlänge s durch Vermehrung des Winkels φ um $\frac{\pi}{2}$ erhalten, aber die positive Normalenrichtung ihrer orthogonalen Trajektorien soll mit der positiven Tangentenrichtung der Kurven mit der Bogenlänge s zusammenfallen, so daß:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{\varrho} \frac{dy}{ds}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{\varrho} \frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2x}{ds'^2} = \frac{1}{\varrho'} \frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{\varrho'} \frac{dy}{ds}.$$

Da:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \cos\varphi \left\{ \cos\varphi \frac{d^2x}{ds_1^2} + \sin\varphi \frac{d^2x}{ds_2\, ds_1} + \left(\cos\varphi \frac{dx}{ds_2} - \sin\varphi \frac{dx}{ds_1} \right) \frac{d\varphi}{ds_1} \right\}$$

$$+ \sin\varphi \left\{ \cos\varphi \frac{d^2x}{ds_1\, ds_2} + \sin\varphi \frac{d^2x}{ds_2^2} + \left(\cos\varphi \frac{dx}{ds_2} - \sin\varphi \frac{dx}{ds_1} \right) \frac{d\varphi}{ds_2} \right\}$$

$$= \frac{dx}{ds'} \left\{ \cos\varphi \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{d\varphi}{ds_1} \right) - \sin\varphi \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{d\varphi}{ds_2} \right) \right\},$$

so folgt:

$$\frac{1}{\varrho} = \cos\varphi \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{d\varphi}{ds_1} \right) - \sin\varphi \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{d\varphi}{ds_2} \right) \Big\},$$

und auf demselben Wege ergibt sich:

$$\frac{1}{\varrho'} = \sin\varphi \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{d\varphi}{ds_1} \right) + \cos\varphi \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{d\varphi}{ds_2} \right) \Big\}.$$

Die dem Punkte (x, y) durch die Kurven mit der Bogenlänge s zugeordnete Gerade hat die Gleichung:

$$(x' - x) \left(\frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\varrho'} - \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\varrho} \right) + (y' - y) \left(\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\varrho'} + \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\varrho} \right) = 1.$$

Diese Gerade schneide die Tangente der Kurve $\tau = \text{const.}$ in dem Punkt mit den Koordinaten:

$$x + l_2 \cos \alpha, \quad y + l_2 \sin \alpha,$$

die Normale der Kurve $\tau = \text{const.}$ in dem Punkt mit den Koordinaten:

$$x - l_1 \sin \alpha, \quad y + l_1 \cos \alpha.$$

Dann ergibt sich als wichtige Folgerung:

$$\frac{1}{l_2} = \frac{1}{\varrho_2} - \frac{d\varphi}{ds_2}, \quad \frac{1}{l_1} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{d\varphi}{ds_1},$$

so daß auch:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos\varphi}{l_1} - \frac{\sin\varphi}{l_2}, \quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{\sin\varphi}{l_1} + \frac{\cos\varphi}{l_2}.$$

Aus diesen allgemeinen Sätzen fließen unmittelbar die folgenden besonderen:

1. Wenn $\frac{d\varphi}{ds_1}$ gleich Null ist, wenn also der Winkel φ sich längs jeder Einzelkurve der Schar $\tau = \text{const.}$ nicht ändert, so hat man $l_1 = \varrho_1$, und die sämtlichen unter dieser Voraussetzung möglichen Drehungsmittelpunktsgeraden bilden einen Büschel, der den Krümmungsmittelpunkt der Kurve $\tau = \text{const.}$ zum Mittelpunkt hat. Entsprechendes gilt bei der Voraussetzung $\frac{d\varphi}{ds_2}$ gleich Null; nur muß hier der Fall $\frac{1}{\varrho_2} = 0$ berücksichtigt werden, in welchem die Kurven $\tau = \text{const.}$ Parallelkurven sind, und die Drehungsmittelpunktsgeraden parallel der Tangente der durch den betrachteten Punkt gehenden Kurve $\tau = \text{const.}$ liegen.

2. Ist der Winkel φ überhaupt konstant, so wollen wir die entsprechenden Kurven Isogonalkurven nennen. Hier fallen die den verschiedenen Werten von φ entsprechenden Drehungsmittelpunktsgeraden alle in eine zusammen, und da jetzt $r_\varphi = \varrho$, so fällt der Krümmungsmittelpunkt der zu dem Werte φ gehörenden Isogonalkurve mit dem zum Winkel φ gehörenden Drehungsmittelpunkt der Kurve $\tau = \text{const.}$ zusammen. Die durch einen Punkt gehenden Isogonalkurven einer gegebenen Kurvenschar haben daher die Eigenschaft, daß ihre zu diesem Punkt gehörenden Krümmungsmittelpunkte in einer Geraden liegen, ein Satz, der zuerst von E. Cesàro veröffentlicht wurde. (Lezioni di Geometria intrinseca. Napoli 1896. S. 116. Vgl. die deutsche Ausgabe dieses Werkes „Vorlesungen über natürliche Geometrie“ von Kowalewski, Leipzig 1901, S. 148.)

Kreise, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, und die einen Punkt gemein haben, berühren sich entweder in diesem Punkt, oder sie haben noch einen zweiten Punkt gemein. Das erste

ist bei den zu dem Punkt (t, τ) gehörenden Krümmungskreisen der Isogonalkurven ausgeschlossen, da die Mittelpunktsgerade nicht durch den gemeinsamen Punkt hindurchgeht. Wir haben daher den zweiten gemeinsamen Punkt aufzusuchen. Die Gleichung des zu dem Werte φ gehörenden Krümmungskreises ist:

$$\left(\xi - x + \varrho \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\eta - y - \varrho \frac{dx}{ds}\right)^2 = \varrho^2,$$

oder:

$$\{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\}\left\{\frac{\cos\varphi}{\varrho_1} - \frac{\sin\varphi}{\varrho_2}\right\}$$
$$+ 2\{(\xi - x)\sin(\alpha + \varphi) - (\eta - y)\cos(\alpha + \varphi)\} = 0.$$

Sie lehrt, daß die zu den verschiedenen Werten von φ gehörenden Kreise durch die Schnittpunkte der beiden durch die Gleichungen:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + 2\varrho_1\{(\xi - x)\sin\alpha - (\eta - y)\cos\alpha\} = 0,$$
$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 - 2\varrho_2\{(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\sin\alpha\} = 0$$

bestimmten Kreise hindurchgehen. Der zweite Schnittpunkt dieser Kreise hat die Koordinaten:

$$x_1 = x + 2\,\frac{\frac{\cos\alpha}{\varrho_2} - \frac{\sin\alpha}{\varrho_1}}{\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2}}, \quad y_1 = y + 2\,\frac{\frac{\sin\alpha}{\varrho_2} + \frac{\cos\alpha}{\varrho_1}}{\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2}}.$$

Dies zeigt, daß die Verbindungslinie der Punkte (x, y) und (x_1, y_1) senkrecht zur Drehungsmittelpunktsgeraden der Kurve $\tau = \text{const.}$ steht. Die Gleichung der letzteren Geraden in der Normalform ist:

$$\frac{(x' - x)\left(\frac{\cos\alpha}{\varrho_2} - \frac{\sin\alpha}{\varrho_1}\right) + (y' - y)\left(\frac{\sin\alpha}{\varrho_2} + \frac{\cos\alpha}{\varrho_1}\right) - 1}{\sqrt{\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2}}} = 0.$$

Der Punkt (x, y) liegt auf der negativen Seite der Geraden und hat von ihr den senkrechten Abstand $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2}}}$; der Punkt (x_1, y_1) liegt auf der positiven Seite der Geraden und hat von ihr denselben Abstand. Man erhält also den Punkt (x_1, y_1), indem man vom Punkte (x, y) aus ein Lot auf die Drehungsmittelpunktsgerade fällt und es um sich selbst über die Gerade hinaus verlängert, ein Ergebnis, das geometrisch offenbar ist.

Der Punkt (x_1, y_1) hat noch eine weitere wichtige, von G. Scheffers bemerkte Eigenschaft, die wir im folgenden Paragraphen herleiten wollen.

Wir zeigen noch, daß der im Paragraph 19 S. 113 für $\frac{1}{r_2}$ aufgestellte Ausdruck, nämlich $\frac{d\varphi}{d\sigma_2} + \frac{1}{\varrho_2}$, mit dem Ausdruck für $-\frac{1}{r_\varphi}$ übereinstimmt. Es ist:

$$\frac{d\varphi}{d\sigma_2} = \cos\varphi \frac{d\varphi}{ds_1} + \sin\varphi \frac{d\varphi}{ds_2};$$

aber ϱ_2 ist, da wir hier die positive Normalenrichtung der zu φ gehörenden Kurven entgegengesetzt der damals benutzten genommen haben, gleich $-\varrho$. Daher entsteht:

$$\frac{1}{r_2} = -\frac{\cos\varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin\varphi}{\varrho_2} = -\frac{1}{r\varphi}.$$

Beide Berechnungsarten liefern somit denselben Drehungsmittelpunkt.

§ 25. Zerlegung einer doppelt unendlichen Kreisschar in Scharen von Krümmungskreisen. Äquitangentialkurven.

Im § 16 S. 79 stellten wir eine einfach unendliche Schar von Kreisen durch die Gleichung dar:

$$(x - \varphi_1)^2 + (y - \varphi_2)^2 = \varphi^2.$$

Wir betrachteten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$ als Funktionen der Bogenlänge der Mittelpunktskurve und fanden, daß die Schar aus den Krümmungskreisen einer Kurve besteht, wenn $\varphi'^2 = 1$ ist.

Gegenwärtig sehen wir φ_1 und φ_2 als Funktionen zweier Veränderlicher t und τ an und schreiben, damit keine Verwechselung mit dem im vorigen Paragraphen benutzten φ vorkommt, φ_0 statt φ. Wir fragen, unter welchen Umständen es möglich ist, die Veränderlichen t und τ so als Funktionen zweier neuer Veränderlicher σ und ϑ zu bestimmen, daß 1. jede Kreisschar $\vartheta = \text{const.}$ aus den Krümmungskreisen einer Kurve besteht, und 2. daß σ die Bedeutung der Bogenlänge der zugehörigen Evoluten besitzt.

Die erste Forderung drückt sich in der Beziehung aus:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\sigma} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\sigma} = 1, \tag{1}$$

die zweite in der Beziehung:

$$\left\{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial t}{\partial\sigma}\right)^2 + 2\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau}\right\}\frac{\partial t}{\partial\sigma}\frac{\partial\tau}{\partial\sigma}$$
$$+ \left\{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\sigma}\right)^2 = 1. \tag{2}$$

Die Gleichung (1) ersetzt hier vollkommen die Forderung $\varphi_0'^2 = 1$, da man durch Ersetzen von σ durch $-\sigma$ für φ_0' den Wert -1 erhält.

Subtrahiert man die quadrierte Gleichung (1) von der Gleichung (2) und setzt:

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\right)^2 = a, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} = b,$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\right)^2 = c,$$

so ergibt sich:

$$a\left(\frac{\partial t}{\partial \sigma}\right)^2 + 2b\frac{\partial t}{\partial \sigma}\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} + c\left(\frac{\partial \tau}{\partial \sigma}\right)^2 = 0.$$

Indem wir mit λ eine noch zu bestimmende Funktion bezeichnen, ersetzen wir die letzte Gleichung durch die folgenden:

$$a\frac{\partial t}{\partial \sigma} + b\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = -\lambda\frac{\partial \tau}{\partial \sigma}, \quad b\frac{\partial t}{\partial \sigma} + c\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = \lambda\frac{\partial t}{\partial \sigma},$$

so daß:

$$(b-\lambda)\frac{\partial t}{\partial \sigma} + c\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = 0,$$

$$a\frac{\partial t}{\partial \sigma} + (b+\lambda)\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = 0,$$

und damit:

$$\lambda^2 = b^2 - ac.$$

Wenn $b^2 - ac < 0$, ist die Lösung unserer Aufgabe unmöglich. Um die geometrische Eigenart des Falles $b^2 - ac = 0$ aufzufinden, nehmen wir $\varphi_1 = t$, $\varphi_2 = \tau$, was natürlich stets gestattet ist, und erhalten:

$$a = 1 - \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\right)^2, \quad b = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau},$$

$$c = 1 - \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\right)^2, \quad b^2 - ac = -\left(1 - \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\right)^2\right).$$

Für $b^2 - ac = 0$ haben wir also:

$$\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\right)^2 = 1,$$

d. h. nach § 26 S. 164 daß die Kurven $\varphi_0 = \text{const.}$ eine Schar von Parallelkurven bilden. Nun sind t und τ die Koordinaten der Mittelpunkte der Kreise. Eine Kurve $\varphi_0 = \text{const.}$ ist daher der Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, deren Halbmesser gleich dem Werte der Konstanten ist.

Die für $\lambda = 0$ und $\varphi_1 = t$, $\varphi_2 = \tau$ geltenden Gleichungen:

$$a\frac{\partial t}{\partial \sigma} + b\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = 0, \quad b\frac{\partial t}{\partial \sigma} + c\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = 0$$

gehen über in die Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\right)^2\frac{\partial t}{\partial \sigma} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = 0,$$

$$-\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\frac{\partial t}{\partial \sigma} + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\right)^2\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = 0.$$

Wenn $\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}$ beständig gleich Null ist, folgt $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} = \pm 1$ und $\frac{\partial t}{\partial \sigma} = 0$. Die Kreise berühren hier sämtlich die t-Achse, oder, was dasselbe ist, die x-Achse; jeder Punkt dieser Achse spielt die Rolle einer Kurve, deren Krümmungskreise alle Kreise sind, deren Mittelpunkte auf einer durch ihn hindurchgehenden Parallelen zur y-Achse liegen. Entsprechendes gilt im Falle $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} = 0$. Nach Ausschluß dieser Fälle werden die letzten beiden Gleichungen durch die eine:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\frac{\partial t}{\partial \sigma} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = 0$$

vertreten. Diese stellt aber die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien der Schar $\varphi_0 = \text{const.}$ dar, somit eine Schar gerader Linien. Jede dieser Geraden ist die Mittelpunktskurve einer Kreisschar $\vartheta = \text{const.}$ Die gegebenen Kreise bestehen hier aus den sämtlichen Kreisen, die eine Kurve berühren. Jeder Punkt der Kurve spielt die Rolle einer Kurve, deren Krümmungskreise alle die Kreise sind, deren Mittelpunkte auf der durch den Punkt gehenden Normalen der ersteren Kurve liegen.

Dasselbe Ergebnis folgt auch so. Die Koordinaten der von den Krümmungskreisen berührten Kurven sind, weil $\frac{\partial t}{\partial \sigma} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}$, $\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}$ die folgenden:

$$x = t - \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}, \quad y = \tau - \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}. \tag{3}$$

Aber:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \sigma} &= \frac{\partial t}{\partial \sigma} - \left(\varphi_0 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\right)^2\right)\frac{\partial t}{\partial \sigma} - \left(\varphi_0 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\right)\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \\ &= \left(\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\right)^2 - \varphi_0 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \left(\varphi_0 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\right)\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} \\ &= -\varphi_0\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t \partial \tau}\right) = 0.\end{aligned}$$

Ebenso folgt, daß $\frac{\partial y}{\partial \sigma}$ verschwindet. Die den einzelnen Werten von ϑ entsprechenden Evolventen werden daher durch Punkte vertreten, die auf der durch die Gleichungen (3) dargestellten Kurve liegen.

Setzen wir nun $b^2 - ac > 0$ voraus. Für die späteren Anwendungen empfiehlt es sich, eine kleine Änderung der Behandlungsweise eintreten zu lassen. Wenn die gegebenen Kreise irgendwie aus einer Kurvenschar $\tau = \text{const.}$ hergeleitet sind, kann man statt der Differentiationen nach t und τ die Ableitungen nach den Bogenlängen s_1 und s_2 benutzen. Es sei allgemein:

$$\frac{df(x, y)}{d\sigma} = \frac{df}{ds_1} m + \frac{\partial f}{ds_2} n.$$

Dann folgt an Stelle der Gleichung (1):

$$\frac{d\varphi_0}{ds_1}m + \frac{d\varphi_0}{ds_2}n = 1,$$

und da:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma} = \frac{d\varphi_1}{ds_1}m + \frac{d\varphi_1}{ds_2}n, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial\sigma} = \frac{d\varphi_2}{ds_1}m + \frac{d\varphi_2}{ds_2}n,$$

so wird die Gleichung (2) durch die folgende vertreten:

$$\left\{\left(\frac{d\varphi_1}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_2}{ds_1}\right)^2\right\}m^2 + \left\{\frac{d\varphi_1}{ds_1}\frac{d\varphi_1}{ds_2} + \frac{d\varphi_2}{ds_1}\frac{d\varphi_2}{ds_2}\right\}mn$$
$$+ \left\{\left(\frac{d\varphi_1}{ds_2}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_2}{ds_2}\right)^2\right\}n^2 = 1.$$

Wir setzen:

$$\left(\frac{d\varphi_1}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_2}{ds_1}\right)^2 - \left(\frac{d\varphi_0}{ds_1}\right)^2 = a_1,$$
$$\frac{d\varphi_1}{ds_1}\frac{d\varphi_1}{ds_2} + \frac{d\varphi_2}{ds_1}\frac{d\varphi_2}{ds_2} - \frac{d\varphi_0}{ds_1}\frac{d\varphi_0}{ds_2} = b_1,$$
$$\left(\frac{d\varphi_1}{ds_2}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_2}{ds_2}\right)^2 - \left(\frac{d\varphi_0}{ds_2}\right)^2 = c_1.$$

Wenn $b^2 - ac > 0$, so ist auch $b_1^2 - a_1 c_1 > 0$. Man sieht dies am einfachsten ein, wenn man die Kurven $t = \text{const.}$ senkrecht zu den Kurven $\tau = \text{const.}$ nimmt, was immer gestattet ist. Alsdann hat man:

$$\frac{df}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{df}{ds_2} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial f}{\partial \tau},$$
$$a_1 = \frac{1}{E}a, \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{E}\sqrt{G}}b, \quad c_1 = \frac{1}{G}c,$$
$$b_1^2 - a_1 c_1 = \frac{1}{EG}(b^2 - ac).$$

Da E und G positive Zahlen sind, besitzt hiernach $b_1^2 - a_1 c_1$ dasselbe Vorzeichen wie $b^2 - ac$.

Wir haben nun:

$$a_1 m^2 + 2b_1 mn + c_1 n^2 = 0,$$

d. h.

$$a_1 m + b_1 n = -\lambda_1 n, \quad b_1 m + c_1 n = \lambda_1 m,$$
$$\lambda_1^2 = b_1^2 - a_1 c_1.$$

Es folgt somit, daß:

$$\lambda_1 = \varepsilon\sqrt{b_1^2 - a_1 c_1}$$

ist, wo ε die positive oder negative Einheit bedeutet.

Zwischen m und n bestehen jetzt die beiden Gleichungen:

$$\frac{d\varphi_0}{ds_1} m + \frac{d\varphi_0}{ds_2} n = 1,$$

$$a_1 m + (b_1 + \varepsilon\sqrt{b_1^2 - a_1 c_1})\, n = 0,$$

somit ergibt sich, wenn die Determinante der Gleichungen nicht verschwindet:

$$(4) \qquad \begin{cases} m = \dfrac{b_1 + \varepsilon\sqrt{b_1^2 - a_1 c_1}}{(b_1 + \varepsilon\sqrt{b_1^2 - a_1 c_1})\dfrac{d\varphi_0}{ds_1} - a_1 \dfrac{d\varphi_0}{ds_2}}, \\[2ex] n = \dfrac{-a_1}{(b_1 + \varepsilon\sqrt{b_1^2 - a_1 c_1})\dfrac{d\varphi_0}{ds_1} - a_1 \dfrac{d\varphi_0}{ds_2}}. \end{cases}$$

Verschwindet aber die Determinante, so gilt die Gleichung:

$$\left(b_1 \frac{d\varphi_0}{ds_1} - a_1 \frac{d\varphi_0}{ds_2}\right)^2 = (b_1^2 - a_1 c_1)\left(\frac{d\varphi_0}{ds_1}\right)^2.$$

Setzt man:

$$\frac{d\varphi_1}{ds_1}\frac{d\varphi_0}{ds_2} - \frac{d\varphi_1}{ds_2}\frac{d\varphi_0}{ds_1} = d_1, \quad \frac{d\varphi_2}{ds_1}\frac{d\varphi_0}{ds_2} - \frac{d\varphi_2}{ds_2}\frac{d\varphi_0}{ds_1} = d_2,$$

$$\frac{d\varphi_1}{ds_1}\frac{d\varphi_2}{ds_2} - \frac{d\varphi_1}{ds_2}\frac{d\varphi_2}{ds_1} = d_3,$$

so geht die letzte Gleichung in $a_1(d_1^2 + d_2^2) = 0$ über.

Wenn d_1 und d_2 zugleich verschwinden, muß auch d_3 verschwinden, und damit auch $b_1^2 - a_1 c_1$, was gegen unsere Voraussetzung verstößt. Als erste Bedingung für das Verschwinden der Determinante folgt daher $a_1 = 0$. Wäre jetzt $\frac{d\varphi_0}{ds_1} = 0$, so würde sich $\frac{d\varphi_1}{ds_1} = 0$ und $\frac{d\varphi_2}{ds_1} = 0$ ergeben, und weiter $b_1 = 0$, sowie $b_1^2 - a_1 c_1 = 0$.

Als zweite Bedingung erhalten wir somit $b_1 + \varepsilon\sqrt{b_1^2} = 0$ oder $\lambda_1 = -b_1$.

Die Werte von m und n ergeben sich jetzt aus den Gleichungen:

$$\frac{d\varphi_0}{ds_1} m + \frac{d\varphi_0}{ds_2} n = 1,$$

$$2b_1 m + c_1 n = 0.$$

Die hier auftretende Determinante kann nicht verschwinden. Anderenfalls hätte man:

$$\left\{\left(\frac{d\varphi_1}{ds_2}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_2}{ds_2}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{d\varphi_1}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_2}{ds_1}\right)^2\right\} = 2\left\{\frac{d\varphi_1}{ds_1}\frac{d\varphi_1}{ds_2} + \frac{d\varphi_2}{ds_1}\frac{d\varphi_2}{ds_2}\right\}$$
$$- \left(\frac{d\varphi_0}{ds_1}\right)^2\left(\frac{d\varphi_0}{ds_2}\right)^2.$$

Die linke Seite dieser Beziehung ist gleich:

$$d_3^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{ds_1}\frac{d\varphi_1}{ds_2} + \frac{d\varphi_2}{ds_1}\frac{d\varphi_2}{ds_2}\right)^2;$$

somit gewinnt die Beziehung die Form:

$$b_1^2 + d_3^2 = 0,$$

d. h. es ist entweder $b_1 = 0$, oder b_1 ist imaginär.

Wir erhalten für $a_1 = 0$ und $\lambda_1 = -b_1$:

$$(5)\qquad \begin{cases} m = \dfrac{c_1}{c_1\dfrac{d\varphi_0}{ds_1} - 2b_1\dfrac{d\varphi_0}{ds_2}}, \\ n = \dfrac{-2b_1}{c_1\dfrac{d\varphi_0}{ds_1} - 2b_1\dfrac{d\varphi_0}{ds_2}}. \end{cases}$$

Den beiden Werten von ε entsprechend, gibt es auf jedem der gegebenen Kreise zwei Punkte, in denen er je eine Kurve als Krümmungskreis berührt. Ist daher eine Kurvenschar $\tau = \text{const.}$ durch die Gleichungen $x = f_1(t, \tau)$, $y = f_2(t, \tau)$ gegeben, so sind die Krümmungskreise der Kurven $\tau = \text{const.}$ zugleich die Krümmungskreise einer zweiten Kurvenschar. Um letztere zu bestimmen, setzen wir:

$$\varphi_1 = f_1 - \varrho_1 \sin\alpha, \quad \varphi_2 = f_2 + \varrho_1 \cos\alpha, \quad \varphi_0 = \varrho_1.$$

Da:

$$\frac{d\varphi_1}{ds_1} = -\frac{d\varrho_1}{ds_1}\sin\alpha, \quad \frac{d\varphi_1}{ds_2} = -\sin\alpha\left(1 + \frac{d\varrho_1}{ds_2}\right) + \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\cos\alpha,$$

$$\frac{d\varphi_2}{ds_1} = \frac{d\varrho_1}{ds_1}\cos\alpha, \quad \frac{d\varphi_2}{ds_2} = \cos\alpha\left(1 + \frac{d\varrho_1}{ds_2}\right) + \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\sin\alpha,$$

so folgt:

$$a_1 = 0, \quad b_1 = \frac{d\varrho_1}{ds_1}, \quad c_1 = 1 + 2\frac{d\varrho_1}{ds_2} + \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2,$$

$$b_1^2 - a_1 c_1 = \left(\frac{d\varrho_1}{ds_1}\right)^2.$$

Die Koordinaten eines Berührungspunktes sind:

$$x = \varphi_1 - \varphi_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma}, \quad y = \varphi_2 - \varphi_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial\sigma}.$$

Setzen wir:

$$\varepsilon\sqrt{b_1^2 - a_1 c_1} = \frac{d\varrho_1}{ds_1},$$

so kommt nach (4):

$$m = \frac{1}{\dfrac{d\varrho_1}{ds_1}}, \quad n = 0,$$

d. h. $\quad x = \varphi_1 + \varphi_0 \sin\alpha = f_1, \quad y = \varphi_2 - \varphi_0\cos\alpha = f_2,$

und wir haben es mit dem gegebenen Berührungspunkt auf der Kurve $\tau = \text{const.}$ zu tun.

Nehmen wir:

$$\varepsilon\sqrt{b_1^2 - a_1 c_1} = -\frac{d\varrho_1}{ds_1},$$

so folgt nach (5):

$$m = \frac{1+\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 + 2\frac{d\varrho_1}{ds_2}}{\left(1+\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2\right)\frac{d\varrho_1}{ds_2}}, \quad n = \frac{-2}{1+\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2},$$

und damit:

$$(6) \qquad x' = f_1 + 2\frac{\frac{\cos\alpha}{\varrho_2} - \frac{\sin\alpha}{\varrho_1}}{\frac{1}{\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_2^2}}, \quad y' = f_2 + 2\frac{\frac{\sin\alpha}{\varrho_2} + \frac{\cos\alpha}{\varrho_1}}{\frac{1}{\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_2^2}}.$$

Diese Ausdrücke stimmen mit den vorhin für x_1 und y_1 gefundenen überein. Der zweite Berührungspunkt fällt daher mit dem zweiten Schnittpunkt der zu dem Punkt $x = f_1$, $y = f_2$ gehörenden Krümmungskreise der Isogonalkurven zusammen. Zugleich aber ist der Punkt (x_1, y_1) der zweite Berührungspunkt für alle zum Punkt (f_1, f_2) gehörenden Krümmungskreise der Isogonalkurven*); denn setzen wir in den vorstehenden Ausdrücken statt α die Zahl $\alpha + \varphi$, so kommt:

$$x_\varphi = f_1 + 2\frac{\frac{\cos(\alpha+\varphi)}{\varrho'} - \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\varrho}}{\frac{1}{\varrho'^2}+\frac{1}{\varrho^2}} = x', \quad \text{und} \quad y_\varphi = y'.$$

Um die Differentialgleichung derjenigen Kurven aufzustellen, deren Krümmungskreise mit denen der Schar $\tau = \text{const.}$ zusammenfallen, haben wir die Tangente des zum Punkte (f_1, f_2) gehörenden Krümmungskreises in dem durch (6) bestimmten Punkte (x', y') zu bestimmen. Man erhält:

$$x' - \varphi_1 = x' - f_1 + \varrho_1 \sin\alpha = \frac{\frac{2\cos\alpha}{\varrho_2} - \varrho_1 \sin\alpha\left(\frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{1}{\varrho_2^2}\right)}{\frac{1}{\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_2^2}},$$

$$y' - \varphi_2 = y' - f_2 - \varrho_1 \cos\alpha = \frac{\frac{2\sin\alpha}{\varrho_2} + \varrho_1 \cos\alpha\left(\frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{1}{\varrho_2^2}\right)}{\frac{1}{\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_2^2}},$$

und die gesuchte Differentialgleichung ist die folgende:

$$\left\{\frac{2\cos\alpha}{\varrho_1\varrho_2} - \sin\alpha\left(\frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{1}{\varrho_2^2}\right)\right\} dx' + \left\{\frac{2\sin\alpha}{\varrho_1\varrho_2} + \cos\alpha\left(\frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{1}{\varrho_2^2}\right)\right\} dy' = 0,$$

oder kurz:

$$\alpha_1 dx' + \alpha_2 dy' = 0.$$

*) Die Arbeiten von G. Scheffers über Isogonalkurven und Äquitangialkurven befinden sich in den Berichten der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig 1898 S. 261 und 1904 S. 105, sowie in den mathematischen Annalen Bd. 60, 1905, S. 491.

Hieraus erhalten wir die Differentialgleichung der Kurven, deren Krümmungskreise mit den Krümmungskreisen der zu dem Winkel φ gehörenden Isogonalkurven zusammenfallen, indem wir statt α setzen $\alpha + \varphi$, sowie ϱ und ϱ' statt ϱ_1 und ϱ_2. Es ergibt sich:

$$(\alpha_1 \cos\varphi + \alpha_2 \sin\varphi)\, dx' + (\alpha_2 \cos\varphi - \alpha_1 \sin\varphi)\, dy' = 0.$$

Dies ist aber die Differentialgleichung der Kurven, welche die Integralkurven der vorigen Gleichung unter dem Winkel $-\varphi$ schneiden. Durch die Forderung der Gemeinsamkeit der Krümmungskreise werden daher Isogonalkurven wieder in Isogonalkurven übergeführt.

Ein zweiter von G. Scheffers gefundener Satz, der auf der Forderung der Gemeinsamkeit der Krümmungskreise beruht, bezieht sich auf die von G. Scheffers mit dem Namen Äquitangentialkurven belegten Kurven. Tragen wir auf jeder Tangente jeder Einzelkurve $\tau = \text{const.}$ von ihrem Berührungspunkt aus eine konstante Strecke mit der Maßzahl h ab, so wird jedem Punkt (f_1, f_2) ein Punkt mit den Koordinaten:

$$x = g_1 = f_1 + h\cos\alpha, \quad y = g_2 = f_2 + h\sin\alpha \tag{7}$$

zugeordnet. Wir suchen nun die doppelt unendlich vielen Punkte (g_1, g_2) so auf einer einfach unendlichen Schar von Kurven anzuordnen, daß die Tangente einer solchen Kurve in einem beliebigen Punkt (g_1, g_2) zusammenfällt mit der im zugehörigen Punkte (f_1, f_2) berührenden Tangente der durch den letzteren Punkt gehenden Kurve $\tau = \text{const.}$ Die Differentialgleichung dieser Äquitangentialkurven ist:

$$\frac{dg_2}{dg_1} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Um die Krümmungsverhältnisse der Äquitangentialkurven und ihrer orthogonalen Trajektorien zu untersuchen, bezeichnen wir die Bogenlänge der ersteren mit σ_1, die der letzteren mit σ_2.

Wir setzen allgemein:

$$\frac{df(x,y)}{d\sigma_1} = m_1 \frac{df}{ds_1} + n_1 \frac{df}{ds_2},$$
$$\frac{df(x,y)}{d\sigma_2} = m_2 \frac{df}{ds_1} + n_2 \frac{df}{ds_2}.$$

Hiernach ist:

$$\frac{dg_1}{d\sigma_1} = m_1\left(\cos\alpha - \frac{h\sin\alpha}{\varrho_1}\right) - n_1\left(1 - \frac{h}{\varrho_2}\right)\sin\alpha,$$
$$\frac{dg_2}{d\sigma_1} = m_1\left(\sin\alpha + \frac{h\cos\alpha}{\varrho_1}\right) + n_1\left(1 - \frac{h}{\varrho_2}\right)\cos\alpha.$$

Damit:

$$\frac{dg_1}{d\sigma_1} = \cos\alpha, \quad \frac{dg_2}{d\sigma_1} = \sin\alpha$$

werde, ist:

$$m_1 = 1, \quad n_1 = \frac{h\varrho_2}{\varrho_1(h-\varrho_2)}$$

zu nehmen.

Ferner hat man:

$$\frac{dg_1}{d\sigma_2} = m_2\left(\cos\alpha - \frac{h\sin\alpha}{\varrho_1}\right) - n_2\left(1-\frac{h}{\varrho_2}\right)\sin\alpha,$$

$$\frac{dg_2}{d\sigma_2} = m_2\left(\sin\alpha + \frac{h\cos\alpha}{\varrho_1}\right) + n_2\left(1-\frac{h}{\varrho_2}\right)\cos\alpha.$$

Damit:

$$\frac{dg_1}{d\sigma_2} = -\sin\alpha, \quad \frac{dg_2}{d\sigma_2} = \cos\alpha$$

werde, ist:

$$m_2 = 0, \quad n_2 = \frac{\varrho_2}{\varrho_2 - h}$$

zu setzen. Jetzt ergibt sich:

$$\frac{d^2g_1}{d\sigma_1^2} = \frac{d\cos\alpha}{d\sigma_1} = \frac{-\sin\alpha}{\varrho_1} + \frac{h\varrho_2}{\varrho_1(h-\varrho_2)}\frac{\sin\alpha}{\varrho_2} = -\frac{\varrho_2}{\varrho_1(\varrho_2-h)}\sin\alpha,$$

$$\frac{d^2g_1}{d\sigma_2^2} = -\frac{d\sin\alpha}{d\sigma_2} = \frac{1}{\varrho_2-h}\cos\alpha.$$

Die Krümmung der Äquitangentialkurven werde mit $\frac{1}{t_1}$, die Krümmung ihrer orthogonalen Trajektorien mit $\frac{1}{t_2}$ bezeichnet. Dann folgt:

$$\frac{1}{t_1} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1(\varrho_2-h)}, \quad \frac{1}{t_2} = \frac{1}{\varrho_2-h}.$$

Die Krümmungskreise der Äquitangentialkurven sind zugleich die Krümmungskreise einer zweiten Kurvenschar. Der zweite Berührungspunkt auf dem im Punkte (g_1, g_2) berührenden Krümmungskreise hat die Koordinaten ((6) S. 152):

$$x'' = g_1 + \frac{2}{\frac{1}{t_1^2}+\frac{1}{t_2^2}}\left(\frac{\cos\alpha}{t_2} - \frac{\sin\alpha}{t_1}\right), \quad y'' = g_2 + \frac{2}{\frac{1}{t_1^2}+\frac{1}{t_2^2}}\left(\frac{\sin\alpha}{t_2} + \frac{\cos\alpha}{t_1}\right),$$

oder:

$$x'' = x' + h\frac{\left(\frac{1}{\varrho_1^2}-\frac{1}{\varrho_2^2}\right)\cos\alpha + \frac{2}{\varrho_1\varrho_2}\sin\alpha}{\frac{1}{\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_2^2}},$$

$$y'' = y' + h\frac{\left(\frac{1}{\varrho_1^2}-\frac{1}{\varrho_2^2}\right)\sin\alpha - \frac{2}{\varrho_1\varrho_2}\cos\alpha}{\frac{1}{\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_2^2}}.$$

Hier sind die Koeffizienten von h, wie aus den S. 152 für $x' - \varphi_1$ und $y' - \varphi_2$ aufgestellten Ausdrücken hervorgeht, die Richtungskosinus der im Punkte (x', y') berührenden Tangente des zum Punkt

(f_1, f_2) gehörenden Krümmungskreises der durch diesen Punkt gehenden Kurve $\tau = \text{const.}$; somit bedeutet h die Maßzahl des Abstandes der Punkte (x'', y'') und (x', y'). Die Koordinaten des zum Punkt (g_1, g_2) gehörenden Krümmungsmittelpunkts der Äquitangentialkurve sind:

$$x = f_1 + h \cos\alpha - \frac{\varrho_1(\varrho_2 - h)}{\varrho_2} \sin\alpha, \quad y = f_2 + h \sin\alpha + \frac{\varrho_1(\varrho_2 - h)}{\varrho_2} \cos\alpha.$$

Man findet durch eine einfache Rechnung:

$$x'' - x = (x' - \varphi_1)\left(1 - \frac{1}{\varrho_2}\right), \quad y'' - y = (y' - \varphi_2)\left(1 - \frac{1}{\varrho_2}\right),$$

folglich berührt der Krümmungskreis der Äquitangentialkurve im Punkte (x'', y'') die im Punkte (x', y') berührende Tangente des Krümmungskreises der Kurve $\tau = \text{const.}$

Durch die Forderung der Gemeinsamkeit der Krümmungskreise wird somit einer Schar von Äquitangentialkurven der Schar $\tau = \text{const.}$ eine zweite Schar von Kurven zugeordnet, die aus den zu demselben Werte von h gehörenden Äquitangentialkurven derjenigen Schar von Kurven besteht, die durch jene Forderung aus der Schar $\tau = \text{const.}$ hergeleitet ist.

Beispiele. 1. Das naheliegendste Beispiel bilden die Parallelkurven. Es seien x_0 und y_0 die Koordinaten einer ebenen Kurve. Wir setzen:

$$x_0 = \psi_1(t), \quad y_0 = \psi_2(t)$$

und verstehen unter t die Maßzahl der Bogenlänge, unter ϱ_0 den Krümmungshalbmesser der Kurve (x_0, y_0). Die Schar der zu dieser Kurve parallelen Kurven wird dargestellt durch die Gleichungen:

$$x = \psi_1(t) - \tau\,\psi_2'(t), \quad y = \psi_2(t) + \tau\,\psi_1'(t),$$

so daß:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \psi_1'\left(1 - \frac{\tau}{\varrho_0}\right), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \psi_2'\left(1 - \frac{\tau}{\varrho_0}\right),$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = -\psi_2', \qquad \frac{\partial y}{\partial \tau} = \psi_1',$$

$$E = \left(1 - \frac{\tau}{\varrho_0}\right)^2, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad \Delta = 1 - \frac{\tau}{\varrho_0}.$$

Es sei ε gleich der positiven oder negativen Einheit, je nachdem $1 - \frac{\tau}{\varrho_0}$ positiv oder negativ ausfällt. Wir erhalten dann gemäß § 24 S. 139 für die Ableitungen einer Funktion $f(t, \tau)$ nach den Bogenlängen s_1 und s_2 der Kurven $\tau = \text{const.}$, $t = \text{const.}$:

$$\frac{df(t,\tau)}{ds_1} = \frac{\varepsilon}{1 - \frac{\tau}{\varrho_0}} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{df(t,\tau)}{ds_2} = \varepsilon\,\frac{\partial f}{\partial \tau},$$

und für die Ableitungen der Koordinaten:

$$\frac{dx}{ds_1} = \varepsilon\psi_1', \quad \frac{dy}{ds_1} = \varepsilon\psi_2', \quad \frac{dx}{ds_2} = -\varepsilon\psi_2', \quad \frac{dy}{ds_2} = \varepsilon\psi_1',$$

$$\frac{d^2x}{ds_1^2} = \frac{-\psi_2'}{\varrho_0 - \tau} = \frac{\varepsilon}{\varrho_0 - \tau}\frac{dx}{ds_2}, \quad \frac{d^2y}{ds_2^2} = 0,$$

folglich:

$$\varrho_1 = \varepsilon(\varrho_0 - \tau), \quad \varrho_2 = \infty.$$

Der Leser möge sich an dem Beispiel einer Ellipse die durch die beiden Werte von ε bedingten Richtungsverhältnisse klar machen. Setzen wir: $x = a\cos\vartheta$, $y = b\sin\vartheta$ und nehmen die Bogenlänge t mit ϑ wachsend, so geht in einem Punkt P des ersten Quadranten die positive Tangentenrichtung nach der positiven y-Achse hin, die positive Normalenrichtung nach dem Krümmungsmittelpunkt P_1 hin. Die Parallelkurven der Ellipse, welche die von P_1 durch P gelegte Halbgerade schneiden, gehören entweder zu einem negativen τ, oder zu einem positiven $\tau < \varrho_0$. In ihren Schnittpunkten mit der Halbgeraden ist ihre positive Halbtangente parallel der positiven Halbtangente in P, die entsprechenden Krümmungshalbmesser sind positiv. Bei den Parallelkurven, welche die der vorigen entgegengesetzt gerichtete und von P_1 ausgehende Halbgerade schneiden, ist $\tau > \varrho_0$; die positive Tangentialrichtung ist in den Schnittpunkten der in P angenommenen entgegengesetzt, ebenso die positive Normalenrichtung, ε wird gleich -1, und die Krümmungshalbmesser ϱ_1 sind positiv.

Der zweite Berührungspunkt des zum Punkt (x, y) gehörenden Krümmungskreises der Kurve $\tau = \text{const.}$ hat die Koordinaten ((6) S. 152):

$$x' = \psi_1 - \tau\psi_2' - 2\varrho_1\varepsilon\psi_2', \quad y' = \psi_2 + \tau\psi_1' + 2\varrho_1\varepsilon\psi_1';$$

er liegt daher dem ersten diametral gegenüber; die Kreistangenten in beiden Berührungspunkten sind parallel.

Um die Kurvenschar zu finden, deren Krümmungskreise mit denen der gegebenen Schar zusammenfallen, haben wir die Gleichung:

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{\psi_2'}{\psi_1'}$$

zu integrieren.

Da:

$$x' = \psi_1 - (2\varrho_0 - \tau)\psi_2', \quad y' = \psi_2 + (2\varrho - \tau)\psi_1',$$

so folgt:

$$dx' = \left\{\psi_1'\left(1 - \frac{2\varrho_0 - \tau}{\varrho_0}\right) - 2\frac{d\varrho_0}{dt}\psi_2'\right\}dt + \psi_2'\,d\tau,$$

$$dy' = \left\{\psi_2'\left(1 - \frac{2\varrho_0 - \tau}{\varrho_0}\right) + 2\frac{d\varrho_0}{dt}\psi_2'\right\}dt - \psi_1'\,d\tau.$$

Die vorige Differentialgleichung ist daher gleichbedeutend mit der folgenden:

$$2\frac{d\varrho_0}{dt}dt = d\tau,$$

d. h.

$$\tau = 2\varrho_0 - \vartheta,$$

wenn wir mit $-\vartheta$ die Integrationskonstante bezeichnen.

Setzt man diesen Ausdruck von τ in die Ausdrücke von x' und y' ein, so kommt:

$$x' = \psi_1 - \vartheta\psi_2', \quad y' = \psi_2 + \vartheta\psi_1',$$

die zweite Schar fällt somit mit der ersten zusammen.

Dies Ergebnis war auf Grund des Satzes (S. 33), daß jeder Krümmungskreis einer Evolvente zugleich ein Krümmungskreis einer anderen Evolvente ist, vorauszusehen.

Da die Krümmungsmittelpunkte jeder Parallelkurve der gegebenen Kurve mit denen der letzteren zusammenfallen, so fallen die Geraden, welche durch die zu ϱ_1 und ϱ_2 ($= \infty$) gehörenden Krümmungsmittelpunkte gelegt sind, mit den Normalen der Evolute der gegebenen Kurve zusammen. Um die Krümmungsmittelpunkte von Isogonalkurven der parallelen Kurven zu finden, hat man daher nur ihre Normalen mit jenen Evolutennormalen zum Schnitt zu bringen.

Da die orthogonalen Trajektorien einer Schar von parallelen Kurven aus Geraden bestehen, so sind hiermit auch die Krümmungsmittelpunkte der Isogonalkurven einer Geradenschar gefunden.

Fassen wir nun die Äquitangentialkurven einer Schar von Parallelkurven ins Auge. Tragen wir auf der zum Wertepaar (t, τ) gehörenden Tangente der Kurve $\tau = \text{const.}$ vom Berührungspunkt aus eine Strecke mit der Maßzahl h ab, so erhalten wir einen Punkt, dessen Koordinaten:

$$x = g_1 = \psi_1 - \tau\psi_2' + h\psi_1', \quad y = g_2 = \psi_2 + \tau\psi_1' + h\psi_2'$$

sind. Die Differentialgleichung der zu h gehörenden Äquitangentialkurven, nämlich:

$$\frac{dg_2}{dg_1} = \frac{\psi_2'}{\psi_1'}$$

erhält die Gestalt:

$$\frac{h}{\varrho_0}dt + d\tau = 0,$$

somit:

$$\tau = -h\int\frac{dt}{\varrho_0} + \vartheta,$$

wo ϑ eine Integrationskonstante bedeutet.

Wir berechnen die Koordinaten (x_1, y_1) des Krümmungsmittelpunkts einer Kurve $\vartheta = \text{const.}$ Die allgemeinen Formeln liefern:

$$x_1 = g_1 - \frac{\left\{\left(\frac{\partial g_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial t}\right)^2\right\}\frac{\partial g_2}{\partial t}}{\frac{\partial g_1}{\partial t}\frac{\partial^2 g_2}{\partial t^2} - \frac{\partial g_2}{\partial t}\frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2}}, \quad y_1 = g_2 + \frac{\left\{\left(\frac{\partial g_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial t}\right)^2\right\}\frac{\partial g_1}{\partial t}}{\frac{\partial g_1}{\partial t}\frac{\partial^2 g_2}{\partial t^2} - \frac{\partial g_2}{\partial t}\frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2}}.$$

Man hat:

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \psi_1' - \tau\frac{\psi_1'}{\varrho_0} + \frac{h}{\varrho_0}\psi_2' - \frac{h}{\varrho_0}\psi_2' = \psi_1'\left(1 - \frac{\tau}{\varrho_0}\right),$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial t} = \psi_2'\left(1 - \frac{\tau}{\varrho_0}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2} = \psi_1'\frac{\partial\left(1 - \frac{\tau}{\varrho_0}\right)}{\partial t} - \left(1 - \frac{\tau}{\varrho_0}\right)\frac{\psi_2'}{\varrho_0}, \quad \frac{\partial^2 g_2}{\partial t^2} = \psi_2'\frac{\partial\left(1 - \frac{\tau}{\varrho_0}\right)}{\partial t} + \left(1 + \frac{\tau}{\varrho_0}\right)\frac{\psi_1'}{\varrho_0},$$

folglich:

$$x_1 = \psi_1 - \varrho_0\psi_2' + h\psi_1', \quad y_1 = \psi_2 + \varrho_0\psi_1' + h\psi_2'.$$

Die Krümmungsmittelpunktskurve (x_1, y_1) ist daher eine Parallelkurve der Evolute der Kurve (ψ_1, ψ_2). Es besteht also der Satz: Die Äquitangentialkurven einer Schar paralleler Kurven fallen zusammen mit den Evolventen der Parallelkurven der Evolute der Schar.

2. Als zweites Beispiel betrachten wir eine Schar konfokaler Parabeln. Es sei:

$$x = t^2 - \tau^2, \quad y = 2t\tau;$$

dann ist:

$$E = 4(t^2 + \tau^2) = G, \quad F = 0.$$

Für die Schar $\tau = \text{const.}$ erhalten wir als allgemeine Definition der Ableitungen einer Funktion $f(t, \tau)$ nach ihrer Bogenlänge s_1 und der ihrer orthogonalen Trajektorien s_2:

$$\frac{df(t,\tau)}{ds_1} = \frac{1}{2\sqrt{t^2+\tau^2}}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{df(t,\tau)}{ds_2} = \frac{1}{2\sqrt{t^2+\tau^2}}\frac{\partial f}{\partial \tau}.$$

Daher:

$$\frac{dx}{ds_1} = \frac{t}{\sqrt{t^2+\tau^2}}, \quad \frac{dy}{ds_1} = \frac{\tau}{\sqrt{t^2+\tau^2}},$$

$$\frac{dx}{ds_2} = \frac{-\tau}{\sqrt{t^2+\tau^2}}, \quad \frac{dy}{ds_2} = \frac{t}{\sqrt{t^2+\tau^2}},$$

$$\frac{d^2x}{ds_1^2} = \frac{\tau^2}{2(t^2+\tau^2)^4} = \frac{-\tau}{2\left(\sqrt{t^2+\tau^2}\right)^3}\frac{dx}{ds_2},$$

$$\frac{d^2x}{ds_2^2} = \frac{-t^2}{2(t^2+\tau^2)^4} = \frac{-t}{2\left(\sqrt{t^2+\tau^2}\right)^3}\frac{dx}{ds_1},$$

somit:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{-\tau}{2\left(\sqrt{t^2+\tau^2}\right)^3}, \quad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{-t}{2\left(\sqrt{t^2+\tau^2}\right)^3}.$$

Für die Koordinaten des zweiten Berührungspunktes der Krümmungskreise ergibt sich:

$$x' = -3(t^2 - \tau^2) = -3x, \quad y' = -6t\tau = -3y.$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunkts sind:

$$x_1 = 3t^2 + \tau^2, \quad y_1 = -\frac{2t^3}{\tau},$$

daher:

$$x' + x_1 = -6t^2 + 2\tau^2, \quad y' - y_1 = \frac{2t}{\tau}(t^2 - 3\tau^2).$$

Die Differentialgleichung der Schar, deren Krümmungskreise mit denen der Schar $\tau = \text{const.}$ zusammenfallen, nämlich:

$$(x' - x_1)\,dx' + (y' - y_1)\,dy' = 0,$$

nimmt hier die Form an:

$$2t\tau\,dt + (\tau^2 - t^2)\,d\tau = 0,$$

oder:

$$\frac{dt^2}{d\tau} - \frac{t^2}{\tau} + \tau = 0.$$

Das Integral dieser linearen Differentialgleichung ist:

$$t^2 = \tau(\vartheta - \tau),$$

wo ϑ den Parameter bedeutet. Die Gleichung der in Rede stehenden Schar ist:

$$(x^2 + y^2)^2 + \vartheta^2 x(x^2 + y^2) - \frac{\vartheta^4 y^2}{4} = 0;$$

sie wird, wie die vorletzte Gleichung zeigt, durch eine Kreisschar in der t, τ-Ebene abgebildet.

Tragen wir auf der zum Wertepaar (t, τ) gehörenden Tangente der Kurve $\tau = \text{const.}$ vom Berührungspunkt aus die Strecke h ab, so ergibt sich ein Punkt mit den Koordinaten:

$$g_1 = t^2 - \tau^2 + \frac{ht}{w}, \quad g_2 = 2t\tau + \frac{h\tau}{w},$$

wo:

$$w = \sqrt{t^2 + \tau^2}.$$

Die Gleichung der Äquitangentialkurven, nämlich:

$$\frac{dg_2}{dg_1} = \frac{\tau}{t},$$

erhält die Form:

$$\frac{h\tau}{w}\,dt - \left(2w^2 + \frac{ht}{w}\right)d\tau = 0,$$

oder:

$$h\frac{d\frac{t}{\tau}}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2}\right)^3} = 2\tau\,d\tau.$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$t = (\tau^2 + \vartheta)\sqrt{t^2 + \tau^2}.$$

Die obigen Ausdrücke für x' und y' führen zu einer vielleicht noch nicht bemerkten Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte einer Parabel. Hat letztere, wie hier, die Gleichung:

$$y^2 = 4\tau^2(x + \tau^2),$$

so ist der Punkt mit den Koordinaten $-3x$, $-3y$ ein Punkt des Krümmungskreises, und da die Normale der Parabel bekannt ist, ist es auch damit der Krümmungsmittelpunkt. Schreiben wir p statt $2\tau^2$, und ersetzen $x + \tau^2$ durch x, so findet sich, daß bei der Parabel mit der Gleichung:

$$y^2 = 2px$$

der Punkt mit den Koordinaten $-3y$, $-3x + 2p$ auf dem zum Punkte (x, y) gehörenden Krümmungskreise liegt.

§ 26. Allgemeines über Ableitungen nach Bogenlängen. Parallelkurven. Isotherme Kurven.

Wir haben im § 19 die Ableitungen nach den Bogenlängen zweier durch Gleichungen von der Form:

$$x = f_1(t, \tau), \quad y = f_2(t, \tau)$$

festgelegter Kurvenscharen definiert, sodann im § 24 die Ableitungen nach der Bogenlänge s_1 der Kurven $\tau = \text{const.}$ und der Bogenlänge s_2 ihrer orthogonalen Trajektorien. Wie sind nun die Ableitungen nach s_1 und s_2 zu berechnen, wenn die Schar $\tau = \text{const.}$ durch eine Gleichung von der Form:

$$f(x, y) = \tau$$

oder, wenn sie durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung festgelegt ist?

I. Bei der Darstellung einer Schar durch eine Gleichung von der Form $f(x, y) = \tau$ haben wir gemäß § 14 S. 63 für die Richtungskosinus der positiven Halbtangenten und positiven Halbnormalen die Ausdrücke:

$$\frac{dx}{ds_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad \frac{dy}{ds_1} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\frac{dx}{ds_2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad \frac{dy}{ds_2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Zur Abkürzung werde:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = w$$

gesetzt. Die Definitionsgleichungen für die Ableitungen einer beliebigen Funktion $\mathfrak{F}(x, y)$ von x und y nach den Bogenlängen s_1 und s_2 sind:

$$\frac{d\mathfrak{F}(x, y)}{ds_1} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\frac{dx}{ds_1} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\frac{dy}{ds_1} = \frac{1}{w}\left\{\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right\},$$

$$\frac{d\mathfrak{F}(x, y)}{ds_2} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\frac{dx}{ds_2} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\frac{dy}{ds_2} = \frac{1}{w}\left\{\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\right\}.$$

Um die Krümmungshalbmesser der Kurven $\tau = \text{const.}$ und ihrer orthogonalen Trajektorien zu finden, berechnen wir die zweiten Ableitungen $\frac{d^2x}{ds_1^2}, \frac{d^2x}{ds_2^2}$.

Man hat:

$$\frac{d^2x}{ds_1^2} = \frac{d}{ds_1}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w},$$

daher:

$$\frac{d^2x}{ds_1^2} = \frac{1}{w^3}\left\{\frac{\partial f}{\partial y}\left(w\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\left(w\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\}.$$

Da:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$= w\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),$$

so erhalten wir:

$$\frac{d^2x}{ds_1^2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w}\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}}{w^2} - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{w}\right\}$$

$$= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w}\left\{\frac{d \log w}{ds_2} - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{w}\right\}.$$

Man hat ferner:

$$\frac{d^2x}{ds_2^2} = \frac{d}{ds_2}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w}$$

$$= \frac{1}{w^3}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\left(w\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(w\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{w^3}\left(w^2\frac{\partial w}{\partial x} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)}{w^3} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w}\cdot\frac{d \log w}{ds_1}.$$

Da nach § 24 S. 139:

$$\frac{d^2x}{ds_1^2} = \frac{1}{\varrho_1}\frac{dx}{ds_2}, \quad \frac{d^2x}{ds_2^2} = -\frac{1}{\varrho_2}\frac{dx}{ds_1},$$

so erhalten wir:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{d\log w}{ds_2} - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{w},$$

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{d\log w}{ds_1}.$$

Wir wollen hier noch zeigen, daß der für $\frac{1}{\varrho_2}$ gefundene Ausdruck mit dem Ergebnis im § 20 übereinstimmt. Dort betrachteten wir zwei Scharen $\tau = \text{const}$, $t = \text{const.}$ und nannten ihre Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2, mit ϱ_3 bezeichneten wir den Krümmungshalbmesser der orthogonalen Trajektorien der Kurven $\tau = \text{const.}$ Im gegenwärtigen Fall nehmen wir als Kurven $t = \text{const.}$ die Parallelen zur y-Achse, so daß: $x = t$. Die Funktion $f_2(t, \tau)$, welche das y liefert, ist aus der Gleichung:

$$f(t, f_2(t, \tau)) = \tau$$

zu berechnen. Für ihre Ableitungen nach t und τ erhalten wir die Beziehungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial \tau} = 1.$$

Die Krümmung $\frac{1}{\varrho_2}$ der Kurven $t = \text{const.}$ ist hier gleich Null, statt des früheren ϱ_3 ist das oben benutzte ϱ_2 zu setzen. Die im § 20 S. 119 entwickelte Formel (5) für die Krümmung der orthogonalen Trajektorien der Kurven $\tau = \text{const.}$ nimmt also die Gestalt an:

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\varrho_1} + \frac{d\varphi}{d\sigma_2}\right).$$

Man hat:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial t} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial f_2}{\partial \tau} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

$$E = \frac{w^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}, \quad G = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

Damit $\frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\sqrt{E}}$ gleich $\frac{dx}{ds_1}$, d. h. gleich $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w}$ werde, müssen wir annehmen, daß $\frac{\partial f}{\partial y}$ positiv sei. Dies kann stets erreicht werden, da sich die Schar $\tau = \text{const.}$ nicht ändert, wenn statt f geschrieben wird $-f$.

Es ist somit:

$$\sqrt{E} = \frac{w}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \quad \sqrt{G} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

zu setzen. Dadurch ergibt sich:

$$\cos\varphi = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w}, \quad \sin\varphi = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{w}.$$

Die Ableitung einer Funktion von x und y nach der Bogenlänge σ_2 wird hier gleich ihrer partiellen Ableitung nach y. Wir erhalten daher aus der Gleichung für $\cos\varphi$ die Beziehung:

$$\sin\varphi\frac{d\varphi}{d\sigma_2} = \frac{1}{w^2}\left(w\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{w}\right)$$

$$= \frac{1}{w^3}\frac{\partial f}{\partial y}\left(w\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right),$$

so daß:

$$\frac{d\varphi}{d\sigma_2} = \frac{\partial \log w}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{w^2}.$$

Der obige Ausdruck für $\frac{1}{\varrho_2}$ ergibt:

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{w}{\frac{\partial f}{\partial y}}\left\{-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{w}\left(\frac{d\log w}{ds_2} - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{w}\right) + \frac{\partial \log w}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{w^2}\right\}.$$

Aber:

$$-\frac{1}{w}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\log w}{ds_2} + \frac{\partial \log w}{\partial x} = \frac{1}{w^2}\left\{-\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \log w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \log w}{\partial y}\right) + w^2\frac{\partial \log w}{\partial x}\right\}$$

$$= \frac{1}{w}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\log w}{ds_1}.$$

Daher, wie oben gefunden:

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{d\log w}{ds_1}.$$

Anwendungen.

1. Parallele Kurven. Die Schar $\tau = \text{const.}$ besteht aus parallelen Kurven, wenn die Schar ihrer orthogonalen Trajektorien aus geraden Linien besteht, wenn also $\frac{1}{\varrho_2}$ verschwindet. Die hierzu nötige Bedingung:

$$\frac{dw}{ds_1} = 0,$$

oder:

$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

verlangt entweder, daß zwischen w und f eine Gleichung besteht, oder, daß w konstant ist.

Im letzteren Falle läßt sich die geometrische Bedeutung von f leicht angeben. Sind nämlich:

$$x = g_1(s), \quad y = g_2(s)$$

die Gleichungen einer Kurve mit der Bogenlänge s, so wird die Schar ihrer Parallelkurven durch die Gleichungen:

$$x = g_1 - hg_2', \quad y = g_2 + hg_1'$$

dargestellt. Aus den Beziehungen:

$$\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x} = 1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x} = 0,$$

oder:

$$g_1'\left(1 - \frac{h}{\varrho}\right)\frac{\partial s}{\partial x} - g_2'\frac{\partial h}{\partial x} = 1,$$

$$g_2'\left(1 - \frac{h}{\varrho}\right)\frac{\partial s}{\partial x} + g_1'\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

folgt:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -g_2'.$$

Aus den Beziehungen:

$$\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial y} = 1,$$

oder:

$$g_1'\left(1 - \frac{h}{\varrho}\right)\frac{\partial s}{\partial y} - g_2'\frac{\partial h}{\partial y} = 0,$$

$$g_2'\left(1 - \frac{h}{\varrho}\right)\frac{\partial s}{\partial y} + g_1'\frac{\partial h}{\partial y} = 1$$

folgt:

$$\frac{\partial h}{\partial y} = g_1',$$

somit haben wir:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

Wenn also $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 1$, so bedeutet f die Maßzahl der Bogenlänge der orthogonalen Trajektorien der Kurven

$\tau = \text{const.}$; wenn $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = c^2$, wo c eine Konstante bezeichnet, so bedeutet f diese Maßzahl multipliziert mit c.

Setzen wir z. B. die Gleichung der Schar aller Kreise, deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt, in die Form: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, so ist $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $\tau = r^2$. Zwischen f und w besteht die Gleichung: $4f^2 - w^2 = 0$. Setzen wir aber die Gleichung der betrachteten Kreisschar in die Form: $\sqrt{x^2 + y^2} - r = 0$, so wird $\tau = r$, und $w = 1$.

2. **Isotherme Kurven.** Wir suchen die Aufgabe der sogenannten winkeltreuen Abbildung einer Ebene auf eine zweite zu lösen. Die Gleichungen:

$$x = f_1(t, \tau), \quad y = f_2(t, \tau)$$

mögen eine eindeutige Abbildung eines Teiles der (t, τ)-Ebene auf einen Teil der xy-Ebene darstellen. Einer Kurve im ersten Teil entspricht dann eine Kurve im zweiten. Zieht man durch einen Punkt (t, τ) im ersten Teil zwei beliebig gewählte Kurven, so kann man fragen, unter welcher Bedingung der Schnittwinkel beider Kurven dem Schnittwinkel ihrer Bildkurven in der xy-Ebene gleich ist. Dabei sollen aber diejenigen Punkte (t, τ) ausgeschlossen werden, für die die Ableitungen $\frac{\partial f_1}{\partial t}$, $\frac{\partial f_2}{\partial t}$ oder die Ableitungen $\frac{\partial f_1}{\partial \tau}$, $\frac{\partial f_2}{\partial \tau}$ gleichzeitig verschwinden. Legen wir durch den Punkt (t, τ) eine Kurve mit den Gleichungen:

$$t = h_1(u), \quad \tau = h_2(u),$$

so bildet die dem wachsenden u entsprechende Halbtangente der Kurve mit der positiven t-Achse einen Winkel a, für den:

$$\cos a = \frac{h_1'(u)}{\sqrt{h_1'(u)^2 + h_2'(u)^2}}, \quad \sin a = \frac{h_2'(u)}{\sqrt{h_1'(u)^2 + h_2'(u)^2}};$$

die entsprechende Halbtangente der Bildkurve bildet mit der positiven x-Achse einen Winkel α, für den:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial t} h_1' + \frac{\partial f_1}{\partial \tau} h_2'}{\sqrt{E h_1'^2 + 2F h_1' h_2' + G h_2'^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial t} h_1' + \frac{\partial f_2}{\partial \tau} h_2'}{\sqrt{E h_1'^2 + 2F h_1' h_2' + G h_2'^2}}.$$

Legen wir durch den Punkt (t, τ) eine zweite Kurve mit den Gleichungen:

$$t = h_3(v), \quad \tau = h_4(v),$$

so bildet ihre dem wachsendem v entsprechende Halbtangente mit der t-Achse einen Winkel b, für den:

$$\cos b = \frac{h_3'}{\sqrt{h_3'^2 + h_4'^2}}, \quad \sin b = \frac{h_4'}{\sqrt{h_3'^2 + h_4'^2}}.$$

Die entsprechende Halbtangente der Bildkurve bildet mit der positiven x-Achse einen Winkel β, für den:

$$\cos\beta = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial t} h_3' + \frac{\partial f_1}{\partial \tau} h_4'}{\sqrt{E h_3'^2 + 2F h_3' h_4' + G h_4'^2}}, \quad \sin\beta = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial t} h_3' + \frac{\partial f_2}{\partial \tau} h_4'}{\sqrt{E h_3'^2 + 2F h_3' h_4' + G h_4'^2}}.$$

Damit die beiden Schnittwinkel einander gleich sein sollen, muß entweder $b - a = \beta - \alpha$, oder $b - a = \alpha - \beta$ sein, also stets muß $\cos(b - a) = \cos(\beta - \alpha)$ sein. Dies ergibt:

$$\frac{E h_1' h_3' + F(h_1' h_4' + h_2' h_3') + G h_2' h_4'}{\sqrt{E h_1'^2 + 2F h_1' h_2' + G h_2'^2}\sqrt{E h_3'^2 + 2F h_3' h_4' + G h_4'^2}} = \frac{h_1' h_3' + h_2' h_4'}{\sqrt{h_1'^2 + h_2'^2}\sqrt{h_3'^2 + h_4'^2}}.$$

Diese Beziehung soll bei beliebiger Wahl der beiden Kurven in der t, τ-Ebene, somit bei beliebiger Wahl der Zahlen h_1', h_2', h_3', h_4' bestehen, wobei natürlich das gleichzeitige Verschwinden von h_1' und h_2', oder h_3' und h_4' ausgeschlossen ist. Nehmen wir $h_1' = 0$, $h_4' = 0$, so liegt die Tangente der ersten Kurve parallel der t-Achse, die der zweiten parallel der τ-Achse. Unsere Beziehung ergibt, daß F verschwinden muß. Nehmen wir jetzt die beiden Zahlen h_1', h_2' als von Null verschieden, aber h_4' als verschwindend an, so folgt:

$$\frac{E h_1' h_3'}{\sqrt{E h_1'^2 + G h_2'^2}\sqrt{E h_3'^2}} = \frac{h_1' h_3'}{\sqrt{h_1'^2 + h_2'^2}\sqrt{h_3'^2}}.$$

Dies ergibt: $E = G$.

Man nennt eine Kurvenschar $\tau = \text{const.}$, die sich durch Gleichungen von der Form:

$$x = f_1(t, \tau), \quad y = f_2(t, \tau)$$

so darstellen läßt, daß $E = G$ und $F = 0$ eine isotherme Schar, weil die Aufgabe, in einer in stationärem Wärmezustand befindlichen Platte die Kurven gleicher Temperatur zu bestimmen, zuerst auf solche Scharen geführt hat. (G. Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris. S. 31.)

Es ist nun unsere Aufgabe, die gefundene Bedingung in eine solche Form zu setzen, daß sie unabhängig wird von der Art der analytischen Darstellung der Schar, daß sie also auch anwendbar ist, wenn die Schar $\tau = \text{const.}$ durch eine Gleichung von der Form $f(x, y, \tau) = 0$, oder durch zwei Gleichungen $x = f_1(t, \tau)$, $y = f_2(t, \tau)$ gegeben ist, wo die Kurven $t = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ sich nicht unter rechten Winkeln schneiden. Zu diesem Zweck bemerken wir, daß die Gleichungen (5) des § 20 S. 116 unter Berücksichtigung der Gleichungen (2) desselben Paragraphen für $F = 0$, oder was dasselbe ist, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ die Gestalt annehmen:

$$\frac{d \log\sqrt{E}}{ds_2} = -\frac{1}{\varrho_1}, \quad \frac{d \log\sqrt{G}}{ds_1} = -\frac{1}{\varrho_2}.$$

Im angenommenen Fall ist aber $\sqrt{E} = \sqrt{G}$ und:

$$\frac{d\log\sqrt{E}}{ds_2} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial\tau}, \quad \frac{\partial\log\sqrt{E}}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial t}.$$

Unsere Gleichungen erhalten somit die Gestalt:

$$\frac{\partial\frac{1}{\sqrt{E}}}{\partial\tau} = \frac{1}{\varrho_1}, \quad \frac{\partial\frac{1}{\sqrt{E}}}{\partial t} = \frac{1}{\varrho_2},$$

d. h.:

$$\frac{\partial\frac{1}{\varrho_1}}{\partial t} = \frac{\partial\frac{1}{\varrho_2}}{\partial\tau},$$

und wenn wir durch $\sqrt{E}$ dividieren:

$$\frac{d\frac{1}{\varrho_1}}{ds_1} = \frac{d\frac{1}{\varrho_2}}{ds_2}.$$

In dieser Form ist die Bedingung stets anwendbar.

Nehmen wir z. B. die Schar $\tau = \text{const.}$ als durch eine Gleichung von der Form $f(x, y) = \tau$ gegeben an, so erhält unsere Bedingung die Gestalt:

$$\frac{d^2\log w}{ds_2\,ds_1} - \frac{d}{ds_1}\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{w} = \frac{d^2\log w}{ds_1\,ds_2}.$$

Man hat nach § 24 S. 140:

$$\frac{d^2\log w}{ds_1\,ds_2} - \frac{d^2\log w}{ds_2\,ds_1} = \frac{1}{\varrho_1}\frac{d\log w}{ds_1} - \frac{1}{\varrho_2}\frac{d\log w}{ds_2}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung zeigt sich, wenn man die für $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$ gefundenen Werte einsetzt, gleich:

$$-\frac{d\log w}{ds_1}\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{w}.$$

Aber:

$$\frac{d\log w}{ds_1}\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{w} - \frac{d}{ds_1}\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{w} = -w\frac{d}{ds_1}\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{w^2},$$

so daß unsere Bedingung sich auch in der Form:

$$\frac{d}{ds_1}\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{w^2} = 0$$

schreiben läßt.

Man pflegt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\Delta_2 f,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\Delta_1 f$$

zu setzen und nach dem Vorgange Lamé's $\Delta_1 f$ den ersten, $\Delta_2 f$ den zweiten Differentialparameter zu nennen. Bei dieser Bezeichnung gewinnt unsere Bedingung die Form:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Delta_2 f}{\Delta_1 f}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta_2 f}{\Delta_1 f}=0.$$

Dies erfordert, daß entweder $\Delta_2 f$ verschwindet, oder daß $\frac{\Delta_2 f}{\Delta_1 f}$ eine Funktion von f sei, wobei der Fall, daß $\frac{\Delta_2 f}{\Delta_1 f}$ eine Konstante ist, nicht ausgeschlossen werden soll. Wenn $\frac{\Delta_2 f}{\Delta_1 f}$ eine Funktion, sagen wir $g(f)$, von f ist, so läßt sich eine Funktion $\varphi(f)$ von f finden, für die $\Delta_2\varphi$ verschwindet. Wir setzen nämlich zunächst:

$$h(f)=\int g(f)\,df$$

und sodann:

$$\varphi(f)=A\int\frac{df}{h}+B,$$

wo A und B willkürliche Konstante bedeuten.

Jetzt ergibt sich:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{A}{h}\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{A}{h}\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-\frac{A}{h}g(f)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\frac{A}{h}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-\frac{A}{h}g(f)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\frac{A}{h}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

somit:

$$\Delta_2\varphi=0.$$

Man nennt die Funktion φ den thermometrischen Parameter. Als Beispiel betrachten wir die durch Gleichungen:

$$x=t^2-\tau^2,\quad y=2t\tau$$

festgelegte Parabelschar $\tau=\text{const.}$ Die Elimination von t liefert:

$$\tau^4+\tau^2 x=\frac{y^2}{4},$$

d. h.

$$-x+\sqrt{x^2+y^2}=2\tau^2.$$

Hier ergibt sich:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3},$$

somit:

$$\varDelta_1 f = 2\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \quad \varDelta_2 f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\varDelta_2 f}{\varDelta_1 f} = \frac{1}{2(-x+\sqrt{x^2+y^2})} = \frac{1}{2f}.$$

Um den thermometrischen Parameter zu bestimmen, bedenken wir, daß gegenwärtig:

$$g(f) = \frac{1}{2f}.$$

Dadurch wird:

$$\int g(f)\,df = c\sqrt{f},$$

und:

$$\varphi = A\int\frac{df}{\sqrt{f}} + B = 2A\sqrt{f} + B.$$

Mit Hilfe der Bedingung:

$$\frac{d\frac{1}{\varrho_1}}{ds_1} = \frac{d\frac{1}{\varrho_2}}{ds_2}$$

kann man leicht zeigen, daß jede Schar von Isogonalkurven einer isothermen Schar ebenfalls isotherm ist.

Wir nennen wie im § 24 S. 143 den konstanten Schnittwinkel, unter dem die gegebenen Isogonalkurven die isothermen Kurven schneiden, φ. Bei Anwendung der daselbst für $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{\varrho'}$ aufgestellten Ausdrücke und der für die Ableitungen nach den Bogenlängen s und s' gefundenen Definition ergibt sich:

$$\frac{d\frac{1}{\varrho}}{ds} = \cos\varphi\left\{\cos\varphi\frac{d\frac{1}{\varrho_1}}{ds_1} - \sin\varphi\frac{d\frac{1}{\varrho_2}}{ds_1}\right\} + \sin\varphi\left\{\cos\varphi\frac{d\frac{1}{\varrho_1}}{ds_2} - \sin\varphi\frac{d\frac{1}{\varrho_2}}{ds_2}\right\},$$

$$\frac{d\frac{1}{\varrho'}}{ds'} = -\sin\varphi\left\{\sin\varphi\frac{d\frac{1}{\varrho_1}}{ds_1} + \cos\varphi\frac{d\frac{1}{\varrho_2}}{ds_1}\right\} + \cos\varphi\left\{\sin\varphi\frac{d\frac{1}{\varrho_1}}{ds_2} + \cos\varphi\frac{d\frac{1}{\varrho_2}}{ds_2}\right\},$$

somit:

$$\frac{d\frac{1}{\varrho}}{ds} - \frac{d\frac{1}{\varrho'}}{ds'} = \frac{d\frac{1}{\varrho_1}}{ds_1} - \frac{d\frac{1}{\varrho_2}}{ds_2}.$$

Wenn also $\frac{d\frac{1}{\varrho_1}}{ds_1} - \frac{d\frac{1}{\varrho_2}}{ds_2}$ verschwindet, so verschwindet auch $\frac{d\frac{1}{\varrho}}{ds} - \frac{d\frac{1}{\varrho'}}{ds'}$, und die Isogonalkurven sind isotherm.

Bemerkung. Es gibt zwei Arten von winkeltreuer Abbildung. Nehmen wir nämlich eine isotherme Schar $\tau =$ const. als durch die Gleichungen:

$$x = f_1(t, \tau), \quad y = f_2(t, \tau)$$

festgelegt an, mit den Bedingungen $E = G$, $F = 0$, so können wir die Bedingung $F = 0$ durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \lambda \frac{\partial f_2}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial f_1}{\partial \tau}$$

ersetzen. Die Bedingung $E = G$ erfordert sodann, daß λ^2 gleich Eins sei. Nun ist (vgl. S. 165):

$$\sin(\beta - \alpha) = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial \tau} - \frac{\partial f_1}{\partial \tau}\frac{\partial f_2}{\partial t}}{E} \sin(b - a).$$

Wir erhalten daher für $\lambda = 1$:

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin(b - a),$$

für $\lambda = -1$:

$$\sin(\beta - \alpha) = -\sin(b - a).$$

Denken wir uns den Winkel $b - a$ durch eine positive Drehung in der t, τ-Ebene gemessen, so entspricht ihm in der x, y-Ebene im ersten Fall ein durch positive Drehung, im zweiten Fall ein durch negative Drehung zu messender Winkel von gleicher Größe. Die Kurvenscharen $t =$ const., $\tau =$ const. in der x, y-Ebene, welche dem zweiten Fall entsprechen, werden durch Spiegelung an der x-Achse aus den Kurvenscharen erhalten, die dem ersten Fall entsprechen. Im ersten Fall nennt man die Abbildung schlechthin winkeltreu oder winkeltreu mit Erhaltung der Winkel, im letzten Fall nennt man sie winkeltreu mit Umlegung der Winkel. Anstatt des Wortes winkeltreu ist auch das Wort konform in Gebrauch.

Genau genommen sind die Benennungen winkeltreu mit Erhaltung oder mit Umlegung der Winkel nur dann gerechtfertigt, wenn die x, y-Ebene der t, τ parallel ist und die positiven Drehungsrichtungen in beiden Ebenen dieselben sind.

II. Es sei eine einfach unendliche Kurvenschar durch eine Differentialgleichung erster Ordnung von der Form:

$$\psi(x, y)\,dx - dy = 0$$

festgelegt. Die Richtungskosinus der positiven, d. h. einem wachsenden x entsprechenden Halbtangenten werden hier durch die Gleichungen:

$$\frac{dx}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{1+\psi^2}}, \quad \frac{dy}{ds_1} = \frac{\psi}{\sqrt{1+\psi^2}}$$

bestimmt; denn die in Rede stehenden Halbtangenten bilden mit der positiven x-Achse Winkel, deren Kosinus positiv ausfallen.

Die Definitionsgleichung für die Ableitungen nach der Bogenlänge s_1 nimmt hier die Form an:

$$\frac{df(x,y)}{ds_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\psi}{\sqrt{1+\psi^2}}.$$

Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien der Schar ist:

$$dx + \psi dy = 0.$$

Die Richtungskosinus derjenigen ihrer Halbtangenten, welche durch positive Drehungen von der Größe $\frac{\pi}{2}$ aus den positiven Halbtangenten der vorigen Schar erhalten werden, sind:

$$\frac{dx}{ds_2} = \frac{-\psi}{\sqrt{1+\psi^2}}, \quad \frac{dy}{ds_2} = \frac{1}{\sqrt{1+\psi^2}}.$$

Die Definitionsgleichung für die Ableitungen nach der Bogenlänge s_2 besitzt somit die Gestalt:

$$\frac{df(x,y)}{ds_2} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\psi + \frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\psi^2}}.$$

Um die Krümmung der Kurven der gegebenen Schar und die ihrer Orthogonalschar zu finden, berücksichtigen wir, daß:

$$\frac{d^2x}{ds_1^2} = \frac{-\psi}{\sqrt{1+\psi^2}} \cdot \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial \psi}{\partial y}}{(\sqrt{1+\psi^2})^3},$$

$$\frac{d^2x}{ds_2^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\psi^2}} \cdot \frac{\psi\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}}{(\sqrt{1+\psi^2})^3},$$

folglich ergibt sich:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial \psi}{\partial y}}{(\sqrt{1+\psi^2})^3}, \quad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\psi\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}}{(\sqrt{1+\psi^2})^3}.$$

Die vorgelegte Schar besteht somit aus geraden Linien, wenn:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

sie besteht aus parallelen Kurven, wenn:

$$\psi\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Man kann die Ausdrücke für $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$ auf eine sehr einfache Form bringen, wenn man unter λ einen integrierenden Faktor der Differentialform:

$$\frac{dx + \psi\, dy}{\sqrt{1+\psi^2}},$$

unter μ einen solchen der Differentialform:

$$\frac{\psi\, dx - dy}{\sqrt{1+\psi^2}}$$

versteht. Die Funktionen λ und μ genügen dann den Gleichungen:

$$(1)\qquad \frac{-\psi\frac{\partial \log\lambda}{\partial x} + \frac{\partial \log\lambda}{\partial y}}{\sqrt{1+\psi^2}} = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial\psi}{\partial y}}{(\sqrt{1+\psi^2})^3},$$

$$\frac{\frac{\partial \log\mu}{\partial x} + \psi\frac{\partial \log\mu}{\partial y}}{\sqrt{1+\psi^2}} = \frac{\psi\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y}}{(\sqrt{1+\psi^2})^3}.$$

Wir erhalten daher:

$$\frac{d\log\lambda}{ds_2} = \frac{1}{\varrho_1}, \quad \frac{d\log\mu}{ds_1} = \frac{1}{\varrho_2}.$$

Wenn die gegebene Differentialgleichung eine Isothermenschar bestimmt, so entsteht die Aufgabe, die Koordinaten x und y als Funktionen von zwei solchen Parametern t uns τ darzustellen, daß $E = G$, $F = 0$ wird. Um dieselbe zu lösen, setzen wir:

$$\lambda\frac{dx + \psi dy}{\sqrt{1+\psi^2}} = dp, \quad \mu\frac{\psi dx - dy}{\sqrt{1+\psi^2}} = dq.$$

Aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{\partial p} = 1,$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q} = 1$$

ergibt sich:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{1}{\lambda\sqrt{1+\psi^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{\psi}{\lambda\sqrt{1+\psi^2}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\psi}{\mu\sqrt{1+\psi^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial q} = \frac{-1}{\mu\sqrt{1+\psi^2}}.$$

Da wir λ und μ als positive Funktionen von x und y annehmen dürfen, erhalten wir, wenn:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 = E_1, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 = G_1$$

gesetzt wird:

$$\sqrt{E_1} = \frac{1}{\lambda}, \quad \sqrt{G_1} = \frac{1}{\mu}.$$

Die Ableitungen nach den Bogenlängen s_1 und s_2 können hiernach auch durch die Gleichungen:

$$\frac{d\mathfrak{F}(x,y)}{ds_1} = \lambda \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p}, \quad \frac{d\mathfrak{F}(x,y)}{ds_2} = \mu \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q}$$

definiert werden.

Die zuletzt für $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$ gefundenen Gleichungen gehen über in die folgenden:

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial q} = \frac{1}{\mu \varrho_1}, \quad \frac{\partial \log \mu}{\partial p} = \frac{1}{\lambda \varrho_2},$$

daher hat man:

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial p \partial q} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \frac{1}{\varrho_1}}{\partial p} - \frac{1}{\mu \varrho_1} \frac{\partial \log \mu}{\partial p},$$

$$\frac{\partial^2 \log \mu}{\partial p \partial q} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \frac{1}{\varrho_2}}{\partial q} - \frac{1}{\lambda \varrho_2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial q},$$

oder:

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial p \partial q} = \frac{1}{\lambda \mu} \frac{d \frac{1}{\varrho_1}}{ds_1} - \frac{1}{\lambda \mu \varrho_1 \varrho_2},$$

$$\frac{\partial^2 \log \mu}{\partial p \partial q} = \frac{1}{\lambda \mu} \frac{d \frac{1}{\varrho_2}}{ds_2} - \frac{1}{\lambda \mu \varrho_1 \varrho_2}.$$

Wenn die gegebene Differentialgleichung eine Isothermenschar festlegt, werden die rechten Seiten der letzten beiden Gleichungen einander gleich, und es folgt:

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\lambda}{\mu}}{\partial p \partial q} = 0,$$

d. h. $\frac{\lambda}{\mu}$ ist das Produkt einer Funktion von p allein mit einer solchen von q allein. Setzen wir:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\varphi_2(q)}{\varphi_1(p)},$$

so ist:

$$\lambda \varphi_1(p) = \mu \varphi_2(q).$$

Aber $\lambda\varphi_1(p)$ ist ein integrierender Faktor der Differentialform:

$$\frac{dx+\psi dy}{\sqrt{1+\psi^2}},$$

$\mu\varphi_2(q)$ ist ein solcher der Differentialform:

$$\frac{\psi dx-dy}{\sqrt{1+\psi^2}}.$$

Wir können also sagen, daß die Bedingung für eine Isothermenschar darin besteht, daß die Differentialformen $\psi dx - dy$ und $dx+\psi dy$ einen gemeinschaftlichen integrierenden Faktor besitzen. Nehmen wir denselben in der Form $\frac{\nu}{\sqrt{1+\psi^2}}$, so können wir die partiellen Ableitungen von ν den Gleichungen (1) entnehmen, wenn wir in ihnen λ und μ gleich ν setzen. Dadurch ergibt sich:

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial \log \nu}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial\psi}{\partial y}}{1+\psi^2}, \quad \frac{\partial \log \nu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{1+\psi^2},$$

d. h.

$$\nu = e^{\int \frac{-\frac{\partial\psi}{\partial y}dx+\frac{\partial\psi}{\partial x}dy}{1+\psi^2}}.$$

Es gibt also, abgesehen von einer multiplikativen Konstanten, nur einen den betrachteten Differentialgleichungen gemeinschaftlichen integrierenden Faktor, und dieser wird durch die Integration eines Differentials einer Funktion von zwei Veränderlichen erhalten. Man sieht auch leicht, daß die Bedingung:

$$\frac{d\frac{1}{\varrho_1}}{ds_1} = \frac{d\frac{1}{\varrho_2}}{ds_2}$$

gleichbedeutend ist mit der Forderung, daß die Differentialform:

$$\frac{-\frac{\partial\psi}{\partial y}dx+\frac{\partial\psi}{\partial x}dy}{\sqrt{1+\psi^2}}$$

ein Differential sei.

Setzen wir, unter ν den obigen Wert verstehend:

$$\nu\frac{dx+\psi dy}{\sqrt{1+\psi^2}} = dt, \quad \nu\frac{\psi dx-dy}{\sqrt{1+\psi^2}} = d\tau,$$

so kommt:

$$dx = \frac{dt+\psi d\tau}{\nu\sqrt{1+\psi^2}}, \quad dy = \frac{\psi dt - d\tau}{\nu\sqrt{1+\psi^2}},$$

und es liegt, wenn x und y durch t und τ ausgedrückt werden, eine winkeltreue Abbildung mit Umlegung der Winkel vor.

Setzen wir aber:

$$\nu \frac{dx + \psi dy}{\sqrt{1+\psi^2}} = dt, \quad \nu \frac{-\psi dx + dy}{\sqrt{1+\psi^2}} = d\tau,$$

so liegt, wenn x und y durch t und τ ausgedrückt werden, eine winkeltreue Abbildung mit Erhaltung der Winkel vor.

Sowohl t wie τ ist ein thermometrischer Parameter, da:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{d y^2} = 0.$$

§ 27. Zur Theorie der infinitesimalen Transformationen.

Will man eine durch eine Gleichung von der Form:

$$(1) \qquad y = f(x, \tau)$$

gegebene Kurvenschar $\tau =$ const. durch eine Differentialgleichung darstellen, so bildet man den Ausdruck:

$$\frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x}$$

und setzt in ihn den der Gleichung (1) entnommenen Ausdruck von τ als Funktion von x und y ein. So entsteht eine Beziehung von der Form:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \psi(x, y).$$

Gewöhnlich schreibt man hier $\frac{dy}{dx}$ statt $\frac{\partial y}{\partial x}$. Wollte man aber die Benutzung von „∂“ zum Zeichen einer partiellen Differentiation folgerichtig durchführen, so müßte $\frac{\partial y}{\partial x}$ geschrieben werden. Doch wollen wir in einer rein formalen Sache nicht gegen den Strom schwimmen und die gewöhnlichen Bezeichnungen beibehalten. Wir nennen τ wie früher einen Parameter; die gebräuchliche Bezeichnung willkürliche Konstante ist ungenau, da τ nichts weniger als konstant ist, sondern sich von Kurve zu Kurve ändert.

Stellen wir aber eine Schar $\tau =$ const. durch zwei Gleichungen von der Form:

$$(2) \qquad x = f_1(\vartheta, \tau), \quad y = f_2(\vartheta, \tau)$$

dar, deren Lösungen nach ϑ und τ durch:

$$\vartheta = \varphi_1(x, y), \quad \tau = \varphi_2(x, y)$$

dargestellt seien, so werden der Schar $\tau =$ const. zwei Differentialgleichungen, nämlich:

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \vartheta}\right)_{\substack{\vartheta = \varphi_1 \\ \tau = \varphi_2}} = \xi(x, y),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial \vartheta}\right)_{\substack{\vartheta = \varphi_1 \\ \tau = \varphi_2}} = \eta(x, y)$$

zugeordnet, wobei die oben benutzte Funktion ψ hier durch $\frac{\eta}{\xi}$ vertreten wird, so daß $\eta\, dx - \xi\, dy = 0$ die Differentialgleichung der Schar $\tau = \text{const.}$ darstellt.

Im allgemeinen ändern sich die zugeordneten Differentialgleichungen, wenn wir die Hilfsschar $\vartheta = \text{const.}$ durch eine andere ersetzen. Um diese Änderung zu bestimmen, nehmen wir:

$$\vartheta = g(t, \tau),$$

wodurch:

$$x = f_1\big(g(t, \tau), \tau\big), \quad y = f_2\big(g(t, \tau), \tau\big)$$

wird. Aus der Gleichung:

$$\varphi_1(x, y) = g\big(t, \varphi_2(x, y)\big)$$

ergibt sich die Zahl t als eine Funktion $\varphi_3(x, y)$ von x und y. Jetzt erhalten wir:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \xi\left(\frac{\partial g(t, \tau)}{\partial t}\right)_{\substack{t = \varphi_3 \\ \tau = \varphi_2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \eta\left(\frac{\partial g(t, \tau)}{\partial t}\right)_{\substack{t = \varphi_3 \\ \tau = \varphi_2}}.$$

Damit wir dieselben zugeordneten Differentialgleichungen wie vorhin erhalten, muß:

$$\frac{\partial g(t, \tau)}{\partial t} = 1$$

sein, d. h.

$$g(t, \tau) = t + \varphi(\tau),$$

wo $\varphi(\tau)$ eine willkürlich zu wählende Funktion von τ bedeutet. In der (ϑ, τ)-Ebene werden die Kurven $t = \text{const.}$ durch Schiebung der einzelnen Kurve mit der Gleichung $\vartheta = \varphi(\tau)$ längs der ϑ-Achse erhalten; somit sind auch die Kurven $t = \text{const.}$ in der x, y-Ebene durch eine einzelne Kurve bestimmt, die willkürlich gewählt werden kann, aber nicht mit einer Kurve $\tau = \text{const.}$ zusammenfallen darf. S. Lie faßt ∂t als eine unendlich kleine Größe auf, wonach $\xi \partial t$ und $\eta \partial t$ die unendlich kleinen Zuwüchse von x und y darstellen, wenn der Punkt (x, y) auf der durch ihn hindurchgehenden Kurve $\tau = \text{const.}$ um die Strecke $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\, \partial t$ verschoben wird. Alle Punkte einer Kurve $t = \text{const.}$ gehen durch eine solche Verschiebung in die Punkte der der Kurve $t = \text{const.}$ unendlich benachbarten Kurve $t + \partial t = \text{const.}$ über. Eine derartige Verschiebung nennt Lie eine **infinitesimale Transformation**, und er faßt zwei Gleichungen wie die vorigen:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \xi(x, y), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \eta(x, y)$$

als eine infinitesimale Transformation definierend auf. (Vgl. S. Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Bearb. von G. Scheffers. Leipzig 1891.)

Jedoch solche mit unendlich kleinen, also unvorstellbaren, Größen zu vollziehende Konstruktionen sind nur als Notbehelf zu betrachten.

Vorzuziehen ist die ebenfalls von Lie herrührende mechanische Deutung, bei der t als das Maß der Zeit betrachtet wird. ξ und η sind dann Geschwindigkeitskomponenten, und dadurch, daß ξ und η als Funktionen von x und y bekannt sind, ist jedem Punkt (x, y) eine nach Größe und Richtung bestimmte Geschwindigkeit zugeordnet. Wenn wir nun eine nicht zur Schar $\tau =$ const. gehörende, sonst aber beliebig gewählte, Kurve (c) als den Ort von Punkten zur Zeit t auffassen, und sich die Punkte mit der vorgeschriebenen Geschwindigkeit weiterbewegen, so stellen sie in jedem Augenblick eine Kurve der zu der Kurve (c) gehörenden Schar $t =$ const. dar.

Umgekehrt kann man fragen, unter welchen Umständen eine vorgelegte Differentialgleichung:

$$\psi(x, y)\,dx - dy = 0$$

die Kurven einer mit den gegebenen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \xi(x, y), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \eta(x, y)$$

verträglichen Schar $t =$ const. als Integralkurven besitzt. Dies wird der Fall sein, wenn längs jeder Integralkurve nur τ, nicht t sich ändert, d. h. wenn:

$$\psi \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial y}{\partial \tau} = 0$$

ist. Die Gleichungen:

$$\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 1,$$

$$\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} = 0$$

nehmen jetzt die Gestalt an:

$$\frac{\partial t}{\partial x}\xi + \frac{\partial t}{\partial y}\eta = 1,$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y}\psi = 0,$$

so daß:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\psi}{\xi\psi - \eta}, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{-1}{\xi\psi - \eta}.$$

Die Differentialform:

$$\frac{\psi dx - dy}{\xi\psi - \eta}$$

muß somit ein Differential sein, oder auch, die Differentialform $\psi dx - dy$ muß den integrierenden Faktor $\frac{1}{\xi\psi - \eta}$ besitzen. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend; denn wir können, wenn sie erfüllt ist:

$$\psi dx - dy = (\xi\psi - \eta)dt,$$

$$\eta dx - \xi dy = \frac{d\tau}{\lambda}$$

setzen, wo wir unter λ einen integrierenden Faktor der Differentialform $\eta dx - \xi dy$ verstehen. Dann folgt:

$$dx = \frac{-\frac{d\tau}{\lambda} + \xi(\xi\psi - \eta)dt}{\xi\psi - \eta}, \quad dy = \frac{-\frac{\psi}{\lambda}d\tau + \eta(\xi\psi - \eta)dt}{\xi\psi - \eta},$$

so daß:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \xi, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \eta$$

$$\psi\frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial y}{\partial \tau} = 0,$$

was zu beweisen war.

Zum Beispiel bilden parallele Kurven offenbar eine Schar $t = \text{const.}$, wenn unter t die Bogenlänge ihrer orthogonalen Trajektorien verstanden wird. Hier erhält man:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{dx}{ds_2} = \frac{-\psi}{\sqrt{1+\psi^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dy}{ds_2} = \frac{1}{\sqrt{1+\psi^2}}.$$

Die durch die Gleichung:

$$\psi dx - dy = 0$$

gegebene Schar besteht somit aus parallelen Kurven, wenn die Differentialform:

$$\frac{\psi dx - dy}{\sqrt{1+\psi^2}}$$

ein Differential ist. Dies ergibt die § 26 S. 171 gefundene Bedingung:

$$\psi\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Die Forderung, daß der Ausdruck:

$$\frac{\psi dx - dy}{\xi\psi - \eta}$$

ein Differential sei, nimmt ausgerechnet die Gestalt an:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\psi - \frac{\partial \xi}{\partial y}\psi^2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}\xi + \frac{\partial \psi}{\partial y}\eta.$$

Man kann nun einen Schritt weitergehen und statt einer einzelnen Kurve eine einfach unendliche Schar von Kurven von vornherein annehmen, sodann zu jeder von ihnen die zugehörige Schar $t = \text{const.}$ konstruieren. Auf diese Weise erhält man eine doppelt unendliche Schar von Kurven mit der Eigenschaft, daß die zu jeder Einzelkurve der Schar gehörenden Kurven $t = \text{const.}$ wieder der Schar angehören.

Hier entsteht die Frage, unter welchen Umständen eine durch eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmte doppelt unendliche Kurvenschar die geschilderte Eigenschaft besitzt, oder, um mit Lie zu reden, die infinitesimale Transformation:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \xi(x, y), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \eta(x, y)$$

gestattet.

Zur Beantwortung dieser Frage haben wir die zu einer gegebenen Kurve gehörende Schar $t = \text{const.}$ analytisch darzustellen.

Aus den vorigen Gleichungen ergibt sich die Gleichung der Schar $\tau = \text{const.}$ in der Form:

$$\xi dy - \eta dx = 0,$$

und wir setzen wie oben:

$$\lambda(\xi dy - \eta dx) = d\tau.$$

Es sei nun $P_0(x_0, y_0)$ ein Punkt innerhalb des Bereichs, in dem die Funktion τ von x und y endlich, eindeutig und stetig ist. Wir können den Punkt P_0 als den zu $t = 0$ gehörenden Punkt der durch ihn hindurchgehenden Kurve $\tau = \text{const.}$ auffassen und erhalten für die Koordinaten der Punkte dieser Kurve in hinreichender Nähe des Punktes P_0 die Gleichungen:

$$x = x_0 + \xi(x_0, y_0)t + \left(\xi\frac{\partial \xi}{\partial x} + \eta\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} \frac{t^2}{2} + \cdots,$$

$$y = y_0 + \eta(x_0, y_0)t + \left(\xi\frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} \frac{t^2}{2} + \cdots$$

Betrachten wir hierin y_0 als eine Funktion von x_0 und nehmen $y_0 = f(x_0)$, so stellen diese Gleichungen für ein konstantes x_0 eine Kurve $\tau = \text{const.}$, für ein konstantes t bei veränderlichem x_0 eine Kurve $t = \text{const.}$ dar. Eliminieren wir x_0, so entstehe:

$$y = F(x, t)$$

als Gleichung derjenigen Schar $t = \text{const.}$, die zu der durch die Gleichung $y_0 = f(x_0)$ festgelegten Kurve gehört. Die letzte Beziehung ergebe:

$$t = h(x, y),$$

und, wenn dieser Ausdruck an Stelle von t in die Gleichung:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}$$

eingesetzt wird, entstehe:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' = g(x, y).$$

Wir fassen nun zwei Werte t und $t + \varDelta t$ ins Auge, die beide dem Konvergenzbereich obiger Reihen angehören sollen. Dadurch, daß t um $\varDelta t$ wächst, gehe der Punkt $P(x, y)$ auf der durch ihn hindurchgehenden Kurve $\tau = \text{const.}$ in den Punkt $P_1(x_1, y_1)$ über. Wir haben dann einerseits:

$$x_1 = x + \xi(x, y)\varDelta t \ldots, \quad y_1 = y + \eta(x, y)\varDelta t + \cdots,$$

aber anderseits:

$$y_1 = F(x_1, t + \varDelta t) = y + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial t}\right)\varDelta t + \cdots,$$

somit:

$$\eta = \frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Ersetzen wir hier auf der rechten Seite t durch $h(x, y)$, so geht $\frac{\partial F}{\partial x}$ in g über, und es folgt:

$$\eta = g\xi + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{t=h}.$$

Da aber:

$$dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt,$$

so ergibt sich:

$$dh(x, y) = \frac{dy - g\,dx}{\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{t=h}} = \frac{dy - g\,dx}{\eta - g\xi},$$

d. h., wie oben gefunden, daß $\frac{1}{\eta - g\xi}$ ein integrierender Faktor der Differentialgleichung $dy - g\,dx = 0$ ist.

Wir denken uns nun eine einfach unendliche Kurvenschar durch eine Gleichung von der Form:

$$y_0 = f(x_0, \mu)$$

gegeben. Die Entwicklungen:

$$x = x_0 + \xi(x_0, f)t + \cdots, \quad y = y_0 + \eta(x_0, f)t + \cdots$$

stellen jetzt, wenn man x_0 und μ als fest betrachtet, wiederum eine Kurve $\tau = \text{const.}$ dar. Sieht man aber t als fest an, so stellen sie eine einfach unendliche Schar $t = \text{const.}$ dar. Die Elimination von x_0 ergebe:

$$y = F(x, \mu, t),$$

und hieraus folge:

$$t = h(x, y, \mu).$$

Diesen Ausdruck von t setzen wir in die linke Seite der Gleichung:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' = \frac{\partial F(x, \mu, t)}{\partial x}$$

ein. Dadurch entstehe:

$$y' = \psi_0(x, y, \mu),$$

und die Auflösung dieser Gleichung nach μ ergebe:

$$\mu = l(x, y, y').$$

Differenzieren wir die Gleichung $y' = \psi_0$ nach x, so folgt:

$$y'' = \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} y'.$$

Ersetzen wir hierin μ durch $l(x, y, y')$, so möge die Beziehung:

$$y'' = \psi(x, y, y')$$

erhalten werden, wo also:

$$\psi(x, y, y') = \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\right)_{\mu = l} + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right)_{\mu = l} y'.$$

Nun werde dem Parameter μ ein bestimmter Wert beigelegt. Der Umstand, daß die zu der entsprechenden Kurve $\mu = \text{const.}$ gehörenden Kurven $t = \text{const.}$ mit den gegebenen Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \xi, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \eta$$

verträglich sein sollen, verlangt nach dem früheren, daß:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \psi_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - \psi_0^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \xi + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \eta$$

sei. Dies soll aber für jeden erlaubten Wert von μ der Fall sein. Ersetzen wir μ durch $l(x, y, y')$, so geht ψ_0 in y' über, und wenn:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + y' \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - y'^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} = \eta'$$

gesetzt wird, erhalten wir:

$$\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\right)_{\mu = l} \xi + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right)_{\mu = l} \eta = \eta'.$$

Anderseits fanden wir:

$$\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\right)_{\mu = l} + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right)_{\mu = l} y' = \psi(x, y, y'),$$

daher:

$$\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\right)_{\mu = l} = \frac{\eta' y' - \eta \psi}{\xi y' - \eta}, \quad \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right)_{\mu = l} = \frac{-\eta' + \xi \psi}{\xi y' - \eta}.$$

Die Gleichung:

$$y' = \psi_0(x, y, \mu)$$

liefert:

$$dy' = \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\right)_{\mu = l} dx + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right)_{\mu = l} dy + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \mu}\right)_{\mu = l} dl,$$

oder:

$$dl(x, y, y') = \frac{1}{\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \mu}\right)_{\mu = l}} \left\{ dy' - \frac{\eta' y' - \eta\psi}{\xi y' - \eta}\, dx + \frac{\eta' - \xi\psi}{\xi y' - \eta}\, dy \right\}.$$

Damit also die Integralkurven der Gleichung:

$$y'' = \psi(x, y, y')$$

aus Kurven $t = \text{const.}$ bestehen, muß die in den drei Veränderlichen x, y, y' gebildete Differentialform:

$$(\eta\psi - \eta' y')\, dx + (\eta' - \xi\psi)\, dy + (\xi y' - \eta)\, dy'$$

die Eigenschaft haben, durch Multiplikation mit einer geeigneten Funktion von x, y, y' in das Differential einer Funktion von x, y, y' überzugehen. Die hierzu nötige Bedingung besteht, wenn wir abkürzend die Differentialform in der Gestalt:

$$a_1 dx + a_2 dy + a_3 dy'$$

schreiben, in dem identischen Verschwinden des Ausdrucks:

$$a_1 \left(\frac{\partial a_2}{\partial y'} - \frac{\partial a_3}{\partial y}\right) + a_2 \left(\frac{\partial a_3}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y'}\right) + a_3 \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x}\right).$$

Berücksichtigt man, daß:

$$\eta \left(\frac{\partial a_2}{\partial y'} - \frac{\partial a_3}{\partial y}\right) - \xi \left(\frac{\partial a_3}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y'}\right) = (\xi y' - \eta) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + 3 y' \frac{\partial \xi}{\partial y} - 2 \frac{\partial \eta}{\partial y}\right),$$

$$- y' \left(\frac{\partial a_2}{\partial y'} - \frac{\partial a_3}{\partial y}\right) + \frac{\partial a_3}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y'} = (\xi \eta' - \eta) \frac{\partial \psi}{\partial y'},$$

so gewinnt unsere Bedingung die Form:

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} - 3 y' \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \psi - \xi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \eta \frac{\partial \psi}{\partial y} - \eta' \frac{\partial \psi}{\partial y'} + \frac{\partial \eta'}{\partial x} + y' \frac{\partial \eta'}{\partial y} = 0.$$

Sie stimmt überein mit der in dem oben angeführten Werk von Lie-Scheffers S. 363 befindlichen Bedingung.

ZWEITER TEIL.

KURVEN IM RAUM.

I. Die Umgebung eines gewöhnlichen Punktes.

§ 1. Die Tangente.

Beziehen wir die Punkte einer Kurve auf ein räumliches rechtwinkliges Koordinatensystem, so werden jetzt die drei Koordinaten der Kurvenpunkte von einer Veränderlichen abhängen. Wir können daher zur Bestimmung einer Kurve im Raum drei Gleichungen von der Form:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

benutzen. Die Funktionen $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ sollen innerhalb eines Wertbereichs der Veränderlichen t eindeutig, stetig und für die Umgebung $(t + \Delta t)$ eines erlaubten Wertes von t nach ganzen positiven Potenzen von Δt entwickelbar sein.

Die positiven Teile der Koordinatenachsen denken wir uns so gelegen, daß ein auf dem Koordinatenanfangspunkt in der positiven z-Achse stehender und in die Richtung der positiven x-Achse blickender Beobachter die positive y-Achse zur Linken hat.

Unter einem gewöhnlichen Punkt der Abbildung der Raumkurve auf die t-Gerade oder kürzer unter einem gewöhnlichen Punkt verstehen wir einen Kurvenpunkt, der zu einem solchen Wert von t gehört, für den weder die ersten Ableitungen:

$$f_1'(t), \quad f_2'(t), \quad f_3'(t)$$

noch die drei Determinanten:

$$f_2'(t) f_3''(t) - f_3'(t) f_2''(t), \quad f_3'(t) f_1''(t) - f_1'(t) f_3''(t), \quad f_1'(t) f_2''(t) - f_2'(t) f_1''(t)$$

zugleich verschwinden, und für den die Determinante:

$$\begin{vmatrix} f_1'(t) & f_2'(t) & f_3'(t) \\ f_1''(t) & f_2''(t) & f_3''(t) \\ f_1'''(t) & f_2'''(t) & f_3'''(t) \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Die Bedeutung dieser Voraussetzungen wird im folgenden erhellen. Wir behandeln im Abschnitt I die wichtigeren Fragen hinsichtlich eines Kurvenstücks, in dem nur gewöhnliche Punkte vorkommen.

Ziehen wir von dem Punkt (t) aus durch den Punkt mit den Koordinaten:

$$x + \varDelta x = f_1(t + \varDelta t), \quad y + \varDelta y = f_2(t + \varDelta t), \quad z + \varDelta z = f_3(t + \varDelta t)$$

eine Halbgerade, so werden die Kosinus der Winkel α', β', γ', die sie mit den positiven Teilen der x, y, z-Achse bildet, durch die Gleichungen bestimmt:

$$\cos\alpha' = \frac{\varDelta x}{\sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2}}, \quad \cos\beta' = \frac{\varDelta y}{\sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2}},$$
$$\cos\gamma' = \frac{\varDelta z}{\sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2}},$$

wo die Quadratwurzel, wie stets im folgenden, eine positive Zahl vorstellen soll. Da die drei Ableitungen $f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)$ nicht zugleich verschwinden, erhält man:

$$\cos\alpha' = \frac{\varepsilon f_1'(t)}{\sqrt{\Sigma f_1'(t)^2}} + m_1 \varDelta t, \quad \cos\beta' = \frac{\varepsilon f_2'(t)}{\sqrt{\Sigma f_1'(t)^2}} + m_2 \varDelta t,$$
$$\cos\gamma' = \frac{\varepsilon f_3'(t)}{\sqrt{\Sigma f_1'(t)^2}} + m_3 \varDelta t.$$

Hier ist unter ε die positive oder negative Einheit verstanden, je nachdem $\varDelta t$ positiv oder negativ ist. Beim Übergang zu $\varDelta t = 0$ erhalten wir zwei in derselben Geraden (Tangente) liegende Halbgeraden (Halbtangenten). Unter der positiven Halbtangente soll diejenige verstanden werden, die sich ergibt, wenn man mit einem positiven $\varDelta t$ zur Null übergeht. Sie entspricht einem wachsenden t und dem Wert $\varepsilon = +1$.

Bezeichnen wir mit α, β, γ die Kosinus der Winkel, welche die positive Halbtangente mit den positiven Teilen der Koordinatenachsen bildet, so folgt:

$$\alpha = \frac{f_1'(t)}{\sqrt{\Sigma f_1'(t)^2}}, \quad \beta = \frac{f_2'(t)}{\sqrt{\Sigma f_1'(t)^2}}, \quad \gamma = \frac{f_3'(t)}{\sqrt{\Sigma f_1'(t)^2}}.$$

Die drei Ableitungen $f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)$ können nicht für alle Werte von t verschwinden, wenn die grundlegenden Gleichungen eine Kurve und nicht einen Punkt darstellen. Aber auch ein und dieselbe dieser Ableitungen kann nicht beständig gleich Null sein, ohne daß die Kurve in einer zu einer Koordinatenebene parallelen Ebene gelegen wäre. Dann hätten wir es mit einer ebenen Kurve zu tun und könnten nach der früheren Methode die Untersuchung ausführen.

Die Bogenlänge s der Kurve rechnen wir von einem beliebig angenommenen Kurvenpunkt $(t = t_0)$ an und wollen sie als mit wachsendem t wachsend ansehen. Dann haben wir:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2 + f_3'(t)^2} = w,$$
$$s = \int_{t_0}^{t} w\,dt.$$

Betrachten wir die Koordinaten x, y, z als Funktionen von s, so wenden wir die Bezeichnungen an:

$$x = g_1(s), \quad y = g_2(s), \quad z = g_3(s),$$

so daß:

$$\frac{dx}{ds} = g_1'(s) = \frac{1}{w}\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = g_1''(s) = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\sum\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{w^3}, \quad \text{usf.}$$

Die Voraussetzung, daß w von Null verschieden ist, bedingt, daß keine Ableitung einer Koordinate nach s unendlich groß werden kann.

Da es für das Verständnis der Differentialgeometrie von der höchsten Wichtigkeit ist, daß man nicht in den Formeln stecken bleibe, sondern sich die durch die Formeln bestimmten geometrischen Verhältnisse klar mache, will ich das über Tangente und Bogenlänge Gesagte an zwei einfachen Beispielen erläutern.

1. Die gewöhnliche Schraubenlinie. Wir denken uns eine feste Gerade (L), und in ihr einen beweglichen Punkt (A). Von diesem Punkte aus ziehen wir senkrecht zu (L) eine Halbgerade und nehmen in ihr einen festen Punkt (B) an. Wenn sich nun die Halbgerade so bewegt, daß sie stets zur Geraden (L) senkrecht bleibt, während das vom Punkte (A) beschriebene Stück stets proportional dem Drehungswinkel, d. h. dem Winkel zwischen der Halbgeraden und ihrer Anfangslage, bleibt, so sagt man, die Halbgerade führe um die Achse (L) eine Schraubenbewegung aus. Der Punkt B, ebenso jeder andere Punkt der Halbgeraden, beschreibt dabei eine gewöhnliche Schraubenlinie. Das konstante Verhältnis der Steighöhe zum Drehungswinkel wird der Parameter der Schraubung genannt. Denken wir uns einen Beobachter so in der Achse stehend, daß die Bewegung des Punktes A in der Richtung von seinen Füßen nach seinem Kopf hin erfolgt, so sind, wenn der Beobachter immer geradeaus nach dem Punkte B hinsieht, zwei Fälle möglich. Im ersten Fall muß der Beobachter, um der Bewegung des Punktes B zu folgen, eine Linksum-Wendung ausführen, im zweiten Falle eine Rechtsum-Wendung. Von dieser Betrachtung aus ist es gerechtfertigt, wenn man im ersten Fall die Schraubenlinie linksgewunden, im zweiten rechtsgewunden nennt. Die Schraubenlinie liegt auf einem Kreiszylinder. Denken wir uns einen Beobachter parallel dem vorigen außerhalb des Kreiszylinders stehen und geradeaus einen Punkt der Schraubenlinie anblicken, so erscheint sie im ersten Fall sich nach rechts hin an dem Zylinder hinauf-, nach links hin sich an ihm herunterwindend, im zweiten Fall nach links hin sich am Zylinder hinauf-, nach rechts hin sich an ihm hinunterwindend. Diese Betrachtung rechtfertigt die

Bezeichnung rechtsgewundene Schraubenlinie im ersten Fall, linksgewundene im zweiten. Wir wollen diese Sprachweise im folgenden beibehalten.

Die einfachste analytische Darstellung einer gewöhnlichen Schraubenlinie ist die folgende: Man nehme die Achse der Schraubenbewegung zur z-Achse, die Anfangslage des Punktes A zum Koordinatenanfangspunkt und lege die positive x-Achse durch die Anfangslage des Punktes B hindurch. Ist die Maßzahl der Strecke AB gleich p, und wird der Parameter der Schraubenbewegung mit q bezeichnet, der Drehungswinkel mit t, so ergeben sich die Gleichungen der Schraubenlinie in der Form:

$$x = p\cos t, \quad y = p\sin t, \quad z = qt.$$

Hier ist p positiv; q positiv oder negativ, je nachdem die Schraubenlinie rechts- oder linksgewunden ist. Man kann sich die Sachlage sehr einfach klar machen, wenn man sich parallel der positiven z-Achse, etwa im Punkte $x = 2p$, $y = 0$, $z = 0$ auf die x, y-Ebene stellt und nach dem Punkt $x = p$, $y = 0$, $z = 0$ hinsieht. Der einem von Null an wachsenden t entsprechende Teil der Schraubenlinie steigt dann bei positivem q nach rechts hin am Zylinder hinauf, bei negativem q steigt er hinunter.

Die Richtungskosinus der positiven Halbtangente im Punkte (t) sind:

$$\alpha = \frac{-p\sin t}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \beta = \frac{p\cos t}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \gamma = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Demnach ist der Winkel, den die positive Halbtangente mit der positiven z-Achse bildet, konstant; er fällt kleiner oder größer wie ein Rechter aus, je nachdem die Schraubenlinie rechts oder links gewunden ist.

Rechnen wir die Bogenlänge vom Punkte $t = 0$ an, so wird:

$$s = \sqrt{p^2 + q^2}\,t,$$

d. h. die Bogenlänge ist proportional dem Drehungswinkel.

Die allgemeinste analytische Darstellung der gewöhnlichen Schraubenlinie ist die folgende. Die Richtungskosinus der von A durch B gehenden Halbgeraden in der Anfangslage seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, die Richtungskosinus der Achse $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, die Richtungskosinus einer zu beiden Geraden senkrechten Halbgeraden $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. Wir betrachten diese Richtungskosinus als solche von drei zueinander senkrechten Halbgeraden, die den positiven Teilen der Koordinatenachsen homolog liegen, so daß:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Die Gleichungen der Schraubenlinie werden jetzt, wenn noch die Koordinaten der Anfangslage des Punktes A mit x_0, y_0, z_0 bezeichnet werden:

$$x = x_0 + \alpha_1 p \cos t + \alpha_2 p \sin t + \alpha_3 q t,$$
$$y = y_0 + \beta_1 p \cos t + \beta_2 p \sin t + \beta_3 q t,$$
$$z = z_0 + \gamma_1 p \cos t + \gamma_2 p \sin t + \gamma_3 q t.$$

Man hat häufig eine Schraubenlinie zu betrachten, die entsteht, wenn ein gegebener Punkt mit den Koordinaten $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ eine Schraubenbewegung um die z-Achse ausführt. Da ergibt sich:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = z_1; \quad p = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$
$$\alpha_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, \quad \beta_1 = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, \quad \gamma_1 = 0,$$
$$\alpha_2 = \frac{-y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, \quad \beta_2 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, \quad \gamma_2 = 0,$$
$$\alpha_3 = 0, \quad \beta_3 = 0, \quad \gamma_3 = 1,$$

so daß für die Schraubenlinie die Gleichungen bestehen:

$$x = x_1 \cos t - y_1 \sin t,$$
$$y = y_1 \cos t + x_1 \sin t,$$
$$z = z_1 + q t.$$

2. Die konische Spirale. (Vgl. Analytische Geometrie des Raumes von G. Salmon. Deutsch bearbeitet von W. Fiedler. II. Teil. Dritte Auflage. Leipzig 1880. S. 174.)

Gegeben sei ein Kreiskegel mit der Gleichung:

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{h^2} = 0.$$

Wir lösen diese Gleichung auf, indem wir setzen:

$$x = \tau \cos \varphi, \quad y = \tau \sin \varphi, \quad z = \tau h.$$

Wenn wir hier τ und φ als Funktionen einer neuen Veränderlichen ansehen, erhalten wir die Gleichungen einer auf dem Kegel gelegenen Kurve. Es sollen τ und φ so als Funktionen der Bogenlänge s der Kurve bestimmt werden, daß die Kurve die Erzeugenden des Kegels unter konstantem Winkel schneidet.

Die Richtungskosinus der durch den Punkt (x, y, z) gehenden Erzeugenden des Kegels sind:

$$\frac{x}{\sqrt{\Sigma x^2}} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + h^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{\Sigma x^2}} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + h^2}}, \quad \frac{z}{\sqrt{\Sigma x^2}} = \frac{h}{\sqrt{1 + h^2}};$$

dabei ist h wie τ als positive Zahl gedacht; nur der obere Teil des Kegels ($z > 0$) soll betrachtet werden.

Bezeichnen wir den Kosinus des konstanten Schnittwinkels mit k, so erhalten wir als erste Bedingung:

$$\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\left\{\cos\varphi\frac{d\tau\cos\varphi}{ds}+\sin\varphi\frac{d\tau\sin\varphi}{ds}+h^2\frac{d\tau}{ds}\right\}=k,$$

oder:

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{k}{\sqrt{1+h^2}}.$$

Die Zahl k soll als positiv angesehen werden, so daß die Spirale rechts gewunden ist, und τ mit s wächst.

Schreibt man k_1 statt $\frac{k}{\sqrt{1+h^2}}$ und versteht unter λ eine Integrationskonstante, so wird:

$$\tau=k_1 s+\lambda.$$

Jetzt haben wir noch auszudrücken, daß s die Bogenlänge der Kurve bedeutet, also $\sum\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=1$ ist. Dies liefert die Beziehung:

$$\left\{\frac{d\tau}{ds}\cos\varphi-\tau\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}\right\}^2+\left\{\frac{d\tau}{ds}\sin\varphi+\tau\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}\right\}^2+h^2\left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2=1,$$

oder:

$$k_1^2+\tau^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+k_1^2h^2=1.$$

Setzen wir fest, daß s mit φ wachsen soll, so folgt:

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\sqrt{1-k^2}}{k_1 s+\lambda},$$

d. h.

$$\varphi=\frac{\sqrt{1-k^2}}{k_1}\log(k_1 s+\lambda)+\varphi_0,$$

wo φ_0 eine Integrationskonstante bedeutet.

Der Ausdruck für φ zeigt, daß wir wieder eine zu k gehörende konische Spirale erhalten, wenn wir φ um eine beliebige Konstante vermehren, d. h. geometrisch, wenn wir die Kurve um die Achse des Kegels drehen. Er zeigt ferner, daß wir für $s=0$ nur dann einen endlichen Wert von φ erhalten, wenn λ von Null verschieden ist. Diesen Nullpunkt wählen wir in dem Kreise, in welchem der Kegel von der Ebene mit der Gleichung $z=h$ geschnitten wird. Dann ergibt sich, da für die Punkte dieses Kreises τ gleich 1 ist, für λ der Wert Eins. Nehmen wir endlich φ_0 gleich Null, so ist φ für $s=0$ gleich Null, d. h. die betrachtete Spirale geht durch den Punkt mit den Koordinaten $x=1$, $y=0$, $z=h$.

Danach ergeben sich die Gleichungen unserer Kurve in der Form:

$$x = (k_1 s + 1) \cos\left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{k_1} \log(k_1 s + 1)\right),$$

$$y = (k_1 s + 1) \sin\left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{k_1} \log(k_1 s + 1)\right), \quad z = h(k_1 s + 1).$$

Für die senkrechte Projektion unserer Kurve auf die xy-Ebene findet man:

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{k_1} \log \sqrt{x^2 + y^2},$$

und das ist die Gleichung einer logarithmischen Spirale.

Durchlaufen wir die konische Spirale vom Punkte $s = 0$ an in der Richtung des wachsenden s, wobei z wächst, so kommen wir nach jedem ganzen Umlauf um den Kegel zu der zu $s = 0$ gehörenden Erzeugenden zurück. Die nach ν Umläufen durchwanderte Bogenlänge ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{\sqrt{1-k^2}}{k_1} \log(k_1 s + 1) = 2\nu\pi.$$

Durchlaufen wir aber unsere Kurve vom Punkte $s = 0$ an in der Richtung des abnehmenden s, so bleibt s kleiner wie Null, und zu ν Umläufen gebraucht man eine durch den absoluten Wert der negativen Zahl s zu berechnende Bogenlänge, die durch die Gleichung:

$$\frac{\sqrt{1-k^2}}{k_1} \log(k_1 s + 1) = -2\nu\pi$$

bestimmt wird. Der kleinste Wert, den s annehmen kann, ist, weil τ als positiv angenommen wurde, gleich $-\frac{1}{k_1}$. Für ihn wird ν unendlich. Da ihm aber geometrisch die Spitze des Kegels entspricht, so wird die endliche Bogenlänge $\frac{1}{k_1}$ zu unendlich vielen Umläufen vom Punkte $s = 0$ an bis zur Spitze des Kegels verbraucht. Diese Spitze ist für unsere Kurve ein singulärer Punkt; für seine Umgebung ist eine Entwicklung von Δx und Δy nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von Δs unmöglich.

Unter der Voraussetzung, daß $s > \frac{-1}{k_1}$ sei, ergibt sich:

$$\alpha = k_1 \cos\varphi - \sqrt{1-k^2} \sin\varphi,$$

$$\beta = k_1 \sin\varphi + \sqrt{1-k^2} \cos\varphi,$$

$$\gamma = k_1 h.$$

Die positiven Halbtangenten der konischen Spirale bilden hiernach mit der positiven z-Achse einen konstanten Winkel.

§ 2. Die Schmiegungsebene.

So wie man einem Punkte einer Raumkurve eine bestimmte Gerade, die Tangente, zuordnen kann, kann man ihm auch eine bestimmte Ebene, die Schmiegungsebene, zuordnen. Um dies genau durchführen zu können, ist eine Vorbetrachtung notwendig über die Bestimmung einer Ebene durch zwei von ein und demselben Punkt ausgehende Halbgeraden.

Die eine Halbgerade (I) besitze die Richtungskosinus a_x, a_y, a_z, die andere Halbgerade (II) die Richtungskosinus b_x, b_y, b_z. In der durch beide Halbgeraden bestimmten Ebene drehen wir die erste (I) so, daß sie auf dem kürzesten Wege, d. h. durch eine Drehung von der Größe $\varphi < \pi$, in die zweite (II) übergeht. Hierdurch ist in der Ebene eine bestimmte Drehungsrichtung festgelegt. Wenn wir in dieser Richtung die erste Halbgerade (I) um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ drehen, so fällt sie mit einer Halbgeraden (III) zusammen, deren Richtungskosinus mit b_x', b_y', b_z' bezeichnet seien. Von dem gemeinsamen Punkt der Halbgeraden (I) und (II) aus ziehen wir jetzt eine zu beiden Halbgeraden senkrechte Halbgerade (IV) mit den Richtungskosinus c_x, c_y, c_z derart, daß das System der Halbgeraden (I), (III), (IV) homolog ist mit dem System der positiven Teile der Koordinatenachsen, daß also:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x' & b_y' & b_z' \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 1$$

ist.

Die Ausdrücke b_x', b_y', b_z' bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$\Sigma b_x' a_x = 0,$$

$$\Sigma b_x' b_x = \sin\varphi,$$

$$\Sigma b_x'^2 = 1.$$

Zur Befriedigung der beiden ersten setzen wir:

$$b_x' = \lambda a_x + \mu b_x,$$

und erhalten:

$$\lambda + \mu \cos\varphi = 0,$$

$$\lambda \cos\varphi + \mu = \sin\varphi,$$

d. h.:

$$\lambda = -\operatorname{cotg}\varphi, \quad \mu = \frac{1}{\sin\varphi},$$

und:

$$b_x' = -\operatorname{cotg}\varphi \cdot a_x + \frac{b_x}{\sin\varphi},$$

wodurch die dritte Gleichung von selbst erfüllt ist. Aus der obigen Determinantengleichung folgt dann:

$$c_x = a_y b_z' - a_z b_y'$$
$$= \frac{a_y b_z - a_z b_y}{\sin\varphi}$$
$$= \frac{a_y b_z - a_z b_y}{\sqrt{1-(\Sigma a_x b_x)^2}}, \quad c_y = \frac{a_z b_x - a_x b_z}{\sqrt{1-(\Sigma a_x b_x)^2}}, \quad c_z = \frac{a_x b_y - b_x a_y}{\sqrt{1-(\Sigma a_x b_x)^2}}.$$

Das Wesentliche besteht hier darin, daß im Nenner eine positive Zahl auftritt.

Um zur Schmiegungsebene zu gelangen, betrachten wir für den zu (t) gehörenden Kurvenpunkt die positive Halbtangente als Halbgerade (I), nehmen also $a_x = \alpha$, $a_y = \beta$, $a_z = \gamma$; die von dem betrachteten Kurvenpunkt aus durch den dem Werte $t + \Delta t$ entsprechenden Kurvenpunkt $(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$ verlaufende Halbgerade nehmen wir zur Halbgeraden (II), so daß, wenn:

$$\sigma = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

folgt:

$$b_x = \frac{\Delta x}{\sigma}, \quad b_y = \frac{\Delta y}{\sigma}, \quad b_z = \frac{\Delta z}{\sigma},$$

und:

$$c_x = \frac{\beta\,\Delta z - \gamma\,\Delta y}{\sqrt{(\beta\,\Delta z - \gamma\,\Delta y)^2 + (\gamma\,\Delta x - \alpha\,\Delta z)^2 + (\alpha\,\Delta y - \beta\,\Delta x)^2}}.$$

Man erhält:

$$\beta\,\Delta z - \gamma\,\Delta y = \frac{1}{2w}\left\{\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right\}\Delta t^2 + \cdots,$$
$$\gamma\,\Delta x - \alpha\,\Delta z = \frac{1}{2w}\left\{\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right\}\Delta t^2 + \cdots,$$
$$\alpha\,\Delta y - \beta\,\Delta x = \frac{1}{2w}\left\{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right\}\Delta t^2 + \cdots$$

Wir haben zu untersuchen, unter welchen Bedingungen wenigstens eine der rechts stehenden Reihen wirklich mit Δt^2 und mit keiner höheren Potenz von Δt beginnt. Unter der Voraussetzung, daß die betrachtete Kurve nicht in einer Ebene gelegen sei, fanden wir, daß keine der drei Ableitungen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ beständig Null sein kann. Jede dieser Ableitungen kann also nur an getrennt liegenden Punkten verschwinden, folglich ist es möglich, einen Bereich für die Veränderliche t so abzugrenzen, daß für Werte von t innerhalb desselben weder $\frac{dy}{dt}$ noch $\frac{dz}{dt}$ Null wird. Bestände nun für alle diese t-Werte die Gleichung:

$$\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

so wäre sie gleichbedeutend mit der Beziehung:

$$\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\frac{dz}{dt}} - \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{dy}{dt}} = 0,$$

oder:

$$z = my + n,$$

wenn m und n Konstante darstellen. Dies besagt, daß jedenfalls das dem abgegrenzten Wertbereich von t entsprechende Kurvenstück sich in einer Ebene befindet. Durch diese Überlegung ist gezeigt, daß keiner der drei obigen Koeffizienten von Δt^2 längs eines Kurvenstücks verschwinden kann, wenn kein Teil der Kurve in einer Ebene liegt. Wohl aber können diese Koeffizienten einzeln oder zugleich an getrennt liegenden Punkten verschwinden.

In den Ausdrücken für c_x, c_y, c_z hebt sich Δt^2 im Zähler und Nenner fort; die Grenzwerte von c_x, c_y, c_z für $\Delta t = 0$ nennen wir der Reihe nach λ, μ, ν und haben:

$$\lambda = \frac{\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\sum\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}}, \quad \mu = \frac{\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\sum\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}},$$

$$\nu = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\sum\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}}.$$

Diese Grenzwerte ergeben sich, sei es, daß man mit einem positiven oder mit einem negativen Δt zur Grenze Null übergeht.

Die gefundene Halbgerade liegt in einer Normale der betrachteten Kurve, da $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$. Diese Normale soll die Binormale der Kurve heißen, die Halbgerade selbst ihr positiver Teil. Diejenige Normale der Kurve, die senkrecht zur Tangente und Binormale ist, soll die Hauptnormale der Kurve heißen. Wir bestimmen ihren positiven Teil so, daß die positiven Teile der Tangente, der Haupt- und Binormale den positiven Teilen der x, y, z-Achse homolog liegen. Werden die Richtungskosinus der positiven Hauptnormale mit l, m, n bezeichnet, so muß hiernach:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 1$$

sein, d. h. es wird:

$$l = \gamma\mu - \beta\nu, \quad m = \alpha\nu - \gamma\lambda, \quad n = \beta\lambda - \alpha\mu,$$

oder:

$$l = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\sum\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\sqrt{\sum\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}},$$

$$m = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{dy}{dt}\sum\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\sqrt{\sum\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}},$$

$$n = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{dz}{dt}\sum\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\sqrt{\sum\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}}.$$

Ebenso wie wir einem Kurvenpunkt drei ausgezeichnete Gerade zuordneten, ordnen wir ihm auch drei ausgezeichnete, durch ihn hindurchgehende Ebenen zu, und zwar 1. die Normalebene senkrecht zur Tangente, 2. die Schmiegungsebene (auch Oskulationsebene genannt) senkrecht zur Binormale, 3. die rektifizierende Ebene senkrecht zur Hauptnormale. Die Gleichungen dieser drei Ebenen sind der Reihe nach:

$$(x'-x)\alpha + (y'-y)\beta + (z'-z)\gamma = 0,$$
$$(x'-x)\lambda + (y'-y)\mu + (z'-z)\nu = 0,$$
$$(x'-x)l + (y'-y)m + (z'-z)n = 0.$$

Die positiven Teile der Tangente und der Haupt- und Binormale zusammen bilden, wie man sagt, das bewegliche oder begleitende Dreikant für die Kurve.

Die Koordinaten eines Punktes hinsichtlich des begleitenden Dreikants sollen mit ξ, η, ζ bezeichnet werden. Dann bestehen zwischen den Koordinaten x', y', z' eines beliebigen Punktes in bezug auf das feste Koordinatensystem und seinen Koordinaten ξ, η, ζ in bezug auf das begleitende Dreikant die Beziehungen:

$$x' = x + \xi\alpha + \eta l + \zeta\lambda,$$
$$y' = y + \xi\beta + \eta m + \zeta\mu,$$
$$z' = z + \xi\gamma + \eta n + \zeta\nu,$$

$$\xi = (x'-x)\alpha + (y'-y)\beta + (z'-z)\gamma,$$
$$\eta = (x'-x)l + (y'-y)m + (z'-z)n,$$
$$\zeta = (x'-x)\lambda + (y'-y)\mu + (z'-z)\nu.$$

Wir stellen noch die Ausdrücke für die gefundenen Richtungskosinus unter der Voraussetzung auf, daß die Koordinaten x, y, z als Funktionen der Bogenlänge s betrachtet sind.

Beachtet man, daß:

$$g_2'(s)\,g_3''(s) - g_3'(s)\,g_2''(s) = \frac{1}{w^2}\left\{\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right\},$$

$$\Sigma\bigl(g_2'(s)\,g_3''(s) - g_3'(s)\,g_2''(s)\bigr)^2 = \Sigma g_1'(s)^2\,\Sigma g_1''(s)^2 - \bigl(\Sigma g_1'(s)\,g_1''(s)\bigr)^2 = \Sigma g_1''(s)^2,$$

so folgt:

$$\alpha = g_1'(s), \qquad \beta = g_2'(s), \qquad \gamma = g_3'(s),$$

$$l = \frac{g_1''(s)}{\sqrt{\Sigma g_1''(s)^2}}, \quad m = \frac{g_2''(s)}{\sqrt{\Sigma g_1''(s)^2}}, \quad n = \frac{g_3''(s)}{\sqrt{\Sigma g_1''(s)^2}},$$

$$\lambda = \frac{g_2'(s)\,g_3''(s) - g_3'(s)\,g_2''(s)}{\sqrt{\Sigma g_1''(s)^2}}, \quad \mu = \frac{g_3'(s)\,g_1''(s) - g_1'(s)\,g_3''(s)}{\sqrt{\Sigma g_1''(s)^2}},$$

$$\nu = \frac{g_1'(s)\,g_2''(s) - g_2'(s)\,g_1''(s)}{\sqrt{\Sigma g_1''(s)^2}}.$$

Die Voraussetzung, daß für den gewählten Wert von t die drei Ausdrücke $\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}$ usw. nicht zugleich verschwinden, geht hier in die Forderung über, daß für den gewählten Wert von s die zweiten Ableitungen von $g_1(s)$, $g_2(s)$, $g_3(s)$ nicht zugleich verschwinden.

Beispiele. 1. Die gewöhnliche Schraubenlinie. Wir haben hier:

$$g_1(s) = p\cos\frac{s}{\sqrt{p^2+q^2}}, \qquad g_2(s) = p\sin\frac{s}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad g_3(s) = \frac{qs}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

$$g_1'(s) = -\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad g_2'(s) = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad g_3'(s) = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

$$g_1''(s) = -\frac{p}{p^2+q^2}\cos\frac{s}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad g_2''(s) = \frac{-p}{p^2+q^2}\sin\frac{s}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad g_3''(s) = 0,$$

folglich:

$$\alpha = -\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \beta = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \gamma = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

$$l = -\cos\frac{s}{\sqrt{p^2+q^2}}, \qquad m = -\sin\frac{s}{\sqrt{p^2+q^2}}, \qquad n = 0,$$

$$\lambda = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \mu = \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \nu = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Die positive Hauptnormale trifft die Achse der Schraubenlinie senkrecht.

Die Koordinaten eines Punktes der Schmiegungsebene sind:

$$x = (p-\eta)\cos t - \frac{\xi p}{\sqrt{p^2+q^2}}\sin t,$$

$$y = (p-\eta)\sin t + \frac{\xi p}{\sqrt{p^2+q^2}}\cos t,$$

$$z = \qquad qt \qquad + \frac{\xi q}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Die Schmiegungsebene schneidet den Kreiszylinder, auf dem die Schraubenlinie liegt, in der Ellipse mit der Gleichung:

$$\frac{\xi^2}{p^2+q^2} + \frac{(\eta-p)^2}{p^2} = 1$$

Die Koordinaten eines Punktes der Normalebene sind:

$$x = (p-\eta)\cos t + \frac{\zeta q}{\sqrt{p^2+q^2}}\sin t,$$

$$y = (p-\eta)\sin t - \frac{\zeta q}{\sqrt{p^2+q^2}}\cos t,$$

$$\zeta = \quad qt \quad + \frac{\zeta p}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Die Normalebene schneidet den Kreiszylinder, auf dem die Schraubenlinie liegt, in der Ellipse mit der Gleichung:

$$\frac{(\eta-p)^2}{p^2} + \frac{\zeta^2 q^2}{p^2(p^2+q^2)} = 1.$$

Die rektifizierenden Ebenen der Schraubenlinie fallen mit den Tangentialebenen des Kreiszylinders, auf dem sie liegt, zusammen.

2. Die konische Spirale. Hier ergibt sich:

$$l = \frac{-k_1\sin\varphi - \sqrt{1-k^2}\cos\varphi}{\sqrt{k_1^2-k^2+1}}, \quad m = \frac{k_1\cos\varphi - \sqrt{1-k^2}\sin\varphi}{\sqrt{k_1^2-k^2+1}}, \quad n = 0,$$

$$\lambda = \frac{-hk_1(k_1\cos\varphi - \sqrt{1-k^2}\sin\varphi)}{\sqrt{k_1^2-k^2+1}}, \quad \mu = \frac{-hk_1(k_1\sin\varphi + \sqrt{1-k^2}\cos\varphi)}{\sqrt{k_1^2-k^2+1}},$$

$$\nu = \sqrt{k_1^2-k^2+1}.$$

Die Hauptnormale liegt senkrecht zur Kegelachse. Die Gleichungen eines Punktes der Hauptnormalen sind:

$$x' = (k_1 s+1)\cos\varphi + \tau l, \quad y' = (k_1 s+1)\sin\varphi + \tau m, \quad z' = h(k_1 s+1).$$

Setzen wir diese Ausdrücke an Stelle von x, y, z in die Kegelgleichung ein, so ergibt sich:

$$\tau = 2(k_1 s+1)\sqrt{1-k^2}.$$

Dieser Wert von τ ist positiv, folglich schneidet der positive Teil der Hauptnormalen den Kegel.

§ 3. Die sphärischen Bilder einer Raumkurve.

Um von den Richtungsänderungen, welche die Tangente, die Haupt- und Binormale längs einer Raumkurve erfahren, ein deutliches Bild zu erhalten, zieht man in einer Kugel vom Halbmesser 1 Radien, die den positiven Teilen jener Geraden parallel sind. Nehmen

wir zum Mittelpunkt dieser Kugel den Koordinatenanfangspunkt, so bilden die Endpunkte jener Radien drei Kurven auf der Kugel. Die Kurve mit den Gleichungen:

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma$$

heißt das sphärische Bild der Tangenten der gegebenen Kurve; ebenso heißen die durch:

$$x = l, \quad y = m, \quad z = n,$$

bezüglich:

$$x = \lambda, \quad y = \mu, \quad z = \nu$$

dargestellten Kurven das sphärische Bild der Hauptnormalen bzw. Binormalen der gegebenen Kurve.

Bei der gewöhnlichen Schraubenlinie und der konischen Spirale sind die drei sphärischen Bilder jedesmal Kreise.

Es liegt nahe, die Tangenten der sphärischen Bilder einer Kurve, ebenso ihre Bogenlängen zu bestimmen.

1. Aus der Gleichung:

$$l = \frac{g_1''(s)}{\sqrt{\Sigma g_1''(s)^2}}$$

folgt unmittelbar, da $g_1'(s) = \alpha$:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \sqrt{\Sigma g_1''(s)^2} \cdot l;$$

oder wenn wir:

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\Sigma g_1''(s)^2}$$

nehmen:

$$\text{(I)} \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{l}{\varrho}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{m}{\varrho}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{n}{\varrho}.$$

Die dem wachsenden s entsprechende Halbtangente des sphärischen Bildes der Tangenten einer Kurve ist somit parallel der positiven Hauptnormalen.

Nennen wir die Bogenlänge des sphärischen Bildes σ_1 und lassen sie mit s wachsen, so entsteht:

$$\frac{d\sigma_1}{ds} = \frac{1}{\varrho}, \quad \sigma_1 = \int_0^s \frac{ds}{\varrho}.$$

2. Aus der Gleichung:

$$l = \frac{g_1''(s)}{\sqrt{\Sigma g_1''(s)^2}}$$

folgt durch Differentiation nach s:

$$\frac{dl}{ds} = \frac{\Sigma g_1''(s)^2 \cdot g_1'''(s) - g_1''(s)\, \Sigma g_1''(s)\, g_1'''(s)}{\left(\sqrt{\Sigma g_1''(s)^2}\right)^3},$$

daher:

$$\Sigma \alpha \frac{dl}{ds} = \frac{\Sigma g_1'(s)\, g_1'''(s)}{\sqrt{\Sigma g_1''(s)^2}} = -\sqrt{\Sigma g_1''(s)^2};$$

denn aus der Beziehung $\Sigma g_1'(s)^2 = 1$ folgt sowohl $\Sigma g_1'(s) g_1''(s) = 0$ als auch $\Sigma g_1''(s)^2 + \Sigma g_1'(s) g_1'''(s) = 0$.

Ferner:
$$\Sigma \lambda \frac{dl}{ds} = \frac{\Sigma g_1'''(s)\left(g_2'(s) g_3''(s) - g_3'(s) g_2''(s)\right)}{\Sigma g_1''(s)^2}.$$

Wir bezeichnen die rechte Seite dieser Gleichung mit $-\frac{1}{r}$. Dann haben wir:

$$\Sigma \alpha \frac{dl}{ds} = -\frac{1}{\varrho}, \quad \Sigma \lambda \frac{dl}{ds} = -\frac{1}{r}, \quad \Sigma l \frac{dl}{ds} = 0,$$

so daß:

$$\text{(II)} \qquad \frac{dl}{ds} = -\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\lambda}{r}, \quad \frac{dm}{ds} = -\frac{\beta}{\varrho} - \frac{\mu}{r}, \quad \frac{dn}{ds} = -\frac{\gamma}{\varrho} - \frac{\nu}{r}.$$

Nehmen wir die Bogenlänge (σ_2) des sphärischen Bildes der Hauptnormalen als wachsend mit wachsendem s, so ergibt sich:

$$\frac{d\sigma_2}{ds} = \sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}, \quad \sigma_2 = \int_0^s \sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}} \cdot ds.$$

3. Da

$$\Sigma \alpha \frac{d\lambda}{ds} = -\Sigma \lambda \frac{d\alpha}{ds} = 0,$$

$$\Sigma l \frac{d\lambda}{ds} = -\Sigma \lambda \frac{dl}{ds} = \frac{1}{r},$$

$$\Sigma \lambda \frac{d\lambda}{ds} = 0,$$

so erhalten wir für das sphärische Bild der Binormalen:

$$\text{(III)} \qquad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{l}{r}, \quad \frac{d\mu}{ds} = \frac{m}{r}, \quad \frac{d\nu}{ds} = \frac{n}{r}.$$

Die Tangente dieses sphärischen Bildes ist also parallel der Hauptnormalen. Während die Zahl ϱ stets positiv bleibt, ist die Zahl r sowohl positiver wie negativer Werte fähig. Wenn wir daher die Bogenlänge σ_3 des betrachteten sphärischen Bildes durch die Integralgleichung

$$\sigma_3 = \int_0^s \frac{ds}{r}$$

berechnen, so nimmt sie bei wachsendem s zu oder ab, je nachdem r positiv oder negativ ist.

D a s V e r s c h w i n d e n v o n $\frac{1}{r}$ i s t d i e B e d i n g u n g d a f ü r, d a ß d i e g e g e b e n e K u r v e e b e n i s t; denn dann besitzen λ, μ, ν konstante Werte. Durch eine Koordinatentransformation erreicht man, daß zwei dieser Werte verschwinden. Wir sahen aber im § 2 S. 192, daß, wenn nur e i n e

der Determinanten $\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}$ usw. verschwindet, die vorgelegte Kurve eben ist. Verschwinden zwei von diesen Determinanten, nicht aber die dritte, so ist die Ebene der Kurve einer Koordinatenebene parallel. Verschwinden alle drei Determinanten, so erhalten λ, μ, ν unbestimmte Werte; die Zahl ϱ wird unendlich, und die vorgelegte Kurve ist eine Gerade.

Die Ausdrücke $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{r}$ sind uns entgegengetreten als Ableitungen von Bogenlängen sphärischer Bilder nach der Bogenlänge der gegebenen Kurve. Man pflegt vielfach den Ausdruck $\frac{1}{\varrho}$ als den Winkel zwischen zwei unendlich benachbarten Tangenten, dividiert durch das Bogenelement, den Ausdruck $\frac{1}{r}$ als den Winkel zwischen zwei unendlich benachbarten Binormalen, dividiert durch das Bogenelement, zu erklären. Es beruht dies auf folgender Erwägung. Ist φ der Winkel zwischen den zu (s) und $(s + \Delta s)$ gehörenden Tangenten, deren Richtungskosinus α, β, γ und $\alpha + \Delta\alpha$, $\beta + \Delta\beta$, $\gamma + \Delta\gamma$ sind, so hat man:

$$\cos\varphi = \Sigma\alpha(\alpha + \Delta\alpha) = 1 + \frac{1}{2}\Sigma\alpha\frac{d^2\alpha}{ds^2}\Delta s^2 + \cdots,$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2\Delta s^2 + \cdots,$$

$$= 1 - \frac{1}{2\varrho^2}\Delta s^2 + \cdots$$

Anderseits ist:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \cdots$$

Wir erhalten also für φ eine Entwicklung von der Form:

$$\varphi = \frac{\Delta s}{\varrho} + \cdots,$$

somit:

$$\lim_{(\Delta t = 0)} \frac{\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\varrho}.$$

Bezeichnet man, wie es gewöhnlich geschieht, den Winkel zweier unendlich benachbarter Tangenten mit „$d\varepsilon$“, so ist zu bemerken, daß hier $d\varepsilon$ nicht einen unendlich kleinen Zuwachs des Winkels zwischen einer festen und einer veränderlichen Tangente bedeutet; vielmehr ist $d\varepsilon = d\sigma_1$. Wenn man $d\sigma_1$ als Zuwachs eines Winkels deuten will, hat man den Kegelmantel, der von den Halbmessern der Einheitskugel längs des sphärischen Bildes der Tangenten gebildet wird, auf eine Ebene abzurollen und erhält damit einen Winkel, dessen Maßzahl gleich der des Bogens σ_1 ist, und nun wird $d\sigma_1 = d\varepsilon$. Durchaus Entsprechendes gilt von dem Ausdruck $\frac{1}{r}$.

Man nennt meistens $\frac{1}{\varrho}$ die erste, $\frac{1}{r}$ die zweite Krümmung der Raumkurve. Auch sind die Worte Flektion für die erste, Torsion für die zweite Krümmung in Gebrauch.

Bei Anwendung der Veränderlichen t ergibt sich:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2}}{\left(\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\right)^3},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2} \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \\ \frac{d^3x}{dt^3} & \frac{d^3y}{dt^3} & \frac{d^3z}{dt^3} \end{vmatrix}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß diese Ausdrücke in ihrer Gestalt sich nicht ändern, sei es, daß man statt des x, y, z-Systems ein anderes System rechtwinkliger Koordinaten zugrunde legt, sei es, daß man statt der Veränderlichen t eine neue Veränderliche benutzt.

Beispiele. a) Bei der gewöhnlichen Schraubenlinie erhält man:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{p}{p^2+q^2}, \quad \frac{1}{r} = \frac{-q}{p^2+q^2},$$

also ist bei der rechtsgewundenen Schraubenlinie $r < 0$, bei der linksgewundenen $r > 0$.

b) Bei der konischen Spirale hat man:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{-k_1\sqrt{1-k^2}\sin\varphi - (1-k^2)\cos\varphi}{k_1 s + 1} = \frac{\sqrt{1-k^2}\sqrt{k_1^2 - k^2 + 1}}{k_1 s + 1}\, l,$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{hk_1\left(k_1\sqrt{1-k^2}\sin\varphi + (1-k^2)\cos\varphi\right)}{(k_1 s + 1)\sqrt{k_1^2 - k^2 + 1}} = -\frac{hk_1\sqrt{1-k^2}}{k_1 s + 1}\, l,$$

somit:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sqrt{1-k^2}\sqrt{k_1^2-k^2+1}}{k_1 s + 1}, \quad \frac{1}{r} = -\frac{hk_1\sqrt{1-k^2}}{k_1 s + 1}.$$

Hier ist das Verhältnis der ersten zur zweiten Krümmung konstant, während bei der gewöhnlichen Schraubenlinie jede Krümmung für sich unveränderlich ist.

4. Für das sphärische Bild der Tangenten seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Richtungskosinus der Tangenten, $\frac{1}{\varrho_1}$ sei die erste Krümmung.

Da

$$\alpha_1 = l, \quad \beta_1 = m, \quad \gamma_1 = n,$$

so ist:

$$\frac{d\alpha_1}{d\sigma_1} = \frac{\frac{dl}{ds}}{\frac{1}{\varrho}} = -\alpha - \frac{\varrho}{r}\lambda,$$

daher:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}.$$

Für das sphärische Bild der Binormalen seien α_3, β_3, γ_3 die Richtungskosinus der Tangenten, $\frac{1}{\varrho_3}$ sei die erste Krümmung.

Da:

$$\alpha_3 = l, \quad \beta_3 = m, \quad \gamma_3 = n,$$

so wird:

$$\frac{d\alpha_3}{d\sigma_3} = \frac{\frac{dl}{ds}}{\frac{1}{r}} = -\frac{r}{\varrho}\alpha - \lambda,$$

daher:

$$\frac{1}{\varrho_3} = \sqrt{1 + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2}.$$

Es besteht also der Satz:

$$\varrho_1^2 + \varrho_3^2 = 1.$$

Bemerkung. Die Gleichungen (I), (II), (III) pflegt man die Frenetschen (auch Serretschen oder Frenet-Serretschen) Formeln zu nennen. Vgl. F. Frenet, Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal. Fünfte Auflage. Paris 1891. S. 192, sowie J. A. Serret in der fünften Auflage von A. Monge, Application de l'analyse à la géométrie. Paris 1850. Über die Priorität Frenets gegenüber Serret vgl. Nouvelles Annales de Mathém. (2) Bd. 3. 1864. S. 284.

§ 4. Gestalt einer Raumkurve in der Umgebung eines gewöhnlichen Punktes.

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen setzen uns in den Stand, die Umgebung eines gewöhnlichen Punktes der gegebenen Raumkurve auf das Dreikant der Tangente, Haupt- und Binormale zu beziehen und damit von dem Verhalten der Kurve in der Nähe des betrachteten Punktes eine anschauliche Vorstellung zu gewinnen.

Dem Werte $s + \Delta s$ entspreche der Kurvenpunkt mit den Koordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$. Da:

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{l}{\varrho}, \quad \frac{d^3x}{ds^3} = \frac{d\frac{l}{\varrho}}{ds} = -\frac{\alpha}{\varrho^2} - \frac{\lambda}{r\varrho} - \frac{l}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds},$$

so folgt die Entwicklung:

$$\Delta x = \alpha\Delta s + \frac{l}{2\varrho}\Delta s^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha}{\varrho^2} + \frac{l}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds} + \frac{\lambda}{r\varrho}\right)\Delta s^3 + \cdots$$

und damit nach § 2 S. 193, wenn $x' = x + \Delta x,\ y' = y + \Delta y,\ z' = z + \Delta z$ genommen wird:

$$\xi = \Delta s - \frac{1}{6\varrho^2}\Delta s^3 + \cdots,$$

$$\eta = \frac{1}{2\varrho}\Delta s^2 - \frac{1}{6\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}\Delta s^3 + \cdots,$$

$$\zeta = -\frac{1}{6r\varrho}\Delta s^3 + \cdots$$

1. Die Zahlen ξ und η sind die Koordinaten der senkrechten Projektion des betrachteten Kurvenpunktes auf die Schmiegungsebene, und bei veränderlichem Δs stellen die Gleichungen für ξ und η die senkrechte Projektion eines kleinen Kurvenstücks auf die Schmiegungsebene dar. Die Tangente dieser Projektion im Punkte (x, y, z) fällt zusammen mit der Kurventangente, die Normale der Projektion mit der Hauptnormalen. Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunkts der Projektion sind:

$$\xi = 0, \quad \eta = \varrho.$$

Wir haben hiermit eine neue Bedeutung von ϱ kennen gelernt, nämlich die des Krümmungsradius der senkrechten Projektion der Kurve auf die Schmiegungsebene.

Den Krümmungsmittelpunkt der Projektion nennen wir den Mittelpunkt der ersten Krümmung der gegebenen Kurve. Seine Koordinaten im x, y, z-System sind:

$$x_1 = x + \varrho l, \quad y_1 = y + \varrho m, \quad z_1 = z + \varrho n,$$

oder:

$$x_1 = x + \frac{g_1''(s)}{\Sigma g_1''(s)^2}, \quad y_1 = y + \frac{g_2''(s)}{\Sigma g_1''(s)^2}, \quad z_1 = z + \frac{g_3''(s)}{\Sigma g_1''(s)^2},$$

oder:

$$x_1 = x + \frac{\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\sum\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right\}}{\sum\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2},$$

$$y_1 = y + \frac{\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{dy}{dt}\sum\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right\}}{\sum\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2},$$

$$z_1 = z + \frac{\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left\{\frac{d^2z}{dt^2}\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{dz}{dt}\sum\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right\}}{\sum\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}.$$

2. Die Gleichungen für ξ und ζ stellen die senkrechte Projektion eines kleinen Kurvenstücks auf die rektifizierende Ebene dar. Die im ersten Teil § 1 erklärten Zahlen ν und λ besitzen hier die Werte $\nu = 1,\ \lambda = 2$. Die Projektion hat daher im betrachteten Punkt eine

Wendetangente, und, da $\lambda - \nu$ ungerade, so sind zwei unendlich fern liegende Krümmungsmittelpunkte vorhanden.

3. Die Gleichungen für η und ζ stellen die senkrechte Projektion eines kleinen Kurvenstücks auf die Normalebene dar. Die Zahlen ν und λ besitzen hier die Werte $\nu = 2$, $\lambda = 1$, somit besitzt die Projektion im betrachteten Punkt eine Hellebardenspitze mit dem Krümmungshalbmesser Null.

Die Koordinatenebenen des ξ, η, ζ-Systems teilen den Raum in acht Teile — Oktanten —. Wir wollen dieselben so benennen, daß ein Punkt, für den

$$\left.\begin{array}{llll} \xi > 0, & \eta > 0, & \zeta > 0, & \text{im ersten Oktanten} \\ \xi < 0, & \eta > 0, & \zeta > 0, & \text{im zweiten Oktanten} \\ \xi < 0, & \eta < 0, & \zeta > 0, & \text{im dritten Oktanten} \\ \xi > 0, & \eta < 0, & \zeta > 0, & \text{im vierten Oktanten} \\ \xi > 0, & \eta > 0, & \zeta < 0, & \text{im fünften Oktanten} \\ \xi < 0, & \eta > 0, & \zeta < 0, & \text{im sechsten Oktanten} \\ \xi < 0, & \eta < 0, & \zeta < 0, & \text{im siebenten Oktanten} \\ \xi > 0, & \eta < 0, & \zeta < 0, & \text{im achten Oktanten} \end{array}\right\} \text{liegt.}$$

Läßt man Δs von einem positiven Wert durch die Null hindurch zu einem negativen Wert übergehen, so tritt bei positivem r der entsprechende Kurvenpunkt aus dem fünften Oktanten in den zweiten über, bei negativem r tritt er aus dem ersten Oktanten in den sechsten über; die Schmiegungsebene wird also von der Kurve im Berührungspunkt geschnitten.

Die Schmiegungsebene sowohl wie die rektifizierende Ebene enthalten die Tangente der Kurve. Man nennt eine Ebene, welche eine Tangente der Kurve enthält, eine Tangentialebene derselben. Es liegt nahe, auch die senkrechten Projektionen der Kurve auf ihre Tangentialebenen zu betrachten. Um eine Tangentialebene festzulegen, messen wir die Winkel zwischen den einzelnen Halbnormalen der Kurve in der Normalebene durch eine Drehung, die in derjenigen Richtung erfolgt, welche die positive Hauptnormale auf dem kürzesten Wege in die positive Binormale überführt. Die Richtungskosinus der Halbnormalen, welche mit der positiven Hauptnormalen den Winkel φ bildet, sind dann:

$$\alpha' = l \cos\varphi + \lambda \sin\varphi, \quad \beta' = m \cos\varphi + \mu \sin\varphi, \quad \gamma' = n \cos\varphi + \nu \sin\varphi.$$

Die hierdurch bestimmte Normale werde als η'-Achse bezeichnet, und senkrecht zu ihr und der Tangente liege die ζ'-Achse mit den Richtungskosinus:

$$\alpha'' = \lambda \cos\varphi - l \sin\varphi, \quad \beta'' = \mu \cos\varphi - m \sin\varphi, \quad \gamma'' = \nu \cos\varphi - n \sin\varphi.$$

Zwischen den Koordinaten x', y', z' eines Punktes im x, y, z-System und seinen Koordinaten im ξ, η', ζ'-System bestehen die Gleichungen:

$$x' = x + \alpha\xi + \eta'\alpha' + \zeta'\alpha'', \quad y' = y + \beta\xi + \eta'\beta' + \zeta'\beta'',$$
$$z' = z + \gamma\xi + \eta'\gamma' + \zeta'\gamma''.$$

Die Gleichungen der senkrechten Projektion eines kleinen Kurvenstücks auf die $\xi\eta'$-Ebene sind dann:

$$\xi = \Sigma\Delta x \cdot \alpha = \Delta s - \frac{1}{6\varrho^2}\Delta s^3 + \cdots,$$
$$\eta' = \Sigma\Delta x \cdot \alpha' = \frac{\cos\varphi}{2\varrho}\Delta s^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\cos\varphi}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds} + \frac{\sin\varphi}{r\varrho}\right)\Delta s^3 + \cdots$$

Für den Krümmungsmittelpunkt der Projektion im Punkte (x, y, z) ergibt sich:

$$\xi = 0, \quad \eta' = \frac{\varrho}{\cos\varphi}.$$

Im festen Koordinatensystem hat dieser Punkt die Koordinaten:

$$x' = x + \varrho l + \varrho \operatorname{tg}\varphi \cdot \lambda,$$
$$y' = y + \varrho m + \varrho \operatorname{tg}\varphi \cdot \mu,$$
$$z' = z + \varrho n + \varrho \operatorname{tg}\varphi \cdot \nu.$$

Er wird erhalten, indem man von dem betrachteten Kurvenpunkt aus zuerst zum Mittelpunkt der ersten Krümmung geht und dann weiter um das Stück $\varrho \operatorname{tg}\varphi$ in der Richtung der Binormalen. Also besteht der Satz: Die zu einem Kurvenpunkt gehörenden Krümmungsmittelpunkte der senkrechten Projektionen der Kurve auf die zu jenem Punkt gehörenden Tangentialebenen liegen in einer Geraden, die parallel zur Binormalen ist und den Mittelpunkt der ersten Krümmung der Kurve enthält. Wir nennen diese Gerade die Krümmungsachse der Kurve.

Der hier benutzte Weg, um von den Tangentialebenen aus zur Krümmungsachse zu gelangen, dürfte zuerst von K. Peterson (Über Kurven und Flächen. Moskau und Leipzig 1868. S. 10) beschritten sein.

§ 5. Die Einhüllende einer Ebenenschar.

Einem gewöhnlichen Kurvenpunkte haben wir bisher Ebenen und Gerade zugeordnet. Diese Ebenen und Geraden ändern längs der Kurve ihre Lage und erzeugen weitere geometrische Gebilde, die wir kennen lernen wollen. Zunächst sind allgemeine Erörterungen über eine einfach unendliche Schar von Ebenen notwendig. Eine solche Schar sei dargestellt durch die Gleichung:

$$xA(t) + yB(t) + zC(t) + D(t) = 0,$$

wo die Funktionen $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ die Richtungskosinus der Normalen der zu dem Wert t gehörenden Einzelebene der Schar bedeuten sollen, so daß:

$$A(t)^2 + B(t)^2 + C(t)^2 = 1.$$

Die Schnittlinie der zu t und $t + \Delta t$ gehörenden Einzelebenen wird bestimmt durch die Gleichungen:

$$xA(t) + yB(t) + zC(t) + D(t) = 0,$$
$$xA(t+\Delta t) + yB(t+\Delta t) + zC(t+\Delta t) + D(t+\Delta t) = 0.$$

An Stelle der letzten Gleichung können wir schreiben:

$$xA'(t) + yB'(t) + zC'(t) + D'(t)$$
$$+ \frac{1}{2}\{xA'' + yB'' + zC'' + D''\}\Delta t + \cdots = 0.$$

Die dem Grenzfall $\Delta t = 0$ entsprechende Lage der Schnittlinie wird also durch die beiden Gleichungen:

$$xA + yB + zC + D = 0,$$
$$xA' + yB' + zC' + D' = 0$$

bestimmt, welche zwei zueinander senkrechte Ebenen darstellen, falls nicht A', B', C' zugleich für alle Werte von t verschwinden. Wir schließen diesen Fall aus, da für ihn die vorgelegte Ebenenschar aus lauter parallelen Ebenen bestehen würde. Bezeichnen nun $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ die Richtungskosinus der Grenzlage der betrachteten Schnittlinie, so folgt:

$$a(t) = \frac{BC' - CB'}{\sqrt{\Sigma A'^2}}, \quad b(t) = \frac{CA' - AC'}{\sqrt{\Sigma A'^2}}, \quad c(t) = \frac{AB' - BA'}{\sqrt{\Sigma A'^2}}.$$

Es ist zu untersuchen, unter welchen Umständen $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ von t unabhängig sind, mit anderen Worten, wann die Grenzlage der betrachteten Schnittlinie mit sich änderndem t ihre Richtung beibehält. Aus den für $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ bestehenden Identitäten:

$$aA + bB + cC = 0,$$
$$aA' + bB' + cC' = 0,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

folgt durch Differentiation:

$$a'A + b'B + c'C = 0,$$
$$a'A' + b'B' + c'C' = -\Sigma aA'',$$
$$a'(BC' - CB') + b'(CA' - AC') + c'(AB' - BA') = 0.$$

Man hat:

$$\Sigma a A'' = \frac{1}{\sqrt{\Sigma A'^2}} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}.$$

Wir bezeichnen die hier auftretende Determinante dritter Ordnung mit Δ und erhalten:

$$a'(t) = -\frac{A'\Delta}{(\sqrt{\Sigma A'^2})^3},\quad b'(t) = -\frac{B'\Delta}{(\sqrt{\Sigma A'^2})^3},\quad c'(t) = -\frac{C'\Delta}{(\sqrt{\Sigma A'^2})^3}.$$

Die Bedingung dafür, daß $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ von t unabhängig sind, ist demnach $\Delta = 0$. Besteht die Gleichung $\Delta = 0$, so bilden entweder die Grenzlagen unserer Schnittlinie eine Zylinderfläche, oder die Grenzlagen fallen in eine einzige Gerade zusammen, d. h. die gegebene Ebenenschar bildet einen Ebenenbüschel. Um dies zu entscheiden, legen wir senkrecht zur Richtung der Grenzlagen unserer Schnittlinie eine Ebene durch den Koordinatenanfangspunkt und sehen zu, ob sie von den Grenzlagen in einer Kurve oder einem Punkt geschnitten wird. Die Koordinaten des Punktes, in welchem die fragliche Ebene von der zu t gehörenden Grenzlage unserer Geraden geschnitten wird, genügen den Gleichungen:

$$xA + yB + zC + D = 0,$$

$$x\frac{A'}{w} + y\frac{B'}{w} + z\frac{C'}{w} + \frac{D'}{w} = 0,$$

$$x\frac{BC' - CB'}{w} + y\frac{CA' - AC'}{w} + z\frac{AB' - BA'}{w} = 0.$$

Hier ist zur Abkürzung statt $\sqrt{\Sigma A'^2}$ einfach w geschrieben. Die Koeffizienten von x, y, z in den vorstehenden Gleichungen bilden das System der neuen Richtungskosinus von drei zueinander senkrechten Geraden. Bezeichnen wir die für x, y, z sich ergebenden Lösungsfunktionen mit $h_1(t)$, $h_2(t)$, $h_3(t)$, so folgt:

$$h_1(t) = -DA - \frac{D'A'}{w^2},\quad h_2(t) = -DB - \frac{DB'}{w^2},\quad h_3(t) = -DC - \frac{DC'}{w^2}.$$

Differenzieren wir die Identitäten:

$$h_1 A + h_2 B + h_3 C + D = 0,$$

$$h_1 A' + h_2 B' + h_3 C' + D' = 0,$$

$$h_1(BC' - CB') + h_2(CA' - AC') + h_3(AB' - BA') = 0$$

nach t, so entsteht, da:

$$h_1 A'' + h_2 B'' + h_3 C'' + D'' = Dw^2 - \frac{D'\Sigma A'A''}{w^2} + D'',$$

$$h_1(BC'' - CB'') + h_2(CA'' - AC'') + h_3(AB'' - BA'') = \frac{D'\Delta}{w^2} = 0,$$

das System:

$$h_1'A + h_2'B + h_3'C = 0,$$
$$h_1'A' + h_2'B' + h_3'C' = -Dw^2 + \frac{D'\Sigma A'A''}{w^2} - D'',$$
$$h_1'(BC' - CB') + h_2'(CA' - AC') + h_3'(AB' - BA') = 0.$$

Soll die fragliche Ebene nur in einem Punkt geschnitten werden, so müssen h_1, h_2, h_3 konstant sein, h_1', h_2', h_3' also verschwinden. Die Bedingungen für einen Ebenenbüschel sind somit:

$$\Delta = 0, \qquad Dw^2 - D'\frac{\Sigma A'A''}{w^2} + D'' = 0.$$

Man kann sich umgekehrt leicht überzeugen, daß für einen Ebenenbüschel die fraglichen Bedingungen erfüllt sind. Die einfachste Art der Darstellung eines Ebenenbüschels ist:

$$(xa_1 + yb_1 + zc_1 + d_1) - t(xa_2 + yb_2 + zc_2 + d_2) = 0,$$

wenn angenommen wird, daß die beiden Bezugsebenen senkrecht zueinander sind, und die Zahlen a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 Richtungskosinus bedeuten, daß also:

$$\Sigma a_1^2 = 1, \quad \Sigma a_2^2 = 1, \quad \Sigma a_1 a_2 = 0.$$

Bei dieser Darstellung erhält man:

$$A(t) = \frac{a_1 - ta_2}{\sqrt{1+t^2}}, \quad B(t) = \frac{b_1 - tb_2}{\sqrt{1+t^2}}, \quad C(t) = \frac{c_1 - tc_2}{\sqrt{1+t^2}}, \quad D(t) = \frac{d_1 - td_2}{\sqrt{1+t^2}},$$

und findet leicht, daß unsere Bedingungen bestehen.

Wir setzen jetzt voraus, daß die Determinante Δ von Null verschieden ist, und fragen nach dem Punkte, in welchem die zu t gehörende Grenzlage unserer Schnittlinie von der zu $t + \Delta t$ gehörenden Einzelebene der Schar geschnitten wird. Die Koordinaten x, y, z dieses Punktes müssen die Gleichungen befriedigen:

$$xA(t) + yB(t) + zC(t) + D(t) = 0,$$
$$xA'(t) + yB'(t) + zC'(t) + D'(t) = 0,$$
$$xA(t+\Delta t) + yB(t+\Delta t) + zC(t+\Delta t) + D(t+\Delta t) = 0.$$

Vermöge der beiden ersten dieser Gleichungen können wir an Stelle der dritten schreiben:

$$\frac{1}{2}\left(xA''(t) + yB''(t) + zC''(t) + D''(t)\right)$$
$$+ \frac{1}{6}\left(xA'''(t) + yB'''(t) + zC'''(t) + D'''(t)\right)\Delta t + \cdots = 0.$$

Für die Koordinaten der Grenzlage unseres Punktes bei $\Delta t = 0$ besteht folglich das System:

$$\begin{aligned} xA + yB + zC + D &= 0, \\ xA' + yB' + zC' + D' &= 0, \\ xA'' + yB'' + zC'' + D'' &= 0, \end{aligned}$$

das wegen $\Delta \gtrless 0$ eine bestimmte Lösung besitzt. Wir bezeichnen dieselbe mit $x = l_1(t)$, $y = l_2(t)$, $z = l_3(t)$ und erhalten:

$$l_1(t) = \frac{-1}{\Delta}\begin{vmatrix} B & C & D \\ B' & C' & D' \\ B'' & C'' & D'' \end{vmatrix}, \quad l_2(t) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A & C & D \\ A' & C' & D' \\ A'' & C'' & D'' \end{vmatrix}, \quad l_3(t) = \frac{-1}{\Delta}\begin{vmatrix} A & B & D \\ A' & B' & D' \\ A'' & B'' & D'' \end{vmatrix}.$$

Es bleibt noch zu untersuchen, ob die Ausdrücke für $l_1(t)$, $l_2(t)$, $l_3(t)$ konstant oder mit t veränderlich sind.

Durch Differentiation der Identitäten:

$$\begin{aligned} l_1 A + l_2 B + l_3 C + D &= 0, \\ l_1 A' + l_2 B' + l_3 C' + D' &= 0, \\ l_1 A'' + l_2 B'' + l_3 C'' + D'' &= 0 \end{aligned}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} l_1' A + l_2' B + l_3' C &= 0, \\ l_1' A' + l_2' B' + l_3' C' &= 0, \\ l_1' A'' + l_2' B'' + l_3' C'' &= -(l_1 A''' + l_2 B''' + l_3 C''' + D''') \\ &= \frac{-1}{\Delta}\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix} = -\frac{\Delta_1}{\Delta}, \end{aligned}$$

wenn die hier auftretende Determinante vierter Ordnung mit Δ_1 bezeichnet wird.

Ist Δ_1 gleich Null, so verschwinden l_1', l_2', l_3', und die Grenzlagen unserer Schnittlinien bilden einen Kegel.

Ist Δ_1 von Null verschieden, so erhalten wir:

$$l_1' = -\frac{BC' - CB'}{\Delta^2}\Delta_1, \quad l_2' = -\frac{CA' - AC'}{\Delta^2}\Delta_1, \quad l_3' = -\frac{AB' - BA'}{\Delta^2}\Delta_1.$$

Damit ist bewiesen, daß die Tangenten der durch:

$$x = l_1(t), \quad y = l_2(t), \quad z = l_3(t)$$

bestimmten Kurve mit den Grenzlagen der Schnittlinien benachbarter Ebenen zusammenfallen.

Wir zeigen noch, daß die Schmiegungsebenen unserer Kurve mit den Ebenen der gegebenen Schar zusammenfallen. Die zu t gehörende Schmiegungsebene hat nach § 2 S. 193 die Gleichung:

$$(x-l_1)(l_2'l_3''-l_3'l_2'')+(x-l_2)(l_3'l_1''-l_1'l_3'')+(x-l_3)(l_1'l_2'-l_2'l_1'')=0.$$

Aber:

$$l_1''=-\frac{BC''-CB''}{\Delta^2}\Delta_1+l_1'\frac{d\log\frac{\Delta_1}{\Delta^2}}{dt},$$

$$l_2'l_3''-l_3'l_2''=\frac{\Delta_1^2}{\Delta^4}\left\{CA'-AC')(AB''-BA'')-(AB'-BA')(CA''-AC'')\right\}$$
$$=\frac{A\Delta_1^2}{\Delta^3},$$

ebenso:

$$l_3'l_1''-l_1'l_3''=\frac{B\Delta_1^2}{\Delta^3},\quad l_1'l_2''-l_2'l_1''=\frac{C\Delta_1^2}{\Delta^3},$$

folglich geht die Gleichung der Schmiegungsebene über in:

$$(x-l_1)A+(y-l_2)B+(z-l_3)C=0,$$

oder, da:

$$l_1A+l_2B+l_3C=-D,$$

in:

$$xA+yB+zC+D=0,$$

und das hatten wir behauptet.

Man sagt, der Ort der Grenzlagen der betrachteten Schnittlinien werde von den Ebenen der Schar **umhüllt**, auch wohl, er bilde die **Einhüllende** (Enveloppe) der Ebenen der Schar. Bildet die Ebenenschar keinen Ebenenbüschel, so ist die Einhüllende eine Fläche, die man aus einem später zu erörternden Grunde eine **abwickelbare Fläche** nennt. Ist letztere weder ein Zylinder noch ein Kegel, so nennt man den Ort der Grenzlagen der betrachteten Schnittpunkte $(x=l_1(t),\ y=l_2(t),\ z=l_3(t))$ die **Gratlinie** (auch **Rückkehrkante** oder **Wendekante**) der abwickelbaren Fläche.

Wir können unsere Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen. **Ist eine einfach unendliche Schar nicht paralleler Ebenen durch die Gleichung gegeben:**

$$xA(t)+yB(t)+zC(t)+D(t)=0,$$

in der $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ **die Richtungskosinus der Normalen der zu** t **gehörenden Ebene bedeuten sollen, so daß** $\Sigma A^2=1$, **so bilden die Ebenen der Schar einen Ebenenbüschel, wenn sowohl die Determinante**

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

wie der Ausdruck:

$$\varDelta_0 = D\Sigma A'^2 - D'\frac{\Sigma A'A''}{\Sigma A'^2} + D''$$

verschwindet.

Ist $\varDelta = 0$, $\varDelta_0 \gtrless 0$, so umhüllen die Ebenen einen Zylinder.

Ist $\varDelta$ von Null verschieden, verschwindet aber die Determinante vierter Ordnung:

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix},$$

so umhüllen die Ebenen der Schar einen Kegel.

Ist weder $\varDelta$ noch $\varDelta_1$ gleich Null, so umhüllen die Ebenen der Schar die Tangentenfläche einer Kurve und fallen mit den Schmiegungsebenen der letzteren zusammen.

Auf Grund dieses Satzes brauchen wir nicht mehr nach der von den Schmiegungsebenen einer Kurve umhüllten Fläche zu fragen; es ist die Tangentenfläche der gegebenen Kurve, die Gratlinie dieser Fläche ist die Kurve selbst.

Bemerkung. Lassen wir die Voraussetzung, daß $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ Richtungskosinus bedeuten sollen, fallen, so ergibt sich:

$$a(t) = \frac{BC' - CB'}{\sqrt{\Sigma(BC' - CB')^2}}, \quad h_1(t) = \frac{D(A'\Sigma AA' - A\Sigma A'^2) + D'(A\Sigma AA' - A'\Sigma A^2)}{\Sigma(BC' - CB')^2},$$

usf.

und im Ausdruck des vorigen Satzes ist $\varDelta_0$ durch:

$$D(\Sigma A'A''\Sigma AA' - \Sigma AA''\Sigma A'^2) + D'(\Sigma AA''\Sigma AA' - \Sigma A'A''\Sigma A^2) + D''\Sigma(BC' - CB')^2$$

zu ersetzen.

§ 6. Die Schar der Normalebenen. Die Schmiegungskugel.

Die Grenzlage der Schnittlinie der zu den Werten s und $s + \varDelta s$ der Bogenlänge gehörenden Normalebenen für $\varDelta s = 0$ wird bestimmt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \big(x - g_1(s)\big)\alpha(s) + \big(y - g_2(s)\big)\beta(s) + \big(z - g_3(s)\big)\gamma(s) &= 0, \\ (x - g_1)\alpha'(s) + (y - g_2)\beta'(s) + (z - g_3)\gamma'(s) &= 1. \end{aligned}$$

Da aber nach den ersten Frenetschen Formeln

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{l}{\varrho}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{m}{\varrho}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{n}{\varrho},$$

so tritt an die Stelle der zweiten Bestimmungsgleichung die folgende:

$$(x - g_1)l + (y - g_2)m + (z - g_3)n = \varrho.$$

Die Grenzlage unserer Schnittlinie besitzt somit die Richtungskosinus λ, μ, ν und geht durch den Mittelpunkt der ersten Krümmung $(g_1 + l\varrho,\ g_2 + m\varrho,\ g_3 + n\varrho)$, d. h. sie fällt mit der Krümmungsachse zusammen.

Zur Bestimmung des zu s gehörenden Punktes der Gratlinie haben wir die weitere Gleichung:

$$\left(x-g_1\right)\left(\frac{-\alpha}{\varrho}-\frac{\lambda}{r}\right)+\left(y-g_2\right)\left(\frac{-\beta}{\varrho}-\frac{\mu}{r}\right)+\left(z-g_3\right)\left(\frac{-\gamma}{\varrho}-\frac{\nu}{r}\right)=\frac{d\varrho}{ds},$$

oder, wegen der ersten Bestimmungsgleichung:

$$(x-g_1)\lambda+(y-g_2)\mu+(z-g_3)\nu=-r\frac{d\varrho}{ds}.$$

Die Koordinaten des fraglichen Punktes sollen mit x_2, y_2, z_2 bezeichnet werden. Man erhält dann:

$$x_2 = g_1 + l\varrho - \lambda r\frac{d\varrho}{ds},$$

$$y_2 = g_2 + m\varrho - \mu r\frac{d\varrho}{ds},$$

$$z_2 = g_3 + n\varrho - \nu r\frac{d\varrho}{ds},$$

und damit weiter:

$$\frac{dx_2}{ds} = -\lambda\left(\frac{\varrho}{r} + r\frac{d^2\varrho}{ds^2} + \frac{dr}{ds}\frac{d\varrho}{ds}\right),$$

$$\frac{dy^2}{ds} = -\mu\left(\frac{\varrho}{r} + r\frac{d^2\varrho}{ds^2} + \frac{dr}{ds}\frac{d\varrho}{ds}\right),$$

$$\frac{dz_2}{ds} = -\nu\left(\frac{\varrho}{r} + r\frac{d^2\varrho}{ds^2} + \frac{dr}{ds}\frac{d\varrho}{ds}\right).$$

Die Gleichung:

$$\varrho + r\frac{dr}{ds}\frac{d\varrho}{ds} + r^2\frac{d^2\varrho}{ds^2} = 0$$

drückt daher die Bedingung dafür aus, daß die Normalebenen der betrachteten Kurve einen Kegel umhüllen. Findet dieser Fall statt, so wird:

$$\frac{d}{ds}\left((x_2-g_1)^2+(y_2+g_2)^2+(z_2-g_3)^2\right) = -2\Sigma\cdot(x_2-g_1)\alpha = 0,$$

folglich:

$$(x_2-g_1)^2+(y_2-g_2)^2+(z_2-g_3)^2 = \text{const.}$$

Die obige Bedingung ist also zugleich die Bedingung dafür, daß die gegebene Kurve auf einer Kugel liegt.

Man nennt die Kugel, welche durch den betrachteten Kurvenpunkt gelegt ist, und den Punkt $x = x_2,\ y = y_2,\ z = z_2$ zum Mittelpunkt hat, die Schmiegungskugel, die zu jenem Kurvenpunkt gehört. Ihre Gleichung ist:

$$\sum\left(x - g_1 - l\varrho + \lambda r\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 = \varrho^2 + r^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2.$$

Man kann die Gleichung der Schmiegungskugel auf sehr einfache Weise folgendermaßen finden.

In der zu dem Kurvenpunkt P gehörenden Schmiegungsebene nehmen wir den Mittelpunkt der ersten Krümmung zum Mittelpunkt eines Kreises, der den Halbmesser ϱ besitzt, also durch den Punkt P hindurchgeht. Die Mittelpunkte aller Kugeln, welche diesen Kreis enthalten, liegen auf der Krümmungsachse, ihre Koordinaten lassen sich daher durch

$$g_1 + l\varrho + \lambda\tau, \quad g_2 + m\varrho + \mu\tau, \quad g_3 + n\varrho + \nu\tau$$

darstellen, wo τ die Maßzahl des senkrechten Abstandes eines Kugelmittelpunkts von der Schmiegungsebene bedeutet. Die Gleichung einer solchen Kugel ist folglich:

$$\Sigma(x - g_1 - l\varrho - \lambda\tau)^2 = \varrho^2 + \tau^2,$$

oder:

$$\Sigma(x-g_1)^2 - 2\Sigma(x-g_1)(\lambda\varrho + \lambda\tau) = 0.$$

Soll die Kugel den zu $s + \Delta s$ gehörenden Kurvenpunkt enthalten, so muß ihre Gleichung befriedigt werden, wenn statt x, y, z gesetzt wird $g_1 + \Delta g_1$, $g_2 + \Delta g_2$, $g_3 + \Delta g_3$.

Wir erhielten für Δg_1 im § 4 S. 200 die Entwicklung:

$$\Delta g_1 = \alpha\Delta s + \frac{l}{2\varrho}\Delta s^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha}{\varrho^2} + \frac{l}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds} + \frac{\lambda}{r\varrho}\right)\Delta s^3 + \cdots,$$

damit ergibt sich:

$$\Sigma\Delta g_1^{\,2} = \Delta s^2 - \frac{1}{12\varrho^2}\Delta s^4 + \cdots,$$

$$\Sigma\Delta g_1(l\varrho + \lambda\tau) = \frac{1}{2}\Delta s^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds} + \frac{\tau}{r\varrho}\right)\Delta s^3 + \cdots$$

Die Zahl τ wird daher durch die Gleichung bestimmt:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds} + \frac{\tau}{r\varrho}\right) - \frac{1}{12\varrho^2}\Delta s + \cdots = 0.$$

Gehen wir mit Δs zur Null über, so gelangt unsere Kugel in eine Grenzlage, in der sie die zu s gehörende Schmiegungskugel genannt wird. Die Zahl τ erhält dann den Wert $-r\frac{d\varrho}{ds}$ und die Gleichung der Schmiegungskugel wird:

$$\sum\left(x - g_1 - l\varrho + \lambda r\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 = \varrho^2 + r^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2.$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\frac{\varrho}{r} + \frac{dr}{ds}\frac{d\varrho}{ds} + r\frac{d^2\varrho}{ds^2} = -p$$

und erhalten für die Bogenlänge s_2 der Mittelpunktskurve der Schmiegungskugeln:

$$\frac{ds_2}{ds} = p,$$

wenn s_2 mit s wachsen soll oder nicht, je nachdem $p \gtrless 0$. Die Richtungskosinus der Tangente der Mittelpunktskurve werden dann λ, μ, ν. Ist ε gleich $+1$ oder gleich -1, je nachdem $rp \gtrless 0$, so werden die Richtungskosinus der Haupt- bzw. Binormalen der Mittelpunktskurve gleich εl, εm, εn bzw. $-\varepsilon\alpha$, $-\varepsilon\beta$, $-\varepsilon\gamma$. Die erste Krümmung unserer Kurve wird gleich $\frac{\varepsilon}{rp}$, die zweite gleich $\frac{-1}{\varrho p}$.

Bemerkung. Die von den Normalebenen einer Kurve umhüllte Fläche (der Ort der Krümmungsachsen) wird die Polarfläche, ebenso die Evolute der Kurve genannt. Auch nennt man vielfach den Mittelpunkt der Schmiegungskugel den Pol, und seinen Ort die Pollinie der Kurve.

Von diesen Bezeichnungen ist das Wort Evolute am unzweckmäßigsten angewandt, da es bei einer ebenen Kurve eine Kurve bedeutet und hier eine Fläche bedeuten soll.

§ 7. Die Tangentialebenen einer Raumkurve, insbesondere ihre rektifizierenden Ebenen.

Wir legen durch die Tangente und eine Halbnormale, die in dem früher festgelegten Sinne den Winkel φ mit der positiven Hauptnormale bilde, eine Tangentialebene. Dabei soll φ als ein konstanter (von s unabhängiger) Winkel gelten, der größer wie Null sei, da sonst der bereits erledigte Fall der Schmiegungsebenen aufträte. Die Gleichung der Tangentialebene ist:

$$\Sigma(x - g_1)(\lambda \cos\varphi - l \sin\varphi) = 0,$$

während die zugrunde gelegte Halbnormale die Richtungskosinus:

$$l \cos\varphi + \lambda \sin\varphi, \quad m \cos\varphi + \mu \sin\varphi, \quad n \cos\varphi + \nu \sin\varphi$$

besitzt. Differenzieren wir die vorige Gleichung nach s, so kommt:

$$\Sigma(x - g_1)\left(\frac{l}{r} \cos\varphi + \left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{r}\right) \sin\varphi\right) = 0,$$

oder:

$$\Sigma(x - g_1)\left(\alpha \sin\varphi + \frac{\varrho}{r}(l \cos\varphi + \lambda \sin\varphi)\right) = 0.$$

Verstehen wir unter h eine beliebig zu wählende Zahl, so erhalten wir als Gleichungen der Schnittlinie:

$$x = g_1 + h\left(-\frac{\varrho}{r}\alpha + \sin\varphi(l \cos\varphi + \lambda \sin\varphi)\right), \quad \text{usw.}$$

Bei einer ebenen Kurve fällt daher die Schnittlinie mit der Normalen, die sich in der Tangentialebene befindet, zusammen.

Es liegt nahe, nach dem Ort der Schnittlinien zu fragen, die sich an ein und demselben Punkt bei veränderlichem φ ergeben.

Bei einer ebenen Kurve wird dieser Ort von der Normalebene dargestellt. Bei einer doppelt gekrümmten Kurve setzen wir:

$$\Sigma(x-g_1)\alpha = \xi, \quad \Sigma(x-g_1)l = \eta, \quad \Sigma(x-g_1)\lambda = \zeta$$

und erhalten:

$$\xi = -\frac{\varrho}{r}h, \quad \eta = \sin\varphi\cos\varphi\cdot h, \quad \zeta = \sin^2\varphi h,$$

oder:

$$\frac{\varrho}{r}(\eta^2+\zeta^2)+\zeta\xi = 0,$$

d. h. unsere Schnittlinien bilden einen Kegel zweiten Grades, der sich mit s nicht ändert, wenn $\frac{\varrho}{r}$ konstant ist.

Es ist leicht, die Gleichung dieses Kegels auf die Hauptachsen zu transformieren. Setzt man zur Abkürzung:

$$N = \sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}, \quad N_1 = \sqrt{2N^2 - 2\frac{\varrho}{r}N}, \quad N_2 = \sqrt{2N^2 + 2\frac{\varrho}{r}N}$$

und wendet die orthogonale Substitution an:

$$\xi = \frac{-\frac{\varrho}{r}+N}{N_1}u - \frac{\frac{\varrho}{r}+N}{N_2}v,$$

$$\eta = -w,$$

$$\zeta = \frac{u}{N_1}+\frac{v}{N_2},$$

so ergibt sich:

$$\frac{\varrho}{r}w^2 + \frac{N}{N_1^2}u^2 - \frac{N}{N_2^2}v^2 = 0,$$

oder:

$$\frac{\varrho}{r}w^2 + \frac{u^2}{2\left(N-\frac{\varrho}{r}\right)} - \frac{v^2}{2\left(N\mp\frac{\varrho}{r}\right)} = 0.$$

Eine Hauptachse des Kegels fällt also mit der Hauptnormalen zusammen.

Die weiteren Fragen sollen nur für die Schar der rektifizierenden Ebenen behandelt werden, so daß fortan die Voraussetzung $\varphi = \frac{\pi}{2}$ Platz greift.

Die Grenzlage der Schnittlinien einer rektifizierenden Ebene mit ihren benachbarten rektifizierenden Ebenen führt den Namen **rektifizierende Kante**; die von den rektifizierenden Kanten gebildete Fläche heißt die **rektifizierende Fläche**. Wir bezeichnen die Richtungskosinus der rektifizierenden Kante mit a, b, c und erhalten aus dem vorigen:

$$a = \frac{\lambda - \frac{\varrho}{r}\alpha}{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}, \quad b = \frac{\mu - \frac{\varrho}{r}\beta}{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}, \quad c = \frac{\nu - \frac{\varrho}{r}\gamma}{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}.$$

Die rektifizierenden Kanten sind einander parallel, oder, was dasselbe ist, die rektifizierende Fläche ist ein Zylinder, wenn $\frac{\varrho}{r}$ konstant ist. In diesem Falle bildet die Tangente der Kurve mit der Erzeugenden des Zylinders einen konstanten Winkel, dessen Kosinus gleich

$$-\frac{\frac{\varrho}{r}}{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}$$

ist, oder, wie man sagt, die gegebene Kurve ist eine isogonale Trajektorie der Erzeugenden eines Zylinders.

Wir setzen jetzt $\frac{\varrho}{r}$ als veränderlich voraus und fragen nach der Grenzlage der Schnittpunkte der rektifizierenden Kante mit den benachbarten rektifizierenden Ebenen. Für die Koordinaten der Grenzlage bestehen die Gleichungen:

$$\Sigma(x-g_1)l = 0,$$

$$\Sigma(x-g_1)\left(\alpha+\frac{\varrho}{r}\lambda\right) = 0,$$

$$\Sigma(x-g_1)\left(l\left(1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right)+\lambda\varrho\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}\right) = \varrho.$$

Die Determinante dieser Gleichungen ist gleich $-\varrho\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}$. Wir bezeichnen die Lösungsfunktionen mit x_3, y_3, z_3 und erhalten:

$$x_3 = g_1 + \frac{1}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}\left(\lambda-\frac{\varrho}{r}\alpha\right), \quad \text{usw.}$$

sowie:

$$\frac{dx_3}{ds} = -\frac{\frac{d^2\frac{\varrho}{r}}{ds^2}}{\left(\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}\right)^2}\left(\lambda-\frac{\varrho}{r}\alpha\right).$$

Die Bedingung, unter der die rektifizierende Fläche ein Kegel ist, lautet also: $\frac{d^2\frac{\varrho}{r}}{ds^2} = 0$, oder: $\frac{\varrho}{r}$ muß eine ganze lineare Funktion von s sein.

§ 8. Nähere Untersuchung des Falles, in dem die rektifizierende Fläche ein Kegel ist.

Wir setzen, unter p und q zwei Konstante verstehend:

$$\frac{\varrho}{r} = ps + q.$$

Hier muß q als von Null verschieden angesehen werden, da wir den Nullpunkt von s innerhalb eines Kurvenstücks angenommen haben, bei dem in keinem Punkt ϱ oder $\frac{1}{r}$ verschwindet. Es folgt:

$$x_3 = g_1 + \frac{\lambda - (ps+q)\alpha}{p}, \quad \text{usw.}$$

Die Koordinaten der Kegelspitze in bezug auf das begleitende Dreikant sind:

$$\xi = \frac{-(ps+q)}{p}, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \frac{1}{p}.$$

Die Spitze des Kegels hat somit von der Schmiegungsebene den konstanten Abstand $\frac{1}{p}$.

Die Richtungskosinus der Halbgeraden, die von der Kegelspitze nach den Punkten der gegebenen Kurve hin gezogen sind, nämlich:

$$\frac{g_1 - x_3}{\sqrt{\Sigma(g_1 - x_3)^2}}, \quad \text{usw.},$$

erfordern zu ihrer analytischen Darstellung die Unterscheidung zwischen einem positiven und negativen p, da die $\sqrt{\Sigma(g_1 - x_3)^2}$ eine positive Zahl darstellt. Es sei ε gleich $+1$ oder gleich -1, je nachdem p größer oder kleiner als Null ausfällt.

Die fraglichen Richtungskosinus werden dann gleich:

$$\frac{-\varepsilon(\lambda - (ps+q)\alpha)}{\sqrt{1+(ps+q)^2}}, \quad \text{usw.}$$

Wir zeigen, daß die gegebene Kurve in eine gerade Linie übergeht, wenn man den Kegel auf eine Ebene abrollt. Die einfachste Art, dies zu zeigen, ist die folgende.

Die Ebene, auf welche der Kegel abgewickelt wird, sei die zu $s = 0$ gehörende rektifizierende Ebene. Der Abstand L der Kegelspitze vom Kurvenpunkt (x, y, z) ist gleich:

$$\varepsilon \frac{\sqrt{1+(ps+q)^2}}{p},$$

für $s = 0$ ergibt sich:

$$L_0 = \varepsilon \frac{\sqrt{1+q^2}}{p}.$$

Für den Winkel ψ, welchen die vom Punkt (x_3, y_3, z_3) nach dem Punkt (x, y, z) hin gelegte Halbgerade mit der positiven Tangente bildet, erhalten wir:

$$\cos\psi = \frac{\varepsilon(ps+q)}{\sqrt{1+(ps+q)^2}},$$

also für $s = 0$:

$$\cos\psi_0 = \frac{\varepsilon q}{\sqrt{1+q^2}}.$$

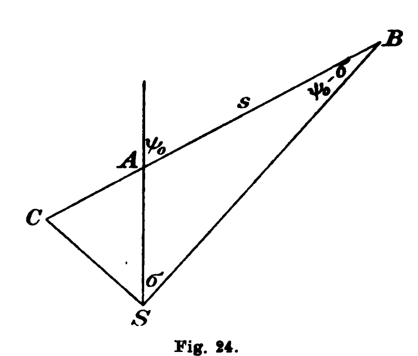


Fig. 24.

In der zu $s = 0$ gehörenden rektifizierenden Ebene werde die Kegelspitze mit S, der Kurvenpunkt mit A bezeichnet. Man ziehe nun unter dem Winkel ψ_0 gegen AS in dieser Ebene von A aus eine gerade Strecke von der Länge s, ihr Endpunkt sei B.

Dann ist:

$$\overline{SB}^2 = \frac{1+q^2}{p^2} + s^2 + 2s \cdot \frac{\varepsilon\sqrt{1+q^2}}{p} \cdot \frac{\varepsilon q}{\sqrt{1+q^2}} = L^2,$$

folglich fällt der Endpunkt des zu s gehörenden Kurvenstücks nach der Abwicklung mit B zusammen. Da aber die Länge des Kurvenstücks sich durch die Abwicklung nicht ändert und AB gleich s ist, so stellt die Gerade AB wirklich das abgewickelte Kurvenstück dar.

Weniger einfach, aber für spätere Zwecke wichtig, ist die folgende Ableitung unseres Satzes.

Wir beschreiben um die Kegelspitze eine Kugel mit dem Halbmesser Eins. Die Koordinaten der Punkte der Schnittlinie der Kugel und des Kegelmantels, der die gegebene Kurve trägt, sind dann:

$$x' = x_3 - \varepsilon\frac{\lambda - (ps+q)\alpha}{\sqrt{1+(ps+q^2)}}, \quad \text{usw.},$$

somit:

$$\frac{dx'}{ds} = \varepsilon p\frac{\alpha + (ps+q)\lambda}{(\sqrt{1+(ps+q)^2})^3}, \quad \text{usw.}$$

Nennen wir die Bogenlänge der Schnittkurve σ und lassen sie mit s wachsen, so folgt:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\varepsilon p}{1+(ps+q)^2}.$$

Der Nullpunkt der Bogenlänge σ soll auf derjenigen Erzeugenden des Kegels angenommen werden, auf der der Nullpunkt der Bogenlänge s liegt; dann ergibt sich:

$$\sigma = \varepsilon\left(\operatorname{arctg}(ps+q) - \operatorname{arctg} q\right).$$

Da aber:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi_0\right) = \frac{\varepsilon q}{\sqrt{1+q^2}},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi_0\right) = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}},$$

so hat man:

$$\varepsilon \operatorname{arctg} q = \frac{\pi}{2} - \psi_0.$$

Die Gleichung für σ liefert daher:

$$ps + q = \varepsilon \operatorname{tg}\left(\sigma - \psi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \varepsilon \operatorname{cotg}(\psi_0 - \sigma),$$

folglich:

$$L^2 = \frac{1}{p^2 \sin^2(\psi_0 - \sigma)}.$$

Solange $\sigma < \psi_0$, haben wir also:

$$L \sin(\psi_0 - \sigma) = \frac{\varepsilon}{p}.$$

Legen wir nun durch die Punkte A und B eine Gerade und fällen von S aus auf sie das Lot SC, so ist, wie man auch σ innerhalb der Grenzen 0 und ψ_0 wählen möge, stets SC gleich $\frac{\varepsilon}{p}$, d. h. der Punkt B beschreibt bei der Abwicklung eine gerade Strecke.

Es bleibe nicht unerwähnt, daß der Punkt, an dem L seinen kleinsten Wert besitzt $\left(s = -\frac{q}{p}\right)$, ein außergewöhnlicher Punkt ist, da an ihm $\frac{\varrho}{r}$ verschwindet. Der Winkel ψ hat hier die Maßzahl $\frac{\pi}{2}$.

§ 9. Einfach unendliche Schar von Geraden.

So wie wir im Vorigen die mit einer einfach unendlichen Schar von Ebenen zusammenhängenden Begriffe für die Lehre von den Raumkurven fruchtbar gemacht haben, führen wir jetzt das Entsprechende mit den Begriffen aus, die sich bei der Untersuchung einer einfach unendlichen Schar von Geraden oder, wie man sagt, einer geradlinigen Fläche ergeben.

Zu diesem Zweck seien durch die Punkte einer Raumkurve $\left(x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t)\right)$ gerade Linien mit den Richtungskosinus $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$ oder kürzer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gezogen, deren Richtungen sich stetig ändern. Bezeichnen wir mit h eine beliebig zu wählende Zahl, so werden die Koordinaten der Punkte der zu t gehörenden Geraden durch die Gleichungen gegeben:

$$x = f_1 + h\lambda_1, \quad y = f_2 + h\lambda_2, \quad z = f_3 + h\lambda_3.$$

Außer dieser Geraden betrachten wir die zu $t + \Delta t$ gehörende, deren Richtungskosinus mit $\lambda_1 + \Delta\lambda_1$, $\lambda_2 + \Delta\lambda_2$, $\lambda_3 + \Delta\lambda_3$ bezeichnet

seien, und berechnen zunächst die Richtungskosinus der zu ihnen beiden senkrechten Richtung, sowie Lage und Größe ihres kürzesten Abstandes. Die fraglichen Richtungskosinus seien mit k_1, k_2, k_3 bezeichnet. Aus den Gleichungen:

$$\Sigma k_1 \lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma k_1 (\lambda_1 + \varDelta \lambda_1) = 0$$

ergibt sich:

$$k_1 = \frac{\lambda_2 \varDelta \lambda_3 - \lambda_3 \varDelta \lambda_2}{\sqrt{\Sigma \varDelta \lambda_1{}^2 - (\Sigma \lambda_1 \varDelta \lambda_1)^2}}, \quad \text{usw.},$$

wenn eine der S. 190 angewandten entsprechende Bestimmungweise benutzt wird.

Der zu t gehörende Kurvenpunkt ($x = f_1, \ldots$) werde A, der zu $t + \varDelta t$ gehörende ($x = f_1 + \varDelta f_1, \cdots$) werde B genannt; A_1 sei der in der zu t gehörenden Geraden, B_1 der in der zu $t + \varDelta t$ gehörenden Geraden gelegene Endpunkt des kürzesten Abstands der beiden Geraden. Da die Strecke $A_1 B_1$ auf beiden Geraden senkrecht steht, besitzt die von A_1 nach B_1 hin gezogene Halbgerade entweder die Richtungskosinus k_1, k_2, k_3 oder $-k_1$, $-k_2$, $-k_3$. Im ersten dieser beiden Fälle betrachten wir die Maßzahl e des kürzesten Abstands als positiv, im zweiten als negativ.

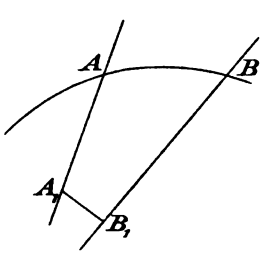


Fig. 25.

Gehen wir von A aus über A_1 zum Punkte B_1, so werden die Koordinaten von B_1 gleich:

$$f_1 + h\lambda_1 + ek_1, \quad f_2 + h\lambda_2 + ek_2, \quad f_3 + h\lambda_3 + ek_3;$$

gehen wir von B aus zum Punkte B_1, so werden seine Koordinaten:

$$f_1 + \varDelta f_1 + h'(\lambda_1 + \varDelta \lambda_1), \quad f_2 + \varDelta f_2 + h'(\lambda_2 + \varDelta \lambda_2), \quad f_3 + \varDelta f_3 + h'(\lambda_3 + \varDelta \lambda_3);$$

wir erhalten somit die Gleichungen:

$$\begin{aligned} h\lambda_1 + ek_1 &= \varDelta f_1 + h'(\lambda_1 + \varDelta \lambda_1), \\ h\lambda_2 + ek_2 &= \varDelta f_2 + h'(\lambda_2 + \varDelta \lambda_2), \\ h\lambda_3 + ek_3 &= \varDelta f_3 + h'(\lambda_3 + \varDelta \lambda_3). \end{aligned}$$

Um e zu bestimmen, multiplizieren wir die drei Gleichungen der Reihe nach mit k_1, k_2, k_3, addieren sie und erhalten:

$$e = \varDelta f_1 \cdot k_1 + \varDelta f_2 \cdot k_2 + \varDelta f_3 \cdot k_3.$$

Um h zu erhalten, multiplizieren wir entsprechend zunächst mit λ_1, λ_2, λ_3, sodann mit $\lambda_1 + \varDelta \lambda_1$, $\lambda_2 + \varDelta \lambda_2$, $\lambda_3 + \varDelta \lambda_3$ und addieren jedesmal. Dann folgt:

$$\begin{aligned} h &= \Sigma \varDelta f_1 \lambda_1 + h'(1 + \Sigma \lambda_1 \varDelta \lambda_1), \\ h(1 + \Sigma \lambda_1 \varDelta \lambda_1) &= \Sigma \varDelta f_1 (\lambda_1 + \varDelta \lambda_1) + h', \end{aligned}$$

so daß:

$$h = \frac{\Sigma\varDelta f_1\,\varDelta\lambda_1(1+\Sigma\lambda_1\,\varDelta\lambda_1)+\Sigma\varDelta f_1\,\lambda_1\,\Sigma\lambda_1\,\varDelta\lambda_1}{2\,\Sigma\lambda_1\,\varDelta\lambda_1+(\Sigma\lambda_1\,\varDelta\lambda_1)^2}.$$

Unsere Aufgabe ist es, sowohl e wie h nach Potenzen von $\varDelta t$ zu entwickeln. Fassen wir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als die Koordinaten der Punkte einer sphärischen Kurve auf $(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1)$, so soll der zu t gehörende Punkt dieser Kurve ein gewöhnlicher sein, also $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ sollen nicht zugleich verschwinden.

Da

$$\Sigma\lambda_1\frac{d\lambda_1}{dt}=0,$$

so ergibt sich:

$$\Sigma\lambda_1\frac{d^2\lambda_1}{dt^2}=-\sum\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2 \quad\text{und}\quad \Sigma\lambda_1\,\varDelta\lambda_1=-\tfrac{1}{2}\sum\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2\cdot\varDelta t^2+\cdots$$

Im Zähler und Nenner von h hebt sich $\varDelta t^2$ fort. Gehen wir dann mit $\varDelta t$ zur Grenze Null über, so folgt:

$$h=-\frac{\sum\frac{df_1}{dt}\,\frac{d\lambda_1}{dt}}{\sum\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2}.$$

Wir nennen diesen Wert von h die **Abszisse des kürzesten Abstands unendlich benachbarter Geraden auf unserer Fläche.**

Um die Entwicklung von e zu erhalten, nehmen wir:

$$\lambda_2\varDelta\lambda_3-\lambda_3\varDelta\lambda_2=\lambda_{23}^{(1)}\varDelta t+\frac{1}{2}\lambda_{23}^{(2)}\varDelta t^2+\frac{1}{6}\lambda_{23}^{(3)}\varDelta t^3+\cdots$$

Hier ist:

$$\lambda_{23}^{(1)}=\lambda_2\frac{d\lambda_3}{dt}-\lambda_3\frac{d\lambda_2}{dt},$$

$$\lambda_{23}^{(2)}=\lambda_2\frac{d^2\lambda_3}{dt^2}-\lambda_3\frac{d^2\lambda_2}{dt^2}=\frac{d\lambda_{23}^{(1)}}{dt},$$

$$\lambda_{23}^{(3)}=\frac{d^2\lambda_{23}^{(1)}}{dt^2}-\frac{d\lambda_2}{dt}\,\frac{d^2\lambda_3}{dt^2}+\frac{d\lambda_3}{dt}\,\frac{d^2\lambda_2}{dt^2}.$$

Wir erhalten weiter:

$$\Sigma\varDelta f_1(\lambda_2\varDelta\lambda_3-\lambda_3\varDelta\lambda_2)=\varDelta t^2\left\{\Sigma f_1'\lambda_{23}^{(1)}+\frac{1}{2}\left(\Sigma f_1'\lambda_{23}^{(2)}+\Sigma f_1''\lambda_{23}^{(1)}\right)\varDelta t+\cdots\right\},$$

oder wenn wir

$$\Sigma f_1'\lambda_{23}^{(1)}=k$$

setzen:

$$\Sigma\varDelta f_1(\lambda_2\varDelta\lambda_3-\lambda_3\varDelta\lambda_2)=\varDelta t^2\left\{k+\frac{1}{2}\frac{dk}{dt}\varDelta t+\cdots\right\},$$

wo aber, wohlverstanden, der Koeffizient von Δt^2 in der Klammer nicht gleich $\frac{1}{6}\frac{d^2k}{dt^2}$ ist.

Ferner:

$$\Sigma(\Delta\lambda_1)^2 = \sum\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2\Delta t^2 + \sum\frac{d\lambda_1}{dt}\frac{d^2\lambda_1}{dt^2}\Delta t^3 + \cdots,$$

$$\Sigma\lambda_1\Delta\lambda_1 = \frac{1}{2}\Sigma\lambda_1\frac{d^2\lambda_1}{dt^2}\Delta t^2 + \cdots,$$

$$\{\Sigma(\Delta\lambda_1)^2 - (\Sigma\lambda_1\Delta\lambda_1)^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\Delta t\sqrt{\sum\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2}}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{\sum\frac{d\lambda_1}{dt}\frac{d^2\lambda_1}{dt^2}}{\sum\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2}\Delta t + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left\{\frac{1}{\sqrt{\sum\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2}} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{\sum\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2}}\Delta t + \cdots\right\},$$

folglich:

$$e = \frac{k}{\sqrt{\sum\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2}}\Delta t + \frac{1}{2}\left(k\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{\sum\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\sum\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2}}\frac{dk}{dt}\right)\Delta t^2 + \cdots$$

Wir sehen, daß die Entwicklung von e, wenn k beständig Null ist, mit der dritten Potenz von Δt beginnt.

Das Verschwinden von k hat eine einfache geometrische Bedeutung. Wir fanden, daß der in der zu t gehörenden Geraden liegende Endpunkt des kürzesten Abstands der zu t und $t + \Delta t$ gehörenden Geraden für $\Delta t = 0$ in den Punkt übergeht, dessen Koordinaten

$$x = f_1 - \lambda_1\frac{\Sigma f_1'\lambda_1'}{\Sigma(\lambda_1')^2},$$

$$y = f_2 - \lambda_2\frac{\Sigma f_1'\lambda_1'}{\Sigma(\lambda_1')^2},$$

$$z = f_3 - \lambda_3\frac{\Sigma f_1'\lambda_1'}{\Sigma(\lambda_1')^2}$$

sind. Dieser Punkt beschreibt, wenn t sich ändert, eine Kurve, die man die Wendekante, auch Gratlinie, Striktionslinie, Rückkehrkante der geradlinigen Fläche nennt.

Wir zeigen, daß bei verschwindendem k die Geraden auf der Fläche zugleich die Tangenten ihrer Wendekante sind.

Das Verschwinden von k, d. h. die Gleichung:

$$f_1'\left(\lambda_2\frac{d\lambda_3}{dt} - \lambda_3\frac{d\lambda_2}{dt}\right) + f_2'\left(\lambda_3\frac{d\lambda_1}{dt} - \lambda_1\frac{d\lambda_3}{dt}\right) + f_3'\left(\lambda_1\frac{d\lambda_2}{dt} - \lambda_2\frac{d\lambda_1}{dt}\right) = 0$$

bedeutet geometrisch, daß die Tangente der gegebenen Kurve auf der Geraden mit den Richtungskosinus:

$$\frac{\lambda_2 \frac{d\lambda_3}{dt} - \lambda_3 \frac{d\lambda_2}{dt}}{\sqrt{\sum\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2}}, \quad \text{usw.}$$

senkrecht steht. Daraus folgt, daß Beziehungen von der Form:

$$f_1' = p\lambda_1 + q\frac{d\lambda_1}{dt}, \quad f_2' = p\lambda_2 + q\frac{d\lambda_2}{dt}, \quad f_3' = p\lambda_3 + q\frac{d\lambda_3}{dt}$$

bestehen müssen. Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, sodann mit $\frac{d\lambda_1}{dt}, \frac{d\lambda_2}{dt}, \frac{d\lambda_3}{dt}$ und addieren jedesmal, so folgt:

$$p = \Sigma f_1'\lambda_1, \quad q = \frac{\Sigma f_1'\lambda_1'}{\Sigma(\lambda_1')^2},$$

also:

$$f_1' - \lambda_1'\frac{\Sigma f_1'\lambda_1'}{\Sigma(\lambda_1')^2} = \lambda_1 \Sigma f_1'\lambda_1, \quad \text{usw.}$$

Dies zeigt unmittelbar, daß die Ableitungen $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ proportional den Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind, falls nicht der Proportionalitätsfaktor, nämlich:

$$\Sigma f_1'\lambda_1 - \frac{d}{dt}\frac{\Sigma f_1'\lambda_1'}{\Sigma(\lambda_1')^2},$$

verschwindet, in welchem Fall die geradlinige Fläche einen Kegel darstellt.

Man kann dies letztere auch folgendermaßen zeigen.

Soll der Punkt mit den Koordinaten:

$$f_1 + g(t)\lambda_1, \quad f_2 + g(t)\lambda_2, \quad f_3 + g(t)\lambda_3$$

fest bleiben, wenn t sich ändert, so müssen die Beziehungen bestehen:

$$f_1' + g'\lambda_1 + g\lambda_1' = 0, \quad f_2' + g'\lambda_2 + g\lambda_2' = 0, \quad f_3' + g'\lambda_3 + g\lambda_3' = 0.$$

Daraus folgt:

$$\Sigma f_1'\lambda_1 + g' = 0, \quad \Sigma f_1'\lambda_1' + g\Sigma(\lambda_1')^2 = 0,$$

somit in Gemäßheit mit dem obigen:

$$\Sigma f_1'\lambda_1 - \frac{d}{dt}\frac{\Sigma f_1'\lambda_1'}{\Sigma(\lambda_1')^2} = 0.$$

Die geradlinigen Flächen zerfallen also in zwei Klassen, für die eine von ihnen ist $k = 0$, für die andere ist k im allgemeinen von Null verschieden. Die erstere umfaßt die sogenannten abwickelbaren Flächen — Zylinder, Kegel und die Tangentenflächen von Raumkurven —, die Flächen der zweiten Klasse werden häufig *windschiefe Flächen* genannt.

Für die praktische Berechnung von k ist die Bemerkung wichtig, daß bei $\lambda_1 = p\mu_1$, $\lambda_2 = p\mu_2$, $\lambda_3 = p\mu_3$ für k der Ausdruck $p^2 \Sigma f_1'$ $(\mu_2 \mu_3' - \mu_3 \mu_2')$ erscheint. In der Gleichung $k = 0$ darf man also die Funktionen λ_1, λ_2, λ_3 durch ihnen proportionale Funktionen ersetzen.

Man kennzeichnet vielfach das Verschwinden von k durch die Aussage, daß sich unendlich benachbarte Gerade der Fläche schneiden. Soll dies nur ausdrücken, daß die Reihe für e hier mit der dritten Potenz von Δt beginnt, also e selbst, wie man sagt, mit Δt von der dritten Ordnung unendlich klein wird, so leuchtet die Berechtigung dieser Ausdrucksweise nicht ein. Anders verhält es sich, wenn wir noch auf jeder Geraden der Fläche einen weiteren Punkt folgendermaßen bestimmen.

Wir projizieren die zu $t + \Delta t$ gehörende Gerade (L_1) senkrecht auf die Ebene (E), welche die zu t gehörende Gerade (L) und den zu $t + \Delta t$ gehörenden Kurvenpunkt (B) enthält.

Der zu t gehörende Kurvenpunkt soll mit A bezeichnet werden, die Projektion mit (L_2). Da die Richtung der Geraden (L_1) mit abnehmendem absoluten Betrage von Δt beliebig wenig von der Richtung der Geraden (L) abweicht, darf angenommen werden, daß (L_1) nicht zu (L) senkrecht ist.

Es fragt sich weiter, wann die Projektion (L_2) zu (L) parallel liegt. Fällen wir von (B) aus auf die Gerade (L) das Lot (BC), so wird (L_2) parallel (L), wenn (L_1) senkrecht zu CB ist. Dann bedeutet CB den kürzesten Abstand beider Geraden und die Maßzahl von AC wird gleich h. Anderseits ist diese Maßzahl, da jetzt h' verschwindet, gleich $\Sigma \lambda_1 \Delta f_1$. Soll aber der oben für h gefundene Ausdruck gleich $\Sigma \lambda_1 \Delta f_1$ werden, so muß die Bedingung:

$$\Sigma \lambda_1 \Delta f_1 \cdot \Sigma \lambda_1 \Delta \lambda_1 - \Sigma \Delta \lambda_1 \Delta f_1 = 0$$

erfüllt sein, oder in entwickelter Form:

$$\Sigma \lambda_1' f_1' + \frac{1}{2}\left\{\Sigma \lambda_1' f_1'' + \Sigma \lambda_1'' f_1' - \Sigma \lambda_1 f_1' \Sigma \lambda_1 \lambda_1''\right\} \Delta t + \cdots = 0.$$

Beim Übergang zu $\Delta t = 0$ nimmt unsere Bedingung die Gestalt an:

$$\Sigma \lambda_1' f_1' = 0 \quad \text{oder} \quad h = 0.$$

Die Grenzlage des Punktes (C) fällt also in den Punkt (A). Ist die Bedingung $\Sigma \lambda_1' f_1' = 0$ beständig erfüllt, so fällt die gegebene Kurve mit der Wendekante der geradlinigen Fläche zusammen.

Wir schließen jetzt den Fall, daß (L_2) zu (L) parallel ist, aus und bestimmen den Punkt, in welchem (L) von (L_2) geschnitten wird.

Die Koordinaten eines Punktes einer Geraden, die senkrecht zur Ebene (E) durch einen Punkt der Geraden (L_1) gelegt ist, sind:

$$f_1 + \Delta f_1 + h_2 (\lambda_1 + \Delta \lambda_1) + h_3 (\lambda_2 \Delta f_3 - \lambda_3 \Delta f_2), \quad \text{usw.}$$

Die Bedingung dafür, daß dieser Punkt in der zu t gehörenden Geraden liegt, wird somit von den drei Gleichungen dargestellt:

$$\begin{aligned}
\Delta f_1 + h_2(\lambda_1 + \Delta\lambda_1) + h_3(\lambda_2\Delta f_3 - \lambda_3\Delta f_2) &= h_1\lambda_1,\\
\Delta f_2 + h_2(\lambda_2 + \Delta\lambda_2) + h_3(\lambda_3\Delta f_1 - \lambda_1\Delta f_3) &= h_1\lambda_2,\\
\Delta f_3 + h_2(\lambda_3 + \Delta\lambda_3) + h_3(\lambda_1\Delta f_2 - \lambda_2\Delta f_1) &= h_1\lambda_3.
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen der Reihe nach mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dann mit $\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3$ und addieren sie jedesmal. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
&\Sigma\lambda_1\Delta f_1 + h_2(1 + \Sigma\lambda_1\Delta\lambda_1) = h_1,\\
&\Sigma(\Delta f_1)^2 + h_2(\Sigma\lambda_1\Delta f_1 + \Sigma\Delta\lambda_1\Delta f_1) = h_1\Sigma\lambda_1\Delta f_1.
\end{aligned}$$

Die Elimination von h_2 liefert:

$$\begin{aligned}
&h_1(\Sigma\Delta f_1\Delta\lambda_1 - \Sigma\lambda_1\Delta f_1\Sigma\lambda_1\Delta\lambda_1)\\
&= \Sigma\lambda_1\Delta f_1(\Sigma\lambda_1\Delta f_1 + \Sigma\Delta\lambda_1\Delta f_1) - \Sigma(\Delta f_1)^2(1 + \Sigma\lambda_1\Delta\lambda_1).
\end{aligned}$$

Der Koeffizient von Δt^2 ist hier links $h_1\Sigma f_1'\lambda_1'$ und rechts:

$$(\Sigma\lambda_1 f_1')^2 - \Sigma(f_1')^2.$$

Daher folgt beim Grenzübergang zu $\Delta t = 0$:

$$h_1 = \frac{(\Sigma\lambda_1 f_1')^2 - \Sigma(f_1')^2}{\Sigma f_1'\lambda_1'}.$$

Es ist geometrisch klar, daß bei von Null verschiedenem Δt die Geraden (L) und (L_1) sich schneiden, wenn die Werte von h und h_1 einander gleich sind. Wir können daher auch im Grenzfall $\Delta t = 0$ die Gleichheit der Werte von h und h_1 als Bedingung dafür ansehen, daß die Gerade (L) von der Geraden (L_1) geschnitten wird. Nun ist bei $\Delta t = 0$:

$$h - h_1 = \frac{\Sigma(\lambda_1')^2\{\Sigma(f_1')^2 - (\Sigma\lambda_1 f_1')^2\} - (\Sigma f_1'\lambda_1')^2}{\Sigma(\lambda_1')^2\cdot\Sigma f_1'\lambda_1'}.$$

Aber:

$$\Sigma(f_1')^2 - (\Sigma\lambda_1 f_1')^2 = \Sigma(f_1')^2\Sigma\lambda_1^2 - (\Sigma\lambda_1 f_1')^2 = \Sigma(\lambda_2 f_3' - \lambda_3 f_2')^2,$$

ferner:

$$\begin{aligned}
&\Sigma(\lambda_1')^2\Sigma(\lambda_2 f_3' - \lambda_3 f_2')^2 - \big(\Sigma\lambda_1'(\lambda_3 f_2' - \lambda_2 f_3')\big)^2\\
&= \Sigma\{\lambda_2'(\lambda_1 f_2' - f_1'\lambda_2) - \lambda_3'(\lambda_3 f_1' - f_3'\lambda_1)\}^2.
\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}
\lambda_2'(\lambda_1 f_2' - f_1'\lambda_2) - \lambda_3'(\lambda_3 f_1' - f_3'\lambda_1) &= \lambda_1(\lambda_2' f_2' + \lambda_3' f_3') - f_1'(\lambda_2\lambda_2' + \lambda_3\lambda_3')\\
&= \lambda_1\Sigma\lambda_1' f_1'
\end{aligned}$$

und

$$\Sigma\lambda_1'(\lambda_3 f_2' - \lambda_2 f_3') = k,$$

so erhalten wir:

$$h - h_1 = \frac{k^2}{\Sigma(\lambda_1')^2 \Sigma f_1' \lambda_1'}.$$

Die Gleichung $k = 0$ drückt also die gesuchte Bedingung des Schneidens aus.

§ 10. Anwendung des vorigen auf die für eine Raumkurve charakteristischen Geraden.

Indem wir dazu übergehen, die bei einer einfach unendlichen Schar von Geraden entwickelten Begriffe für die mit einer Raumkurve in Verbindung stehenden Geraden fruchtbar zu machen, ersetzen wir die Veränderliche t durch die Bogenlänge s der Raumkurve und verstehen fortan unter k_1, k_2, k_3, h und h_1 nur die Werte dieser Zahlen im Grenzfall $\Delta s = 0$, so daß:

$$k_1 = \frac{\lambda_2\lambda_3' - \lambda_2'\lambda_3}{\sqrt{\Sigma(\lambda_1')^2}}, \quad k_2 = \frac{\lambda_3\lambda_1' - \lambda_1\lambda_3'}{\sqrt{\Sigma(\lambda_1')^2}}, \qquad k_3 = \frac{\lambda_1\lambda_2' - \lambda_2\lambda_1'}{\sqrt{\Sigma(\lambda_1')^2}},$$

$$h = -\frac{\Sigma f_1'\lambda_1'}{\Sigma(\lambda_1')^2}, \quad h_1 = \frac{(\Sigma\lambda_1 f_1')^2 - \Sigma(f_1')^2}{\Sigma\lambda_1' f_1'}, \quad k = \Sigma f_1'(\lambda_2\lambda_3' - \lambda_3\lambda_2').$$

1. Die Tangenten einer Raumkurve bilden eine abwickelbare Fläche, deren Gratlinie die Kurve selbst ist; denn für $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = \beta$, $\lambda_3 = \gamma$ folgt:

$$k = 0, \quad h = 0.$$

2. Die Binormalen einer Raumkurve bilden eine windschiefe Fläche, deren Wendekante die Kurve selbst ist; denn für $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \mu$, $\lambda_3 = \nu$ folgt:

$$k_1 = -\alpha, \quad k_2 = -\beta, \quad k_3 = -\gamma,$$
$$h = 0, \qquad k = -\frac{1}{r}.$$

3. Für die Hauptnormalen haben wir $\lambda_1 = l$, $\lambda_2 = m$, $\lambda_3 = n$ zu setzen und erhalten:

$$k_1 = \frac{\lambda - \frac{\varrho}{r}\alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}} = a, \quad k_2 = b, \quad k_3 = c,$$

$$h = \frac{\frac{1}{\varrho}}{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}, \qquad h_1 = \varrho, \quad k = -\frac{1}{r}.$$

Die Hauptnormalen bilden eine windschiefe Fläche; die Tangenten ihrer Wendekante sind den rektifizierenden

Kanten der Raumkurve parallel. Der Ort der Projektionspunkte (h_1) fällt mit dem Ort der Mittelpunkte der ersten Krümmung der Raumkurve zusammen.

4. Für die Krümmungsachsen ist zu setzen:

$$f_1 = g_1 + \varrho l, \quad f_2 = g_2 + \varrho m, \quad f_3 = g_3 + \varrho n,$$
$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \mu, \quad \lambda_3 = \nu.$$

Man erhält hier:

$$k = 0, \quad h = -r\frac{d\varrho}{ds}, \quad \Sigma f_1'\lambda_1 - \frac{d}{dt}\frac{\Sigma f_1'\lambda_1'}{\Sigma(\lambda_1')^2} = -\frac{\varrho}{r} - \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\varrho}{ds}\right).$$

Die Krümmungsachsen bilden eine abwickelbare Fläche, die einen Kegel darstellt, falls:

$$\varrho + r\frac{d\varrho}{ds}\frac{dr}{ds} + r^2\frac{d^2\varrho}{ds^2} = 0.$$

5. Für die rektifizierenden Kanten ist zu setzen:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda - \frac{\varrho}{r}\alpha}{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}} = a, \quad \text{usw.}$$

Hier wird:

$$\frac{da}{ds} = -\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}\frac{\alpha + \frac{\varrho}{r}\lambda}{\left(\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}\right)^3}, \quad b\frac{dc}{ds} - c\frac{db}{ds} = \frac{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}l.$$

Schließen wir den Fall $\frac{\varrho}{r} = \text{const.}$, in welchem die rektifizierenden Kanten einen Zylinder bilden, aus, so folgt:

$$h = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}, \quad k = 0, \quad \Sigma f_1'\lambda_1 - \frac{d}{dt}\frac{\Sigma f_1'\lambda_1'}{\Sigma(\lambda_1')^2} = \frac{-\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}\,\frac{d^2\frac{\varrho}{r}}{ds^2}}{\left(\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}\right)^2}.$$

Die rektifizierenden Kanten bilden eine abwickelbare Fläche, die einen Kegel darstellt, falls:

$$\frac{d^2\frac{\varrho}{r}}{ds^2} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\varrho}{r} = ps + q.$$

6. Wann beschreibt eine, die Hauptnormale schneidende Parallele zur rektifizierenden Kante eine abwickelbare Fläche?

Wir haben hier:

$$f_1 = g_1 + \tau l, \quad f_2 = g_2 + \tau m, \quad f_3 = g_3 + \tau n$$

zu setzen und τ als eine Funktion von s anzusehen.

Da:

$$f_1' = \left(1 - \frac{\tau}{\varrho}\right)\alpha - \frac{\tau}{r}\lambda + \frac{d\tau}{ds}l,$$

so wird:

$$k = \frac{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}\frac{d\tau}{ds}}{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}.$$

Die Parallele muß also konstanten Abstand von der rektifizierenden Kante besitzen, wenn die rektifizierende Fläche kein Zylinder ist. Dieses Ergebnis fand H. Laurent (Annales scient. de l'École normale sup. Zweite Serie Bd. 1, 1872, S. 219).

Man kann leicht einen Schritt weiter gehen und nach dem Ort der Gratlinien der sich bei veränderlichem τ ergebenden abwickelbaren Flächen fragen. Wir erhalten:

$$h = \frac{\left\{1 - \frac{\tau}{\varrho}\left(1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right)\right\}\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}},$$

somit sind die Koordinaten des zu s gehörenden Punktes der Gratlinie:

$$x = g_1 + \tau l + \frac{\left\{1 - \frac{\tau}{\varrho}\left(1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right)\right\}\left\{\lambda - \frac{\varrho}{r}\alpha\right\}}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}$$

$$= g_1 + \frac{\lambda - \frac{\varrho}{r}\alpha}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}} + \tau\left\{l - \frac{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}{\varrho\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}\left(\lambda - \frac{\varrho}{r}\alpha\right)\right\}, \quad \text{usw.}$$

Die von τ freien Glieder in den Ausdrücken für x, y, z sind die Koordinaten des zu s gehörenden Punktes der Gratlinie der rektifizierenden Fläche. Fassen wir jetzt τ als veränderlich auf, so werden x, y, z die Koordinaten der Punkte einer geradlinigen Fläche, die einen Kegel darstellt, wenn die rektifizierende Fläche ein Kegel ist. Wir wollen zeigen, daß diese geradlinige Fläche stets abwickelbar ist.

Zu diesem Zweck sei zur Abkürzung:

$$\frac{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}{\varrho\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}} = \delta,$$

$$\mu_1 = l - \delta\left(\lambda - \frac{\varrho}{r}\alpha\right), \quad \mu_2 = m - \delta\left(\mu - \frac{\varrho}{r}\beta\right), \quad \mu_3 = n - \delta\left(\nu - \frac{\varrho}{r}\gamma\right)$$

gesetzt. Dann ergibt sich:

$$\frac{d\mu_1}{ds} = -\left(\frac{1}{r} + \frac{d\delta}{ds}\right)\left(\lambda - \frac{\varrho}{r}\alpha\right),$$

$$\mu_2\mu_3' - \mu_3\mu_2' = -\left(\alpha + \frac{\varrho}{r}\lambda\right)\left\{\frac{1}{r} + \frac{d\delta}{ds}\right\}.$$

Die Bedingung der Abwickelbarkeit, nämlich $\Sigma f_1'(\mu_2\mu_3' - \mu_3\mu_2') = 0$, ist also erfüllt. Im Falle $\frac{1}{r} + \frac{d\delta}{ds} = 0$ ist die abwickelbare Fläche ein Zylinder, weil hier λ_1, λ_2, λ_3 konstant sind; es ergibt sich nämlich:

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = -\frac{\left\{l\delta\left(1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right)+\lambda - \frac{\varrho}{r}\alpha\right\}\left\{\frac{1}{r}+\frac{d\delta}{ds}\right\}}{\left(\sqrt{1+\delta^2\left(1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right)}\right)^3}.$$

Man zeigt leicht, daß unsere Fläche von den Ebenen umhüllt wird, welche die Hauptnormale und die rektifizierende Kante enthalten, also von den Ebenen, deren Gleichung:

$$\Sigma(x - g_1)\left(\alpha + \frac{\varrho}{r}\lambda\right) = 0$$

ist. Eine nähere, durch Beispiele erläuterte Untersuchung dieses Gegenstandes wäre wünschenswert.

7. Unter einer Normalenfläche einer Raumkurve wollen wir eine geradlinige Fläche verstehen, deren Erzeugende die Raumkurve senkrecht schneiden. Wann ist nun eine Normalenfläche abwickelbar?

Für eine Normalenfläche haben wir:

$$f_1(t) = g_1(s), \quad f_2(t) = g_2(s), \quad f_3(t) = g_3(s),$$

$$\lambda_1 = l\cos\varphi + \lambda\sin\varphi, \quad \lambda_2 = m\cos\varphi + \mu\sin\varphi, \quad \lambda_3 = n\cos\varphi + \nu\sin\varphi,$$

wo φ einen mit s veränderlichen Winkel bedeutet.

Wir erhalten:

$$\lambda_1' = -\frac{\alpha}{\varrho}\cos\varphi + (l\sin\varphi - \lambda\cos\varphi)\left(\frac{1}{r} - \frac{d\varphi}{ds}\right),$$

$$f_2'\lambda_3 - f_3'\lambda_2 = \lambda\cos\varphi - l\sin\varphi,$$

$$k = \Sigma\lambda_1'(f_2'\lambda_3 - f_3'\lambda_2) = \frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}.$$

Als Bedingung der Abwickelbarkeit erscheint die Beziehung:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r}, \quad \text{d. h.} \quad \varphi = \int_0^s \frac{ds}{r} + \text{const.}$$

Wir bezeichnen das hier auftretende Integral mit φ_0, die Konstante mit ε. Es gibt also den Werten von ε entsprechend einfach unendlich viele abwickelbare Normalenflächen.

Für h ergibt sich die Gleichung:

$$h = \frac{\varrho}{\cos(\varphi_0 + \varepsilon)};$$

die Gratlinien unserer abwickelbaren Flächen liegen also sämtlich auf der Polarfläche. Die Koordinaten der Punkte einer Gratlinie sind:

$$x = g_1 + l\varrho + \lambda\varrho \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{usw.}$$

Da wird:

$$\frac{dx}{ds} = (l \cos\varphi + \lambda \sin\varphi) \frac{d \frac{\varrho}{\cos\varphi}}{ds}, \quad \text{usw.},$$

wo unter φ der Wert $\varphi_0 + \varepsilon$ verstanden ist. Bezeichnen wir die Bogenlänge der Gratlinie mit σ, so erhalten wir:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{dh}{ds},$$

und der absolute Wert der zwei hinreichend nahe Punkte der Gratlinie verbindenden Bogenlänge (AB) ist gleich dem absoluten Betrag der Differenz der zu den Punkten gehörenden h-Werte. Legt man einen Faden von der Länge $AB + h$ so, daß sein krummliniger Teil den Bogen AB der Gratlinie bedeckt, während sein geradliniger Teil in die Strecke h der in B berührenden Tangente fällt, so kann man durch Abwickelung des Fadens ein Stück der gegebenen Raumkurve beschreiben. Man nennt deshalb die gefundenen Gratlinien auch Filarevoluten der gegebenen Raumkurve.

Alles dieses gilt auch für ebene Kurven, wo φ_0 den Wert Null erhält. Hier liegen die Filarevoluten auf dem Zylinder, der die Ebene der Kurve in der Evolute der Kurve senkrecht schneidet.

8. In Nr. 3 haben wir ϱ durch Anwendung der für h_1 aufgestellten Differentialformel erhalten, also ohne Benutzung des Begriffs des Krümmungshalbmessers einer ebenen Kurve. Wir können Ähnliches für den Halbmesser der zweiten Krümmung leisten.

Stellt man die Binormale durch die Gleichungen:

$$f_1 = g_1 + \lambda\Delta s, \quad f_2 = g_2 + \mu\Delta s, \quad f_3 = g_3 + \nu\Delta s$$

dar, so hat man den positiven Werten von $\varDelta s$ die Punkte des positiven Teils, den negativen Werten von $\varDelta s$ die Punkte des negativen Teils der Binormalen zugeordnet. Nimmt man nun:

$$\lambda_1 = l + \varDelta l, \quad \lambda_2 = m + \varDelta m, \quad \lambda_3 = n + \varDelta n,$$

so ist durch den dem Werte $\varDelta s$ entsprechenden Punkt der Binormalen eine Gerade gelegt, die der Hauptnormalen der gegebenen Kurve in dem zu $s + \varDelta s$ gehörenden Punkte parallel liegt. Für diese Darstellung der durch die Binormale gelegten geradlinigen Fläche spielt $\varDelta s$ die Rolle des früheren t, so daß:

$$f_1' = \lambda, \quad \lambda_1' = -\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\lambda}{r} + \frac{d^2 l}{ds^2}\varDelta s + \cdots$$

Dann folgt:

$$h_1 = r.$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich eine Herleitung von ϱ, wenn man die $\varDelta s$ auf der Tangente aufträgt und durch die Endpunkte der aufgetragenen Strecken zu den entsprechenden Hauptnormalen parallele Geraden zieht. Da hier:

$$f_1 = g_1 + \alpha \varDelta s,$$

so folgt:

$$h_1 = \varrho.$$

Von diesem Gesichtspunkt aus können wir den Punkt auf der Hauptnormalen, dessen Koordinaten $x = g_1 + rl$, usw. sind, als den Mittelpunkt der zweiten Krümmung der gegebenen Kurve betrachten.

Vielfach wird der Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}$$

als die dritte oder die ganze Krümmung einer Kurve bezeichnet, obgleich die geometrische Bedeutung dieser Krümmung nicht einleuchtet. Will man ihr aber zu einem Mittelpunkt verhelfen, so stelle man die durch den Kurvenpunkt gehende Gerade, welche auf der rektifizierenden Kante und der Hauptnormale senkrecht ist, durch die Gleichungen dar:

$$f_1 = g_1 + \frac{\alpha + \frac{\varrho}{r}\lambda}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}} \varDelta s, \quad \text{usw.,}$$

und nehme wie oben:

$$\lambda_1 = l + \varDelta l, \quad \text{usw.}$$

dann folgt:

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}}.$$

§ 11. Die Abwickelung der Tangentenflächen.

Wir gehen jetzt zur Untersuchung der Abwickelung einer Tangentenfläche auf eine Schmiegungsebene ihrer Gratlinie über, und betrachten ein nicht ebenes Polygon $P_0, P_1, P_2, \ldots P_n = P$; die Seiten des Polygons seien zu Halbgeraden verlängert, die in $P_0, P_1, \ldots$ beginnen. Die erste dieser Halbgeraden, die also die Punkte P_0 und P_1 enthält, nennen wir Q, ebenso seien die Ebenen durch die Punkte $P_0P_1P_2, P_1P_2P_3 \ldots$ mit $E_1, E_2, \ldots$ bezeichnet, die Winkel, welche von einer Halbgeraden und der ihr folgenden gebildet werden, mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ Drehen wir die Ebene E_2 um P_1P_2, bis sie mit der Ebene E_1 zusammenfällt, so wird die Seite P_2P_3 in ihrer neuen Lage P_2P_3' den Winkel $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ mit der Halbgeraden Q bilden. Die Ebene E_3 hat eine neue Lage E_3' angenommen, aber der Winkel ε_3 ist unverändert geblieben. Drehen wir nun die Ebene E_3' um P_2P_3', bis sie mit der Ebene E_1 zusammenfällt, so gelangt der Punkt P_4 in die Lage P_4' in E_1, und der Winkel, den die Seite $P_3'P_4'$ mit der Halbgeraden Q bildet, ist $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Wir fahren mit den Drehungen so lange fort, bis der letzte Punkt P in die Ebene E_1 gelangt ist.

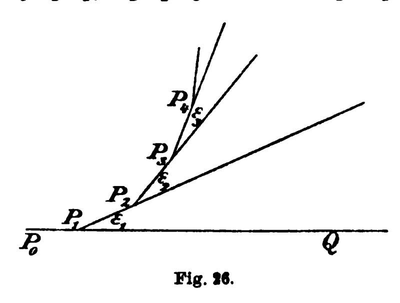


Fig. 26.

Wir denken uns nun das Polygon dadurch entstanden, daß man auf einer gegebenen Raumkurve ein Bogenstück von der Länge s in gleiche Teile zerlegt und die Endpunkte der Teilstücke $P_0, P_1, P_2, \ldots P$ der Reihe nach durch gerade Strecken verbunden habe. Je kleiner wir die Teilstücke wählen, um so weniger werden die Winkel $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ von denjenigen Winkeln verschieden sein, welche die in den Punkten $P_0, P_1, P_2 \ldots$ vorhandenen Kurventangenten der Reihe nach miteinander bilden. Für den Winkel der zu den Werten s und $s + \Delta s$ gehörenden Kurventangenten fanden wir im § 3 S. 198 die Entwicklung:

$$\varphi = \frac{\Delta s}{\varrho} + \cdots,$$

und können daher setzen:

$$\varepsilon_\nu = \frac{\Delta s_\nu}{\varrho_\nu} + \vartheta_\nu \Delta s_\nu^2,$$

wenn der Halbmesser der ersten Krümmung der Kurve im Punkte P_ν mit ϱ_ν bezeichnet wird, und ϑ_ν eine nach ganzen Potenzen von Δs_ν fortschreitende Entwicklung bedeutet. Lassen wir nun die Zahl n unbegrenzt wachsen, so gehen die Halbgeraden in die positiven

Halbtangenten, die Ebenen $E_1, E_2, \ldots$ in die Schmiegungsebenen der Kurve über, und zudem wird:

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu = \int_0^s \frac{ds}{\varrho}.$$

Die Ebene, auf welche die Tangentenfläche der gegebenen Kurve abgewickelt wird, ist hier die zu $s = 0$ gehörende Schmiegungsebene. Nehmen wir in ihr die Tangente der Kurve zur ξ-Achse, die Hauptnormale zur η-Achse, so besitzt der Endpunkt des abgewickelten Kurvenstücks Koordinaten ξ, η, für die:

$$\frac{d\xi}{ds} = \cos \int_0^s \frac{ds}{\varrho}, \quad \frac{d\eta}{ds} = \sin \int_0^s \frac{ds}{\varrho};$$

da offenbar die Länge des Kurvenstücks sich durch die Abwickelung nicht ändert, also auch das abgewickelte Stück die Länge s besitzt.

Jetzt folgt:

$$\xi = \int_0^s \left\{ \cos \int_0^s \frac{ds}{\varrho} \right\} ds, \quad \eta = \int_0^s \left\{ \sin \int_0^s \frac{ds}{\varrho} \right\} ds.$$

Dies sind die Gleichungen für die Koordinaten der Punkte derjenigen Kurve, welche durch Abwickelung der gegebenen Kurve auf die zu $s = 0$ gehörende Schmiegungsebene erhalten wird.

Irgendeine auf der Tangentenfläche der gegebenen Kurve liegende Kurve wird dargestellt durch die Gleichungen:

$$x = g_1(s) + g(s)\alpha, \quad y = g_2(s) + g(s)\beta, \quad z = g_3(s) + g(s)\gamma.$$

Sie geht durch die Abwickelung uber in die Kurve mit den Gleichungen:

$$\xi = \int_0^s \left\{ \cos \int_0^s \frac{ds}{\varrho} \right\} ds + g(s) \cos \int_0^s \frac{ds}{\varrho},$$

$$\eta = \int_0^s \left\{ \sin \int_0^s \frac{ds}{\varrho} \right\} ds + g(s) \sin \int_0^s \frac{ds}{\varrho}.$$

Durch die Abwickelung kann die Bogenlänge der Kurve nicht geändert werden. Dies zeigt sich analytisch folgendermaßen. Man hat

$$\frac{dx}{ds} = \alpha\big(1 + g'(s)\big) + \frac{l}{\varrho} g(s).$$

Für die Bogenlänge σ der Kurve entsteht also die Gleichung:

$$\sigma = \int_0^s \sqrt{\left(1 + g'(s)\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2} g(s)^2}\, ds.$$

Aber:

$$\frac{d\xi}{ds} = \left(1 + g'(s)\right) \cos \int_0^s \frac{ds}{\varrho} - \frac{g(s)}{\varrho} \sin \int_0^s \frac{ds}{\varrho},$$

$$\frac{d\eta}{ds} = \left(1 + g'(s)\right) \sin \int_0^s \frac{ds}{\varrho} + \frac{g(s)}{\varrho} \cos \int_0^s \frac{ds}{\varrho},$$

also:

$$\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 = \left(1 + g'(s)\right)^2 + \frac{g(s)^2}{\varrho^2}.$$

Die Bogenlänge des abgewickelten Stückes ist somit der Bogenlänge des Kurvenstücks vor der Abwickelung gleich.

Für die Abwickelung von Kurven auf einem Kegel gilt das Folgende. Die Spitze des Kegels habe die Koordinaten x_0, y_0, z_0; die Richtungskosinus der Erzeugenden des Kegels seien $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$. Die Funktionen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind die Koordinaten einer Kurve, die auf der mit dem Halbmesser Eins um den Koordinatenanfangspunkt beschriebenen Kugel liegt. Wickeln wir den Kegel auf die Ebene ab, welche nur die zu $t = 0$ gehörende Erzeugende mit dem Kegel gemein hat, d. h. auf die zu $t = 0$ gehörende Tangentialebene des Kegels, so bildet nach der Abwickelung die zu t gehörende Erzeugende mit der zu $t = 0$ gehörenden einen Winkel, der durch die Bogenlänge jener sphärischen Kurve zwischen den zu t und $t = 0$ gehörenden Punkten gemessen wird, d. h. durch $\int_0^t \sqrt{\Sigma \lambda_1'(t)^2}\, dt$. Eine Kurve auf dem Kegel wird durch die Gleichungen:

$$x = x_0 + g(t)\lambda_1, \quad y = y_0 + g(t)\lambda_2, \quad z = z_0 + g(t)\lambda_3$$

dargestellt. Nehmen wir die zu $t = 0$ gehörende Erzeugende zur ξ-Achse, so werden die Gleichungen der abgewickelten Kurve:

$$\xi = g(t) \cos \int_0^t \sqrt{\Sigma \lambda_1'(t)^2}\, dt, \quad \eta = g(t) \sin \int_0^t \sqrt{\Sigma \lambda_1'(t)^2}\, dt.$$

1. **Abwickelung einer Raumkurve auf eine ihrer rektifizierenden Ebenen.** Die rektifizierende Fläche soll hier nicht ein Kegel sein, da dieser Fall schon in § 8 S. 215 behandelt wurde.

Für die Gratlinie der rektifizierenden Fläche fanden wir die Gleichungen:

$$x_3 = x + \frac{\lambda - \frac{\varrho}{r}\alpha}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}, \text{ usw.}$$

Die Richtungskosinus ihrer Tangenten sind:

$$a = \frac{\lambda - \frac{\varrho}{r}\alpha}{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}, \text{ usw.}$$

Die Bogenlänge der Gratlinie nennen wir s_3, ihre erste Krümmung $\frac{1}{\varrho_3}$. Es ist also $x_3 = g_1(s_3)$ usw.

Wir erhalten:

$$\frac{dx_3}{ds} = -\frac{\frac{d^2\frac{\varrho}{r}}{ds^2}}{\left(\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}\right)^2}\left(\lambda - \frac{\varrho}{r}\alpha\right) = a\frac{ds_3}{ds},$$

daher:

$$\frac{ds_3}{ds} = -\frac{\frac{d^2\frac{\varrho}{r}}{ds^2}\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}{\left(\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}\right)^2}.$$

Ferner:

$$\frac{da}{ds} = -\frac{\lambda\frac{\varrho}{r}+\alpha}{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}^3}\,\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds},$$

somit:

$$\frac{da}{d\sigma_3} = \frac{\left(\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}\right)^3}{\frac{d^2\frac{\varrho}{r}}{ds^2}\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}^3}\,\frac{\lambda\frac{\varrho}{r}+\alpha}{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}.$$

Daher folgt nach der ersten Frenetschen Formel:

$$\frac{1}{\varrho_3} = \frac{\left(\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}\right)^3}{\frac{d^2\frac{\varrho}{r}}{ds^2}\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}^3}.$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\int_0^{s_3} \frac{ds_3}{\varrho_3} = \vartheta;$$

dann ergibt sich:

$$\vartheta = -\int_0^s \frac{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2} ds = \vartheta_0 - \operatorname{arctg}\frac{\varrho}{r},$$

wenn mit ϑ_0 der Wert des $\operatorname{arctg}\frac{\varrho}{r}$ für $s = 0$ bezeichnet wird.

Wir erhalten jetzt:

$$\operatorname{arctg}\frac{\varrho}{r} = \vartheta_0 - \vartheta,$$

$$\frac{\varrho}{r} = \operatorname{tg}(\vartheta_0 - \vartheta),$$

$$1 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2(\vartheta_0 - \vartheta)},$$

$$\cos(\vartheta_0 - \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}, \qquad \sin(\vartheta_0 - \vartheta) = \frac{\frac{\varrho}{r}}{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}},$$

$$\cos\vartheta = \frac{\cos\vartheta_0 + \frac{\varrho}{r}\sin\vartheta_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}, \qquad \sin\vartheta = \frac{\sin\vartheta_0 - \frac{\varrho}{r}\cos\vartheta_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}.$$

Das Integral $\int_0^{s_3} \cos\vartheta\, ds_3$ geht über in:

$$-\int_0^s \cos\vartheta \frac{\frac{d^2\frac{\varrho}{r}}{ds^2}\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}{\left(\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}\right)^2} ds,$$

oder:

$$-\int_0^s \left(\cos\vartheta_0 + \frac{\varrho}{r}\sin\vartheta_0\right) \frac{\frac{d^2\frac{\varrho}{r}}{ds^2}}{\left(\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}\right)^2} ds.$$

Aber:

$$\frac{d}{ds}\frac{\frac{\varrho}{r}}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}} = 1 - \frac{\frac{\varrho}{r}\frac{d^2\frac{\varrho}{r}}{ds^2}}{\left(\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}\right)^2},$$

somit:

$$\int\limits_0^s \frac{\varrho}{r}\frac{\frac{d^2\frac{\varrho}{r}}{ds^2}}{\left(\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}\right)^2} ds = s - \left[\frac{\frac{\varrho}{r}}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}\right]_0^s,$$

und

$$\int\limits_0^{s_3} \cos\vartheta\, d s_3 = \cos\vartheta_0 \left[\frac{1}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}\right]_0^s - \sin\vartheta_0 \left\{s - \left[\frac{\frac{\varrho}{r}}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}\right]_0^s\right\},$$

entsprechend:

$$\int\limits_0^{s_3} \sin\vartheta\, d s_3 = \sin\vartheta_0 \left[\frac{1}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}\right]_0^s + \cos\vartheta_0 \left\{s - \left[\frac{\frac{\varrho}{r}}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}\right]_0^s\right\}.$$

Aus der Gleichung:

$$x_3 = x + \frac{\lambda - \frac{\varrho}{r}\alpha}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}} = x + a\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}},$$

folgt:

$$x - x_3 = -a\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}},$$

wir müssen also $g(s_3)$ gleich $-\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}$ nehmen.

Wir erhalten daher:

$$\xi = \cos\vartheta_0 \left[\frac{1}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}\right]_0^s - \sin\vartheta_0 \left\{ s - \left[\frac{\frac{\varrho}{r}}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}\right]_0^s \right\} - \frac{\cos\vartheta_0 + \frac{\varrho}{r}\sin\vartheta_0}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}$$

$$= -\frac{\cos\vartheta_0}{\left(\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}\right)_{s=0}} - \frac{\sin\vartheta_0 \left(\frac{\varrho}{r}\right)_{s=0}}{\left(\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}\right)_{s=0}} - s\sin\vartheta_0,$$

$$\eta = \sin\vartheta_0 \left[\frac{1}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}\right]_0^s + \cos\vartheta_0 \left\{ s - \left[\frac{\frac{\varrho}{r}}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}\right]_0^s \right\} - \frac{\sin\vartheta_0 - \frac{\varrho}{r}\cos\vartheta_0}{\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}}$$

$$= \frac{-\sin\vartheta_0 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)_{s=0}\cos\vartheta_0}{\left(\frac{d\frac{\varrho}{r}}{ds}\right)_0} + s\cos\vartheta_0.$$

Zwischen ξ und η besteht also eine Gleichung von der Form:

$$(\xi - p)\cos\vartheta_0 + (\eta - q)\sin\vartheta_0 = 0,$$

in der p, q, ϑ_0 Konstante bedeuten, d. h. die abgewickelte Kurve ist eine Gerade.

2. Abwickelung der Polarfläche einer Raumkurve auf eine Normalebene der Kurve.

Für die Gratlinie des Ortes der Krümmungsachsen, d. i. der Polarfläche, fanden wir in § 6 S. 210 die Gleichungen:

$$x_2 = x + l\varrho - \lambda r \frac{d\varrho}{ds}, \quad \text{usw.}$$

sowie:

$$\frac{dx_2}{ds} = -\lambda\left(\frac{\varrho}{r} + r\frac{d^2\varrho}{ds^2} + \frac{dr}{ds}\frac{d\varrho}{ds}\right),$$

wo zur Abkürzung:

$$\frac{\varrho}{r} + r\frac{d^2\varrho}{ds^2} + \frac{dr}{ds}\frac{d\varrho}{ds} = \tau$$

gesetzt werde.

Wir nehmen zuerst an, daß die Polarfläche kein Kegel sei, also τ nicht verschwinde. Die Bogenlänge der Gratlinie werde mit s_2 bezeichnet, ihre erste Krümmung mit $\frac{1}{\varrho_2}$.

Da:

$$\frac{dx_2}{ds_2} = \lambda,$$

so ist:

$$\frac{ds_2}{ds} = -\tau, \quad \frac{d\lambda}{ds_2} = \frac{-l}{r\tau}, \quad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{-1}{r\tau}, \quad \frac{ds_2}{\varrho_2} = \frac{ds}{r},$$

folglich:

$$\int_0^{s_2} \frac{ds_2}{\varrho_2} = \int_0^s \frac{ds}{r}.$$

Im vorigen Paragraphen wurde gezeigt, daß die Gratlinien der abwickelbaren Normalenflächen auf der Polarfläche liegen.

Es soll nun bewiesen werden, daß diese Gratlinien bei der Abwickelung der Polarfläche in gerade Linien übergehen. Als Gleichungen einer Gratlinie fanden wir:

$$x' = x + l\varrho + \lambda\varrho \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{usw.},$$

wo:

$$\varphi = \int_0^s \frac{ds}{r} + \varepsilon = \varphi_0 + \varepsilon,$$

und ε eine Konstante bedeutet.

Wir haben demnach:

$$x' - x_2 = \lambda\left(\varrho \operatorname{tg} \varphi + r\frac{d\varrho}{ds}\right),$$

folglich:

$$g(s_2) = \varrho \operatorname{tg} \varphi + r\frac{d\varrho}{ds}.$$

Es wird ferner:

$$\int_0^{s_2} \cos \varphi_0 \, ds_2 = -\int_0^s \tau \cos \varphi_0 ds, \quad \int_0^{s_2} \sin \varphi_0 \, ds_2 = -\int_0^s \tau \sin \varphi_0 ds,$$

so daß:

$$\xi = -\int_0^s \tau \cos \varphi_0 ds + \left(\varrho \operatorname{tg}(\varphi_0 + \varepsilon) + r\frac{d\varrho}{ds}\right) \cos \varphi_0,$$

$$\eta = -\int_0^s \tau \sin \varphi_0 ds + \left(\varrho \operatorname{tg}(\varphi_0 + \varepsilon) + r\frac{d\varrho}{ds}\right) \sin \varphi_0.$$

Man hat aber:

$$\tau = \frac{\varrho}{r} + \frac{d\left(r\frac{d\varrho}{ds}\right)}{ds},$$

$$\int_0^s \frac{\varrho}{r} \cos \varphi_0 ds = [\varrho \sin \varphi_0]_0^s - \int_0^s \sin \varphi_0 d\varrho,$$

$$\int_0^s \cos\varphi_0 d\left(r\frac{d\varrho}{ds}\right) = \left[r\frac{d\varrho}{ds}\cos\varphi_0\right]_0^s + \int_0^s \sin\varphi_0 d\varrho,$$

somit:

$$\int_0^s \tau\cos\varphi_0 ds = \left[\varrho\sin\varphi_0 + r\frac{d\varrho}{ds}\cos\varphi_0\right]_0^s,$$

und entsprechend:

$$\int_0^s \tau\sin\varphi_0 ds = \left[-\varrho\cos\varphi_0 + r\frac{d\varrho}{ds}\sin\varphi_0\right]_0^s.$$

Setzen wir:

$$\left\{\varrho\sin\varphi_0 + r\frac{d\varrho}{ds}\cos\varphi_0\right\}_{s=0} = p, \qquad \left\{-\varrho\cos\varphi_0 + r\frac{d\varrho}{ds}\sin\varphi_0\right\}_{s=0} = q,$$

so wird:

$$\xi - p = \varrho\{-\sin\varphi_0 + \operatorname{tg}(\varphi_0+\varepsilon)\cos\varphi_0\} = \varrho\frac{\sin\varepsilon}{\cos(\varphi_0+\varepsilon)},$$

$$\eta - q = \varrho\{\cos\varphi_0 + \operatorname{tg}(\varphi_0+\varepsilon)\sin\varphi_0\} = \varrho\frac{\cos\varepsilon}{\cos(\varphi_0+\varepsilon)}.$$

Daher:

$$(\xi - p)\cos\varepsilon - (\eta - q)\sin\varepsilon = 0,$$

und das ist die Gleichung einer Geraden.

Wenn die Polarfläche ein Kegel ist, entsteht:

$$\xi = \left(\varrho\operatorname{tg}\varphi + r\frac{d\varrho}{ds}\right)\cos\varphi_0, \quad \eta = \left(\varrho\operatorname{tg}\varphi + r\frac{d\varrho}{ds}\right)\sin\varphi_0$$

mit der Bedingung: $\tau = 0$. Aus dieser Bedingung folgt aber, daß die Integrale:

$$\int_0^s \tau\cos\varphi_0 ds, \quad \int_0^s \tau\sin\varphi_0 ds$$

verschwinden. Wir haben somit:

$$\varrho\sin\varphi_0 + r\frac{d\varrho}{ds}\cos\varphi_0 = p,$$

$$-\varrho\cos\varphi_0 + r\frac{d\varrho}{ds}\sin\varphi_0 = q,$$

daher:

$$\xi - p = \varrho\left(\operatorname{tg}(\varphi_0+\varepsilon)\cos\varphi_0 - \sin\varphi_0\right) = \varrho\frac{\sin\varepsilon}{\cos(\varphi_0+\varepsilon)},$$

$$\eta - q = \varrho\left(\operatorname{tg}(\varphi_0+\varepsilon)\sin\varphi_0 + \cos\varphi_0\right) = \varrho\frac{\cos\varepsilon}{\cos(\varphi_0+\varepsilon)},$$

also:

$$(\xi - p)\cos\varepsilon - (\eta - q)\sin\varepsilon = 0,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

§ 12. Nähere Untersuchung der konischen Spirale.

Wir fanden im § 1 S. 189 als Gleichungen der konischen Spirale die folgenden:

$$x = (k_1 s + 1) \cos\left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{k_1} \log(k_1 s + 1)\right),$$
$$y = (k_1 s + 1) \sin\left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{k_1} \log(k_1 s + 1)\right),$$
$$z = h(k_1 s + 1).$$

Die Gleichung des Kegels, auf dem die Spirale liegt, ist:

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{h^2} = 0;$$

k bedeutet den Kosinus des konstanten Winkels, unter dem die Spirale die Erzeugenden schneidet, und statt $\frac{k}{\sqrt{1+h^2}}$ ist k_1 geschrieben.

Für die Richtungskosinus der Tangente (§ 1 S. 189), der Haupt- und Binormale der Spirale (§ 3 S. 195), fanden wir, wenn $\varphi = \frac{\sqrt{1-k^2}}{k_1} \log(k_1 s + 1)$:

$$\alpha = k_1 \cos\varphi - \sqrt{1-k^2} \sin\varphi,$$
$$\beta = k_1 \sin\varphi + \sqrt{1-k^2} \cos\varphi,$$
$$\gamma = k_1 h,$$
$$l = \frac{-\beta}{\sqrt{k_1^2 - k^2 + 1}}, \qquad m = \frac{\alpha}{\sqrt{k_1^2 - k^2 + 1}}, \qquad n = 0,$$
$$\lambda = \frac{-hk_1\alpha}{\sqrt{k_1^2 - k^2 + 1}}, \qquad \mu = \frac{-hk_1\beta}{\sqrt{k_1^2 - k^2 + 1}}, \qquad \nu = \sqrt{k_1^2 - k^2 + 1}.$$

Für die erste und zweite Krümmung der Spirale ergab sich (§ 3 S. 199):

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sqrt{1-k^2}\sqrt{k_1^2 - k^2 + 1}}{k_1 s + 1}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{-hk_1\sqrt{1-k^2}}{k_1 s + 1}, \qquad \frac{\varrho}{r} = \frac{-hk_1}{\sqrt{k_1^2 - k^2 + 1}}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen findet sich für die Richtungskosinus der rektifizierenden Kante: $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, d. h. diese Kante ist der Kegelachse parallel, und die rektifizierende Fläche ist der Zylinder, der auf der xy-Ebene senkrecht steht und aus ihr die in § 1 S. 189 betrachtete logarithmische Spirale ausschneidet. Die Erzeugende dieses Zylinders schneidet die konische Spirale unter dem konstanten Winkel, dessen Kosinus $k_1 h$ ist.

Für die Koordinaten des Mittelpunktes der zu s gehörenden Schmiegungskugel erhält man:

$$x_2 = -\frac{(k_1 s + 1)k^2}{1-k^2} \cos\varphi, \quad y_2 = -\frac{(k_1 s + 1)k^2}{1-k^2} \sin\varphi,$$
$$z_2 = (k_1 s + 1)\frac{h^2(1-k^2)+1}{h(1-k^2)}.$$

Um von der Lage dieses Punktes ein anschauliches Bild zu bekommen, betrachten wir die durch den Punkt (x, y, z) gehende Normale des Kegels. Ihre Richtungskosinus sind proportional $x, y, -\frac{z}{h^2}$ oder $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $-\frac{1}{h}$.

Nehmen wir diese Richtungskosinus in der Form:

$$-\frac{h\cos\varphi}{\sqrt{1+h^2}}, \quad -h\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+h^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+h^2}},$$

so stellen sie die Richtungskosinus derjenigen Halbnormale des Kegels dar, die von dem Punkt (x, y, z) ausgehend die positive z-Achse schneidet. Die Entfernung des Schnittpunktes vom Kurvenpunkt (x, y, z) ist gleich $\frac{(k_1 s+1)\sqrt{1+h^2}}{h}$. Da:

$$x_2 - x = -\frac{(k_1 s+1)\cos\varphi}{1-k^2}, \quad y_2 - y = -\frac{(k_1 s+1)\sin\varphi}{1-k^2}, \quad z_2 - z = \frac{k_1 s+1}{h(1-k^2)},$$

so liegt der Punkt (x_2, y_2, z_2) auf der positiven Halbnormale des Kegels und hat vom Punkte (x, y, z) den Abstand $\frac{(k_1 s+1)\sqrt{1+h^2}}{h(1-k^2)}$. Dieser Abstand ist größer als der Abstand $\frac{(k_1 s+1)\sqrt{1+h^2}}{h}$, da $k<1$.

Wir zeigen jetzt, daß die Polkurve ebenfalls eine konische Spirale ist.

Sie liegt auf dem durch die Gleichung:

$$x^2 + y^2 - z^2\frac{k^4h^2}{\left(1+h^2(1-k^2)\right)^2} = 0$$

bestimmten Kegel. Setzt man zur Abkürzung:

$$h_1 = \frac{1+h^2(1-k^2)}{k^2 h},$$

so wird:

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = (k_1 s+1)^2\frac{k^4(1+h_1^2)}{(1-k^2)^2}.$$

Die Richtungskosinus der vom Nullpunkt zum Punkt (x_2, y_2, z_2) hingerichteten Erzeugenden des Kegels sind daher:

$$\frac{-\cos\varphi}{\sqrt{1+h_1^2}}, \quad \frac{-\sin\varphi}{\sqrt{1+h_1^2}}, \quad \frac{h_1}{\sqrt{1+h_1^2}}.$$

Die Richtungskosinus der Tangente der Polkurve sind λ, μ, ν. Für den Kosinus des Winkels dieser Tangente und der Kegelerzeugenden erhält man:

$$k' = k\frac{\sqrt{h_1+\frac{1}{h_1}}}{\sqrt{h+\frac{1}{h}}}.$$

Die Polkurve ist also ebenfalls eine konische Spirale. Es liegt nun die Frage nahe, ob nicht der Kegel, auf dem die Polkurve liegt, mit dem ursprünglich angenommenen Kegel zusammenfallen kann. Dies ist der Fall, wenn h_1 gleich h wird, wo dann:

$$k^2 = \frac{1+h^2}{2h^2}.$$

Da $k^2 < 1$, ist diese Gleichung nur möglich, wenn $h > 1$, d. h. wenn die sogenannte Kegelöffnung weniger wie einen Rechten beträgt. Dies folgt auch geometrisch, da die die positive z-Achse schneidende Halbnormale des Kegels den Kegel noch einmal treffen muß, und zwar im Punkte (x_2, y_2, z_2). Sobald also $h > 1$, gibt es auf dem Kegel einfach unendlich viele Spiralen, die aus einer von ihnen durch Drehung um die Kegelachse entstehen und deren Polkurven dieselbe Schar von Spiralen bilden. Es gilt nun die Größe der Drehung zu bestimmen, die aus einer dieser Spiralen ihre Polkurve erzeugt. Für den obigen Wert von k werden die Gleichungen der durch den Punkt $x = 1$, $y = 0$, $z = h$ gehenden Spirale:

$$x = \left(\frac{s}{h\sqrt{2}} + 1\right)\cos\varphi, \quad y = \left(\frac{s}{h\sqrt{2}} + 1\right)\sin\varphi, \quad z = \frac{s}{\sqrt{2}} + h,$$

und hier bedeutet s die mit wachsendem z wachsende und vom Punkte mit den Koordinaten $x = 1$, $y = 0$, $z = h$ an gerechnete Bogenlänge, während φ gleich $\sqrt{h^2-1}\log\left(\frac{s}{2\sqrt{h}} + 1\right)$ ist. Die Gleichungen der Polkurve der Spirale sind:

$$x_2 = -\left(\frac{s}{h\sqrt{2}} + 1\right)\frac{h^2+1}{h^2-1}\cos\varphi, \quad y_2 = -\left(\frac{s}{h\sqrt{2}} + 1\right)\frac{h^2+1}{h^2-1}\sin\varphi,$$

$$z_2 = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + h\right)\frac{h^2+1}{h^2-1}.$$

Um diese Gleichungen mit den vorigen vergleichen zu können, ist zunächst s durch die Bogenlänge der Polkurve auszudrücken.

Wir fanden im § 6 S. 210:

$$\frac{dx_2}{ds} = -\lambda\left(\frac{\varrho}{r} + r\frac{d^2\varrho}{ds} + \frac{dr}{ds}\frac{d\varrho}{ds}\right).$$

Man hat aber jetzt (§ 3 S. 199):

$$\varrho = \frac{\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+h\right)^2}{\sqrt{h^2-1}}, \quad r = -\frac{\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+h\right)^2}{\sqrt{h^2-1}}, \quad \frac{\varrho}{r} = -1,$$

folglich:

$$\frac{dx_2}{ds} = \lambda\frac{h^2+1}{h^2-1},$$

und, wenn s_2 mit s wachsen soll,

$$\frac{ds_2}{ds} = \frac{h^2+1}{h^2-1},$$

$$s_2 = \frac{h^2+1}{h^2-1}s + C,$$

$$s = \frac{(s_2 - C)(h^2-1)}{h^2+1}.$$

Für z_2 ergibt sich der Ausdruck:

$$\frac{s_2 - C}{\sqrt{2}} + h\frac{h^2+1}{h^2-1}.$$

Nun sollte die Bogenlänge von der Ebene mit der Gleichung $z = h$ an gerechnet werden, also für $z_2 = h$ sollte $s_2 = 0$ sein. Dies liefert:

$$C = \frac{2\sqrt{2}h}{h^2-1},$$

und:

$$s = \frac{s_2(h^2-1) - 2\sqrt{2}h}{h^2+1},$$

so daß:

$$\frac{s}{h\sqrt{2}} + 1 = \left(\frac{s_2}{h\sqrt{2}} + 1\right)\frac{h^2-1}{h^2+1},$$

$$\varphi = \sqrt{h^2-1}\log\left(\frac{s_2}{h\sqrt{2}} + 1\right) + \sqrt{h^2-1}\log\frac{h^2-1}{h^2+1}.$$

Nehmen wir nun $s_2 = s$ und:

$$\psi = \sqrt{h^2-1}\log\left(\frac{s}{h\sqrt{2}} + 1\right) + \pi + \sqrt{h^2-1}\log\frac{h^2-1}{h^2+1},$$

so erhalten wir:

$$x_2 = \left(\frac{s}{h\sqrt{2}} + 1\right)\cos\psi, \quad y_2 = \left(\frac{s}{h\sqrt{2}} + 1\right)\sin\psi, \quad z_2 = \frac{s}{\sqrt{2}} + h,$$

d. h. die Polkurve ist aus der gegebenen Spirale durch eine Drehung um die z-Achse von der Größe $\pi + \sqrt{h^2-1}\log\frac{h^2-1}{h^2+1}$ entstanden.

II. Die Umgebung eines außergewöhnlichen Punktes.

§ 13. Tangente, Binormale, Hauptnormale.

Bei einer durch die Gleichungen:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

gegebenen Kurve zogen wir bisher nur solche Punkte in Betracht, bei denen die ersten Ableitungen $f_1'(t)$, $f_2'(t)$, $f_3'(t)$ nicht zugleich verschwinden und die Krümmungen $\frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{r}$ endliche, von Null verschiedene, Werte besitzen. Sobald diese Voraussetzungen nicht sämt-

lich bestehen, ist eine neue Untersuchung anzustellen, und man hat zwei Wege zu beschreiten. Erstens sind für den betreffenden außergewöhnlichen Punkt die in Frage kommenden geometrischen Gebilde aufzusuchen, und zweitens hat man die betreffenden Gebilde für einen in hinreichender Nähe des außergewöhnlichen Punktes liegenden gewöhnlichen Punkt zu berechnen und ihr Verhalten beim Grenzübergang an den außergewöhnlichen Punkt festzustellen.

Wir nehmen an, daß ν_1 der kleinste Wert der ganzen positiven Zahl n sei, für den die drei Ableitungen $f_1^{(n)}(t)$, $f_2^{(n)}(t)$, $f_3^{(n)}(t)$ nicht gleichzeitig verschwinden. Dabei ist nicht ausgeschlossen, daß ν_1 den Wert Eins besitze.

Ferner bedeute k eine der Zahlen 1, 2, 3 und es sei:

$$\varDelta f_k = f_k(t + \varDelta t) - f_k(t).$$

1. Die Tangente. Man hat:

$$\frac{\varDelta f_k}{\sqrt{\Sigma \varDelta f_k^2}} = \frac{\frac{1}{\nu_1!} f_k^{(\nu_1)} \varDelta t^{\nu_1} + \frac{1}{(\nu_1+1)!} f_k^{(\nu_1+1)} \varDelta t^{\nu_1+1} + \cdots}{\sqrt{\left(\frac{1}{\nu_1!}\right)^2 \Sigma \left(f_k^{(\nu_1)}\right)^2 \varDelta t^{2\nu_1} + \cdots}}.$$

Ist $f_k^{(\nu_1)}$ gleich Null, so geht die rechte Seite dieser Gleichung beim Übergang zu $\varDelta t = 0$ in die Null über. Ist aber $f_k^{(\nu_1)}$ von Null verschieden, so erhalten wir, wenn ε gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem $\varDelta t$ positiv oder negativ ist, als Grenzwert der rechten Seite für $\varDelta t = 0$:

$$\varepsilon^{\nu_1} \frac{f_k^{(\nu_1)}}{\sqrt{\Sigma \left(f_k^{(\nu_1)}\right)^2}}.$$

Ziehen wir von dem dem Werte t entsprechenden Punkt aus durch den dem Werte $t + \varDelta t$ entsprechenden hindurch eine Halbgerade, so ergeben sich beim Übergang zu $\varDelta t = 0$ zwei Halbgerade, die zusammen eine Gerade bilden, wenn ν_1 eine ungerade Zahl ist; es ergibt sich nur eine Halbgerade, wenn ν_1 eine gerade Zahl ist. Im letzten Fall besitzt die Kurve an der betrachteten Stelle eine Spitze.

Unter α, β, γ verstehen wir die Richtungskosinus derjenigen Halbtangente, die sich beim Übergang eines positiven $\varDelta t$ in die Null ergibt. Setzen wir noch:

$$w = \sqrt{\Sigma \left(f_1^{(\nu_1)}\right)^2},$$

so ist:

$$\alpha = \frac{f_1^{(\nu_1)}}{w}, \quad \beta = \frac{f_2^{(\nu_1)}}{w}, \quad \gamma = \frac{f_3^{(\nu_1)}}{w}.$$

Um das Verhalten der positiven Halbtangente in einem gewöhnlichen Punkt beim Übergang zu einem außergewöhnlichen Punkt zu

untersuchen, nehmen wir den absoluten Wert von Δt so klein, daß im Intervall von $t - \Delta t$ bis zu $t + \Delta t$ mit Einschluß der Grenzen sich außer t kein Wert befindet, dem ein außergewöhnlicher Punkt entspricht. Dann ist:

$$\alpha(t + \Delta t) = \frac{f_1'(t+\Delta t)}{\sqrt{\Sigma f_1'(t+\Delta t)^2}}, \quad \beta(t + \Delta t) = \frac{f_2'(t+\Delta t)}{\sqrt{\Sigma f_1'(t+\Delta t)^2}},$$

$$\gamma(t + \Delta t) = \frac{f_3'(t+\Delta t)}{\sqrt{\Sigma f_1'(t+\Delta t)^2}}.$$

Aber man hat:

$$f_k'(t + \Delta t) = \frac{1}{(\nu_1 - 1)!} f_k^{(\nu_1)} \Delta t^{\nu_1 - 1} + \cdots,$$

folglich:

$$\operatorname*{Lim}_{\Delta t = 0} \frac{f_k'(t+\Delta t)}{\sqrt{\Sigma f_k'(t+\Delta t)^2}} = \frac{\varepsilon^{\nu_1 - 1} f_k^{(\nu_1)}}{w}.$$

Wenn ν_1 eine ungerade Zahl ist, erhalten wir:

$$\operatorname*{Lim}_{(\Delta t = 0)} \alpha(t + \Delta t) = \alpha, \quad \operatorname*{Lim}_{(\Delta t = 0)} \beta(t + \Delta t) = \beta, \quad \operatorname*{Lim}_{(\Delta t = 0)} \gamma(t + \Delta t) = \gamma,$$

wenn ν_1 eine gerade Zahl ist, entsteht:

$$\operatorname{Lim} \alpha(t + \Delta t) = \varepsilon\alpha, \text{ usw.},$$

d. h. die für $t + \Delta t$ vorhandene positive Halbtangente geht bei $\Delta t = 0$ in die für t definierte negative Halbtangente über, wenn Δt als negativ betrachtet wird. Die Richtung der positiven Halbtangente macht an einer Spitze einen Sprung von der Größe π.

2. Die Binormale. Die Richtungskosinus λ, μ, ν der positiven Binormale wurden im § 3 S. 191 definiert als die Grenzwerte der Ausdrücke:

$$\frac{\beta \Delta z - \gamma \Delta y}{\sqrt{\Sigma(\beta \Delta z - \gamma \Delta y)^2}}, \quad \text{usw.}$$

für $\Delta t = 0$. Man hat aber hier:

$$\beta \Delta z - \gamma \Delta y = \frac{1}{w} \cdot \sum_{n=1} \frac{1}{(\nu_1 + n)!} \left(f_2^{(\nu_1)} f_3^{(\nu_1 + n)} - f_3^{(\nu_1)} f_2^{(\nu_1 + n)} \right) \Delta t^{\nu_1 + n}.$$

Wir bezeichnen mit ν_2 den kleinsten Wert von n, für den die Determinanten:

$$f_2^{(\nu_1)} f_3^{(\nu_1+n)} - f_3^{(\nu_1)} f_2^{(\nu_1+n)}, \quad f_3^{(\nu_1)} f_1^{(\nu_1+n)} - f_1^{(\nu_1)} f_3^{(\nu_1+n)}, \quad f_1^{(\nu_1)} f_2^{(\nu_1+n)} - f_2^{(\nu_1)} f_1^{(\nu_1+n)}$$

nicht gleichzeitig verschwinden. Dann beginnt der Ausdruck:

$$\Sigma(\beta \Delta z - \gamma \Delta y)^2$$

mit der $2(\nu_1 + \nu_2)^{\text{ten}}$ Potenz von Δt, und es ergibt sich:

$$\lambda = \frac{\varepsilon^{\nu_1 + \nu_2} \left(f_2^{(\nu_1)} f_3^{(\nu_1 + \nu_2)} - f_3^{(\nu_1)} f_2^{(\nu_1 + \nu_2)} \right)}{\sqrt{\Sigma \left(f_2^{(\nu_1)} f_3^{(\nu_1 + \nu_2)} - f_3^{(\nu_1)} f_2^{(\nu_1 + \nu_2)} \right)^2}}, \quad \text{usw.}$$

Wir sehen, daß wir stets auf eine einzige Schmiegungsebene kommen, daß aber die positive Binormalenrichtung und damit der positive Drehungssinn in der Schmiegungsebene nur dann eindeutig bestimmt ist, wenn $\nu_1 + \nu_2$ als gerade Zahl auftritt. Ist $\nu_1 + \nu_2$ ungerade, so ergeben sich entgegengesetzte positive Binormalenrichtungen, je nachdem man sich dem außergewöhnlichen Punkt von der einen oder der anderen Seite aus ($\Delta t > 0$, oder $\Delta t < 0$) nähert.

Um das Verhalten der für einen gewöhnlichen Punkt festgelegten positiven Binormale bei der Annäherung an einen außergewöhnlichen Punkt zu untersuchen, benutzen wir den im ersten Teil § 2 S. 8 bewiesenen Satz, nach welchem die Entwicklung der Determinante:

$$f_1'(t+\Delta t)f_2''(t+\Delta t) - f_2'(t+\Delta t)f_1''(t+\Delta t)$$

mit dem Gliede:

$$\frac{\nu_2}{(\nu_1-1)!\,(\nu_1+\nu_2-1)!}\left(f_1^{(\nu_1)}f_2^{(\nu_1+\nu_2)} - f_2^{(\nu_1)}f_1^{(\nu_1+\nu_2)}\right)\Delta t^{2\nu_1+\nu_2-3}$$

beginnt, falls die Determinante:

$$f_1^{(\nu_1)}f_2^{(\nu_1+n)} - f_2^{(\nu_1)}f_1^{(\nu_1+n)}$$

für alle Werte von n von 1 bis $\nu_2 - 1$ verschwindet, während $f_1^{(\nu_1)}$ und $f_2^{(\nu_1)}$ nicht zugleich verschwinden.

Wir haben hier:

$$\lambda(t+\Delta t) = \frac{f_2'(t+\Delta t)f_3''(t+\Delta t) - f_3'(t+\Delta t)f_2''(t+\Delta t)}{\sqrt{\Sigma\left(f_2'(t+\Delta t)f_3''(t+\Delta t) - f_3'(t+\Delta t)f_2''(t+\Delta t)\right)^2}}, \text{ usw.}$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen beginnt mit $\Delta t^{4\nu_1+2\nu_2-6}$, somit folgt beim Übergang zu $\Delta t = 0$:

$$\lambda = \frac{\varepsilon^{\nu_2+1}\left(f_2^{(\nu_1)}f_3^{(\nu_1+\nu_2)} - f_3^{(\nu_1)}f_2^{(\nu_1+\nu_2)}\right)}{\sqrt{\Sigma\left(f_2^{(\nu_1)}f_3^{(\nu_1+\nu_2)} - f_3^{(\nu_1)}f_2^{(\nu_1+\nu_2)}\right)^2}}, \quad \text{usw.}$$

Ist ν_2 eine ungerade Zahl, so erhält man im außergewöhnlichen Punkt nur eine positive Binormalenrichtung; ist ν_2 gerade, so ergeben sich zwei einander entgegengesetzte positive Binormalenrichtungen, je nachdem man von der einen oder der anderen Seite aus an den außergewöhnlichen Punkt herangeht.

3. Die Hauptnormale. Die Richtungskosinus der positiven Hauptnormalen wurden festgelegt durch die Gleichungen:

$$l = \gamma\mu - \beta\nu, \quad m = \alpha\nu - \gamma\lambda, \quad n = \beta\lambda - \alpha\mu.$$

Dies liefert, wenn wir die erste Bestimmung von λ, μ, ν benutzen:

$$l = \frac{\varepsilon^{\nu_1+\nu_2}\left\{f_3^{(\nu_1)}\left(f_3^{(\nu_1)}f_1^{(\nu_1+\nu_2)} - f_1^{(\nu_1)}f_3^{(\nu_1+\nu_2)}\right) - f_2^{(\nu_1)}\left(f_1^{(\nu_1)}f_2^{(\nu_1+\nu_2)} - f_2^{(\nu_1)}f_1^{(\nu_1+\nu_2)}\right)\right\}}{wW},$$

oder auch:

$$l = \frac{\varepsilon^{\nu_1+\nu_2}\left\{f_1^{(\nu_1+\nu_2)}w^2 - f_1^{(\nu_1)}\Sigma f_1^{(\nu_1)}f_1^{(\nu_1+\nu_2)}\right\}}{wW},$$

wo:
$$W = \sqrt{\Sigma\left(f_3^{(\nu_1)} f_1^{(\nu_1+\nu_2)} - f_1^{(\nu_1)} f_3^{(\nu_1+\nu_2)}\right)^2}$$
gesetzt ist.

Gehen wir mit der für einen gewöhnlichen Punkt festgelegten positiven Hauptnormale an einen außergewöhnlichen Punkt heran, so ist der Grenzwert des Ausdrucks:
$$\frac{f_3'(t+\varDelta t)\{f_3'(t+\varDelta t) f_1''(t+\varDelta t) - f_1'(t+\varDelta t) f_3''(t+\varDelta t)\} - f_2'(t+\varDelta t)\{f_1'(t+\varDelta t) f_2''(t+\varDelta t) - f_2'(t+\varDelta t) f_1''(t+\varDelta t)\}}{\sqrt{\Sigma f_1'(t+\varDelta t)^2}\ \sqrt{\Sigma\left(f_2'(t+\varDelta t) f_3''(t+\varDelta t) - f_3'(t+\varDelta t) f_2''(t+\varDelta t)\right)^2}}$$
für $\varDelta t = 0$ zu bilden. Dies liefert genau denselben Wert von l wie vorhin. Wir erhalten daher stets nur eine positive Hauptnormalenrichtung, wenn $\nu_1 + \nu_2$ eine gerade Zahl ist, sonst zwei entgegengesetzte positive Hauptnormalenrichtungen, je nachdem man sich von der einen oder anderen Seite aus dem außergewöhnlichen Punkte nähert.

§ 14. Erste und zweite Krümmung.

1. Die erste Krümmung. Wir benutzen die am Schluß des § 10 S. 229 gegebene Erklärung des Halbmessers der ersten Krümmung, nämlich: Trägt man auf einer Tangente vom Berührungspunkt aus die Strecke mit der Maßzahl $\varDelta s$ ab und legt durch den Endpunkt der abgetragenen Strecke eine Parallele zu der dem Wert $(s + \varDelta s)$ entsprechenden Hauptnormale, so schneidet die senkrechte Projektion der Parallelen auf die zu s gehörende Schmiegungsebene die zu s gehörende Hauptnormale in einem Punkt, der für $\varDelta s = 0$ in den Mittelpunkt der ersten Krümmung übergeht. Wir müssen hier auf die im § 9 S. 223 abgeleitete Gleichung:
$$\begin{aligned} &h_1(\Sigma\varDelta f_1 \varDelta\lambda_1 - \Sigma\lambda_1\varDelta f_1 \Sigma\lambda_1\varDelta\lambda_1) \\ &\qquad = \Sigma\lambda_1\varDelta f_1(\Sigma\lambda\varDelta f_1 + \Sigma\varDelta\lambda_1\varDelta f_1) - (\Sigma\varDelta f_1)^2(1 + \Sigma\lambda_1\varDelta\lambda_1)\end{aligned}$$
zurückgehen, da wir nicht mehr annehmen, daß die Richtungskosinus $\lambda_1 + \varDelta\lambda_1, \lambda_2 + \varDelta\lambda_2, \lambda_3 + \varDelta\lambda_3$ nach ganzen Potenzen von $\varDelta s$ entwickelbar seien.

Man hat hier zu setzen:
$$\varDelta f_1 = \alpha\varDelta s, \quad \varDelta f_2 = \beta\varDelta s, \quad \varDelta f_3 = \gamma\varDelta s,$$
$$\lambda_1 = l, \qquad \lambda_2 = m, \qquad \lambda_3 = n.$$
Dadurch verschwindet $\Sigma\lambda_1\varDelta f_1$ und es kommt:
$$h_1 = \frac{-\varDelta s(1 + \Sigma l\varDelta l)}{\Sigma\alpha\varDelta l}.$$
Nun ist: $\Sigma(\alpha + \varDelta\alpha)(l + \varDelta l) = 0$, somit:
$$h_1 = \frac{\varDelta s(1 + \Sigma l\varDelta l)}{\Sigma l(\alpha + \varDelta\alpha) + \Sigma\varDelta\alpha\varDelta l}.$$

Die niedrigste Potenz von $\varDelta t$ im Zähler von h_1 fällt zusammen mit der niedrigsten Potenz von $\varDelta t$ in der Entwicklung von $\varDelta s$;

die niedrigste Potenz von Δt im Nenner von h_1 fällt zusammen mit der niedrigsten Potenz von Δt in der Entwicklung von $\Sigma l(\alpha + \Delta \alpha)$.

Man hat:

$$\Delta s = \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{\Sigma f_1'(\vartheta)^2}\, d\vartheta,$$

oder, wenn wir ϑ gleich $t + \tau$ nehmen:

$$\Delta s = \int_0^{\Delta t} \sqrt{\Sigma f_1'(t+\tau)^2}\, d\tau.$$

Die Integrationsveränderliche τ ist positiv oder negativ, je nachdem Δt positiv oder negativ ist, somit:

$$\sqrt{\Sigma f_1'(t+\tau)^2} = \frac{\varepsilon^{\nu_1 - 1}}{(\nu_1 - 1)!} \sqrt{\Sigma (f_1^{(\nu_1)})^2}\, \tau^{\nu_1 - 1} + \cdots,$$

$$\Delta s = \frac{\varepsilon^{\nu_1 - 1}}{(\nu_1)!} \sqrt{\Sigma (f_1^{(\nu_1)})^2}\, \Delta t^{\nu_1} + \cdots$$

Um die Entwicklungen von $\Sigma l(\alpha + \Delta \alpha)$ zu erhalten, berücksichtige man, daß die Determinanten:

$$f_2^{(\nu_1)} f_3^{(\nu_1 + a)} - f_3^{(\nu_1)} f_2^{(\nu_1 + a)}, \quad f_3^{(\nu_1)} f_1^{(\nu_1 + a)} - f_1^{(\nu_1)} f_3^{(\nu_1 + a)},$$
$$f_1^{(\nu_1)} f_2^{(\nu_1 + a)} - f_2^{(\nu_1)} f_1^{(\nu_1 + a)}$$

als verschwindend angenommen wurden, solange a der Zahlenreihe $1, 2, \ldots \nu_2 - 1$ angehört, daß aber für $a = \nu_2$ die drei Determinanten nicht sämtlich Null sein sollten. Bedeutet daher k eine der Zahlen $1, 2, 3$, so bestehen Gleichungen von der Form:

$$f_k^{(\nu_1 + 1)} = p_1 f_k^{(\nu_1)}, \; f_k^{(\nu_1 + 2)} = p_2 f_k^{(\nu_1)} \ldots f_k^{(\nu_1 + \nu_2 - 1)} = p_{\nu_2 - 1} f_k^{(\nu_1)}.$$

Setzt man nun:

$$\frac{1}{\nu_1!} \Delta t^{\nu_1} + \frac{p_1}{(\nu_1 + 1)!} \Delta t^{\nu_1 + 1} + \frac{p_2}{(\nu_1 + 2)!} \Delta t^{\nu_1 + 2} + \cdots + \frac{p_{\nu_2 - 1}}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} \Delta t^{\nu_1 + \nu_2 - 1} = g(\Delta t),$$

$$\frac{1}{(\nu_1 - 1)!} \Delta t^{\nu_1 - 1} + \frac{p_1}{(\nu_1)!} \Delta t^{\nu_1} + \cdots + \frac{p_{\nu_2 - 1}}{(\nu_1 + \nu_2 - 2)!} \Delta t^{\nu_1 + \nu_2 - 2} = g'(\Delta t),$$

so ergibt sich:

$$f_k(t + \Delta t) = f_k(t) + f_k^{(\nu_1)} g(\Delta t) + \frac{f_k^{(\nu_1 + \nu_2)}}{(\nu_1 + \nu_2)!} \Delta t^{\nu_1 + \nu_2} + \cdots,$$

$$f_k'(t + \Delta t) = f_k^{(\nu_1)} g'(\Delta t) + \frac{f_k^{(\nu_1 + \nu_2)}}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!} \Delta t^{\nu_1 + \nu_2 - 1} + \cdots$$

Die Ausdrücke für die Richtungskosinus l, m, n benutzen wir in der Form:

$$l = \frac{\varepsilon^{\nu_1 + \nu_2} \{ w^2 f_1^{(\nu_1 + \nu_2)} - f_1^{(\nu_1)} \Sigma f_1^{(\nu_1)} f_1^{(\nu_1 + \nu_2)} \}}{w W}, \text{ usw.}$$

Man hat:

$$\Sigma f_1^{(\nu_1)}\left(w^2 f_1^{(\nu_1+\nu_2)} - f_1^{(\nu_1)} \Sigma f_1^{(\nu_1)} f_1^{(\nu_1+\nu_2)}\right) = 0,$$

$$\Sigma f_1^{(\nu_1+\nu_2)}\left(w^2 f_1^{(\nu_1+\nu_2)} - f_1^{(\nu_1)} \Sigma f_1^{(\nu_1)} f_1^{(\nu_1+\nu_2)}\right) = W^2,$$

$$\sqrt{\Sigma f_1'(t+\Delta t)^2} = \frac{\varepsilon^{\nu_1 - 1}}{(\nu_1 - 1)!} w \Delta t^{\nu_1 - 1} + \cdots$$

Es ist:

$$\alpha + \Delta\alpha = \frac{f_1'(t+\Delta t)}{\sqrt{\Sigma f_1'(t+\Delta t)^2}}, \quad \text{usw.},$$

folglich:

$$\Sigma l(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{\varepsilon^{\nu_2+1} W (\nu_1 - 1)!}{(\nu_1 + \nu_2 - 1)!\, w^2} \Delta t^{\nu_2} + \cdots$$

und damit:

$$h_1 = \frac{\varepsilon^{\nu_1+\nu_2} (\nu_1 + \nu_2 - 1)!\, w^3}{(\nu_1)!\, (\nu_1 - 1)!\, W} \Delta t^{\nu_1 - \nu_2} + \cdots$$

Beim Übergang zur Grenze $\Delta t = 0$ ergibt sich $\varrho = 0$, wenn $\nu_1 > \nu_2$; ferner:

$$\varrho = \frac{(2\nu_1 - 1)!\, w^3}{(\nu_1)!\, (\nu_1 - 1)!\, W},$$

wenn $\nu_1 = \nu_2$; endlich $\varrho = \infty$, wenn $\nu_1 < \nu_2$, und zwar erhält man nur einen unendlich fernen Krümmungsmittelpunkt oder zwei nach entgegengesetzten Richtungen hin unendlich fern liegende Krümmungsmittelpunkte, ja nachdem $\nu_1 + \nu_2$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Wollen wir mit dem für einen gewöhnlichen Punkt definierten ϱ an einen außergewöhnlichen Punkt herangehen, so ist der Ausdruck:

$$\varrho(t + \Delta t) = \frac{\left\{\sqrt{\Sigma f_1'(t+\Delta t)^2}\right\}^3}{\sqrt{\Sigma\left(f_2'(t+\Delta t) f_3''(t+\Delta t) - f_3'(t+\Delta t) f_2''(t+\Delta t)\right)^2}}$$

zu bilden und nach Potenzen von Δt zu entwickeln.

Man erhält:

$$\varrho(t + \Delta t) = \frac{\dfrac{\varepsilon^{\nu_1 - 1}}{((\nu_1 - 1)!)^3} w^3 \Delta t^{3\nu_1 - 3} + \cdots}{\dfrac{\nu_2}{(\nu_1 - 1)!\, (\nu_1 + \nu_2 - 1)!} W \varepsilon^{\nu_2 - 1} \Delta t^{2\nu_1 + \nu_2 - 3} + \cdots}$$

$$= \frac{\varepsilon^{\nu_1+\nu_2} (\nu_1 + \nu_2 - 1)!\, w^3}{\nu_2 ((\nu_1 - 1)!)^2 W} \Delta t^{\nu_1 - \nu_2} + \cdots,$$

und daraus ergibt sich beim Übergang zu $\Delta t = 0$ dasselbe Verhalten von ϱ wie vorhin.

2. **Die zweite Krümmung.** Legen wir wieder zuerst die im § 10 S. 229 gegebene Definition zugrunde, so haben wir zu setzen:

$$\Delta f_1 = \lambda \Delta s, \quad \Delta f_2 = \mu \Delta s, \quad \Delta f_3 = \nu \Delta s$$

und

$$\lambda_1 = l, \quad \lambda_2 = m, \quad \lambda_3 = n,$$

so daß:

$$h_1 = -\frac{\Delta s(1 + \Sigma l \Delta l)}{\Sigma \lambda \Delta l}.$$

Die Gleichung:

$$\Sigma(\lambda + \Delta\lambda)(l + \Delta l) = 0$$

ergibt:

$$\Sigma \lambda \Delta l = -\Sigma l \Delta \lambda - \Sigma \Delta \lambda \Delta l,$$

somit:

$$h_1 = \frac{\Delta s(1 + \Sigma l \Delta l)}{\Sigma l(\lambda + \Delta\lambda) + \Sigma \Delta l \Delta \lambda}.$$

Das Glied mit der niedrigsten Potenz von Δt im Zähler bzw. Nenner von h_1 stimmt überein mit dem entsprechenden Glied in der Entwicklung von Δs bzw. $\Sigma l(\lambda + \Delta\lambda)$.

Die Zähler von $\lambda + \Delta\lambda$, $\mu + \Delta\mu$, $\nu + \Delta\nu$ sind gleich:

$$f_2'(t + \Delta t) f_3''(t + \Delta t) - f_3'(t + \Delta t) f_2''(t + \Delta t), \quad \text{usw.}$$

Um diese Determinanten, soweit wie nötig, nach Potenzen von Δt zu entwickeln, nehmen wir an, daß die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \overset{(\nu_1)}{f_1}(t) & \overset{(\nu_1)}{f_2}(t) & \overset{(\nu_1)}{f_3}(t) \\ \overset{(\nu_1+\nu_2)}{f_1}(t) & \overset{(\nu_1+\nu_2)}{f_2}(t) & \overset{(\nu_1+\nu_2)}{f_3}(t) \\ \overset{(\nu_1+\nu_2+a)}{f_1}(t) & \overset{(\nu_1+\nu_2+a)}{f_2}(t) & \overset{(\nu_1+\nu_2+a)}{f_3}(t) \end{vmatrix}$$

verschwindet, solange die ganze positive Zahl a kleiner als ν_3 ist, daß sie aber für $a = \nu_3$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt, den wir mit D bezeichnen wollen. Dann gibt es nach einem bekannten Determinantensatz für $a < \nu_3$ eine Darstellung der Elemente der dritten Zeile obiger Determinante in der Form:

$$\overset{(\nu_1+\nu_2+a)}{f_k}(t) = p_{\nu_2+a} \overset{(\nu_1)}{f_k}(t) + q_a \overset{(\nu_1+\nu_2)}{f_k}(t),$$

wo k eine beliebige der Zahlen 1, 2, 3 bedeutet. Setzen wir daher:

$$g_1(\Delta t) = g(\Delta t) + \frac{p_{\nu_2+1}}{(\nu_1+\nu_2+1)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+1} + \frac{p_{\nu_2+2}}{(\nu_1+\nu_2+2)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+2}$$
$$+ \cdots \frac{p_{\nu_2+\nu_3-1}}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3-1},$$

$$g_2(\Delta t) = \frac{1}{(\nu_1+\nu_2)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2} + \frac{q_1}{(\nu_1+\nu_2+1)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+1}$$
$$+ \cdots \frac{q_{\nu_3-1}}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3-1},$$

so ergibt sich:

$$f_k(t + \Delta t) = f_k(t) + \overset{(\nu_1)}{f_k}(t)\, g_1(\Delta t) + \overset{(\nu_1+\nu_2)}{f_k}(t)\, g_2(\Delta t) + \frac{\overset{\nu_1+\nu_2+\nu_3}{f_k}(t)}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} + \cdots$$

Wir erhalten:

$$f_2'(t+\Delta t)f_3''(t+\Delta t) - f_3'(t+\Delta t)f_2''(t+\Delta t)$$

$$= \{f_2^{(\nu_1+\nu_2)}(t)\,f_3^{(\nu_1)}(t) - f_3^{(\nu_1+\nu_2)}(t)\,f_2^{(\nu_1)}(t)\}\{g_2'(\Delta t)g_1''(\Delta t) - g_1'(\Delta t)g_2''(\Delta t)\}$$

$$+ \{f_3^{(\nu_1)}(t)f_2^{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}(t) - f_2^{(\nu_1)}(t)\,f_3^{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}(t)\}\times$$

$$\left\{\frac{g_1''(\Delta t)}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3-1} - \frac{g_1'(\Delta t)}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3-2)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3-2}\right\} + \cdots$$

$$+ \{f_3^{(\nu_1+\nu_2)}(t)\,f_2^{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}(t) - f_2^{(\nu_1+\nu_2)}(t)\,f_3^{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}(t)\}\times$$

$$\left\{\frac{g_2''(\Delta t)}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3-1} - \frac{g_2'(\Delta t)}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3-2)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3-2}\right\} + \cdots$$

Dabei ist:

$$g_2'(\Delta t)g_1''(\Delta t) - g_1'(\Delta t)g_2''(\Delta t) = -\frac{\nu_2}{(\nu_1-1)!\,(\nu_1+\nu_2-1)!}\Delta t^{2\nu_1+\nu_2-3} + \cdots,$$

$$\frac{g_1''(\Delta t)}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3-1} - \frac{g_1'(\Delta t)}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3-2)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3-2}$$

$$= -\frac{\nu_2+\nu_3}{(\nu_1-1)!\,(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)!}\Delta t^{2\nu_1+\nu_2+\nu_3-3} + \cdots,$$

$$\frac{g_2''(\Delta t)}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3-1} - \frac{g_2'(\Delta t)}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3-2)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3-2}$$

$$= -\frac{\nu_3}{(\nu_1+\nu_2-1)!\,(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)!}\Delta t^{2\nu_1+2\nu_2+\nu_3-3} + \cdots$$

Für den Nenner von $\lambda + \Delta\lambda$ ergibt sich hiernach:

$$\sqrt{\Sigma(f_2'(t+\Delta t)f_3''(t+\Delta t)^2 - f_3'(t+\Delta t)^2 f_2''(t+\Delta t)^2}$$

$$= \frac{\varepsilon^{\nu_2-1}\nu_2}{(\nu_1-1)!\,(\nu_1+\nu_2-1)!}W\Delta t^{2\nu_1+\nu_2-3} + \cdots$$

Bei der Berechnung des Ausdrucks $\Sigma l(\lambda+\Delta\lambda)$ berücksichtige man, daß die Summe:

$$\Sigma f_1^{(\nu_1)}(f_2'(t+\Delta t)f_3''(t+\Delta t) - f_3'(t+\Delta t)f_2''(t+\Delta t)$$

mit der $2\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3 - 3^{\text{ten}}$ Potenz von Δt beginnt, während die Summe:

$$\Sigma f_1^{(\nu_1+\nu_2)}\big(f_2'(t+\Delta t)f_3''(t+\Delta t) - f_3'(t+\Delta t)f_2''(t+\Delta t)\big)$$

mit der $2\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 - 3^{\text{ten}}$ Potenz von Δt, also einer niedrigeren Potenz wie der vorigen, beginnt. Man erhält:

$$\Sigma l(\lambda+\Delta\lambda) = -\varepsilon^{\nu_1-1}\frac{(\nu_2+\nu_3)\,(\nu_1+\nu_2-1)!\,Dw}{\nu_2(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)!\,W^2}\Delta t^{\nu_3} + \cdots,$$

folglich:

$$h_1 = -\frac{\nu_2(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)!\,W^2}{(\nu_1)!\,(\nu_2+\nu_3)\,(\nu_1+\nu_2-1)!\,D}\Delta t^{\nu_1-\nu_3} + \cdots$$

Wenn $\nu_1 > \nu_3$, so ist an der betrachteten Stelle $r = 0$; wenn $\nu_1 < \nu_3$, so ist an der betrachteten Stelle r unendlich, und zwar, je nachdem $\nu_3 - \nu_1$ gerade oder ungerade ist, ergibt sich ein unendlicher ferner Mittelpunkt der zweiten Krümmung auf der Hauptnormalen, oder es sind zwei nach entgegengesetzten Richtungen hin unendlich fern liegende Krümmungsmittelpunkte vorhanden. Wenn endlich ν_1 gleich ν_3 ausfällt, ergibt sich ein endlicher, von Null verschiedener Halbmesser der zweiten Krümmung mit dem Werte:

$$r = -\frac{\nu_2(2\nu_1+\nu_2-1)!}{(\nu_1)!\,(\nu_1+\nu_2)!}\,\frac{W^2}{D}.$$

Dasselbe Ergebnis muß sich auch dadurch herleiten lassen, daß man mit dem für eine gewöhnliche Stelle gebildeten Ausdruck von r an eine außergewöhnliche Stelle herangeht, mit anderen Worten durch Bestimmung des Grenzwerts ($\varDelta t = 0$) des Ausdrucks:

$$r(t+\varDelta t) = -\frac{\Sigma\big(f_2'(t+\varDelta t)f_3''(t+\varDelta t) - f_3'(t+\varDelta t)f_2''(t+\varDelta t)\big)^2}{\Sigma f_1'''(t+\varDelta t)\big(f_2'(t+\varDelta t)f_3''(t+\varDelta t) - f_3'(t+\varDelta t)f_2''(t+\varDelta t)\big)}.$$

Hier beginnt die Entwicklung des Nenners mit dem Gliede:

$$\left(\frac{\nu_3}{(\nu_1-3)!\,(\nu_1+\nu_2-1)!\,(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)!} - \frac{\nu_2+\nu_3}{(\nu_1-1)!\,(\nu_1+\nu_2-3)!\,(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)!}\right.$$
$$\left. + \frac{\nu_2}{(\nu_1-1)!\,(\nu_1+\nu_2-1)!\,(\nu_1+\nu_2+\nu_3-3)!}\right) D\varDelta t^{3\nu_1+2\nu_2+\nu_3-6},$$

oder:

$$\frac{\nu_2\nu_3(\nu_2+\nu_3)D}{(\nu_1-1)!\,(\nu_1+\nu_2-1)!\,(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)!}\,\varDelta t^{3\nu_1+2\nu_2+\nu_3-6},$$

wir erhalten daher:

$$r(t+\varDelta t) = -\frac{\nu_2(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)!}{\nu_3(\nu_2+\nu_3)(\nu_1-1)!\,(\nu_1+\nu_2-1)!}\,\frac{W^2}{D}\,\varDelta t^{\nu_1-\nu_3} + \cdots,$$

woraus sich für den Grenzfall $\varDelta t = 0$ dieselben Folgerungen wie vorhin ergeben.

§ 15. Die Bogenlänge als unabhängige Veränderliche.

Betrachten wir die Koordinaten einer Raumkurve als Funktionen ihrer Bogenlänge $s\big(x = g_1(s),\ y = g_2(s),\ z = g_3(s)\big)$, so lassen sich die für eine ebene Kurve im ersten Teil § 5 durchgeführten Entwicklungen ohne weiteres auf eine Raumkurve übertragen. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich die Koordinaten an der Stelle $s + \varDelta s$ nach ganzen Potenzen von $\varDelta s$ oder nach ganzen Potenzen von $\varDelta_1 s^{\frac{1}{\nu_1}} = (\varepsilon^{\nu_1-1}\varDelta s)^{\frac{1}{\nu_1}}$ entwickelt werden können. Im ersten Fall bezeichnen wir mit k den kleinsten, die Eins übertreffenden

Wert von a, für den die Ableitungen $g_1^{(a)}(s)$, $g_2^{(a)}(s)$, $g_3^{(a)}(s)$ nicht gleichzeitig verschwinden, und erhalten:

$$g_1(s+\varDelta s) = g_1(s) + g_1'(s)\varDelta s + \frac{1}{k!}g_1^{(k)}(s)\varDelta s^k + \cdots, \quad \text{usw.}$$

Die Richtungskosinus der positiven Halbtangente im Punkte (s) sind:

$$\alpha = g_1'(s), \quad \beta = g_2'(s), \quad \gamma = g_3'(s),$$

die der positiven Hauptnormalen:

$$l = \lim_{\varDelta s = 0} \frac{g_1''(s+\varDelta s)}{\sqrt{\Sigma g_1''(s+\varDelta s)^2}} = \varepsilon^k \frac{g_1^{(k)}(s)}{\sqrt{\Sigma g_1^{(k)}(s)^2}},$$

$$m = \varepsilon^k \frac{g_2^{(k)}(s)}{\sqrt{\Sigma g_1^{(k)}(s)^2}}, \qquad n = \varepsilon^k \frac{g_3^{(k)}(s)}{\sqrt{\Sigma g_1^{(k)}(s)^2}}.$$

Dies stimmt mit der früheren Bestimmung der Hauptnormalen in § 13 S. 245 überein, da hier $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = k-1$.

Für den Halbmesser der ersten Krümmung ergibt sich die Beziehung:

$$\varrho(s+\varDelta s) = \frac{\varepsilon^k \varDelta s^{2-k}}{\sqrt{\Sigma g_1^{(k)}(s)^2}} + \cdots$$

Sobald $k > 2$, wird der absolute Betrag von ϱ bei $\varDelta s = 0$ unendlich groß; es gibt dann einen oder zwei unendlich fern liegende Krümmungsmittelpunkte für die Stelle (s), je nachdem k gerade oder ungerade ist.

Um die Entwicklung des Halbmessers der zweiten Krümmung vorzunehmen, setzen wir fest, daß k_1 den kleinsten, von Null verschiedenen Wert von a bedeuten soll, für den die Determinante:

$$\begin{vmatrix} g_1'(s) & g_2'(s) & g_3'(s) \\ g_1^{(k)}(s) & g_2^{(k)}(s) & g_3^{(k)}(s) \\ g_1^{(k+a)}(s) & g_2^{(k+a)}(s) & g_3^{(k+a)}(s) \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Der Wert der Determinante für $a = k_1$ werde mit D_1 bezeichnet. Am einfachsten bedienen wir uns der S. 251 für $r(t+\varDelta t)$ gefundenen Entwicklung. Statt t tritt hier s auf, die Zahlen ν_1, ν_2, ν_3 haben hier der Reihe nach die Werte $1, k-1, k_1$.

Die Zahl W^2 ist gleich:

$$\Sigma\left(g_2'(s)g_3^{(k)}(s) - g_3'(s)g_2^{(k)}(s)\right)^2.$$

Die Entwicklung des identisch verschwindenden Ausdrucks:

$$\Sigma g_1'(s+\varDelta s)^2 - 1$$

nach Potenzen von Δs liefert die Beziehung:

$$g_1'(s)\overset{(k)}{g_1}(s) + g_2'(s)\overset{(k)}{g_2}(s) + g_3'(s)\overset{(k)}{g_3}(s) = 0,$$

folglich ergibt sich:

$$W^2 = \Sigma \overset{(k)}{g_1}(s)^2.$$

Wir erhalten daher:

$$r(s+\Delta s) = -\frac{(k+k_1-2)!}{k_1(k-2)!}\,\frac{\Sigma g_1^{(k)}(s)^2}{D_1}\,\Delta s^{1-k_1} + \cdots$$

Für $\Delta s = 0$ bleibt r endlich, wenn $k_1 = 1$.

Falls die Entwicklungen der Koordinaten an der Stelle $s+\Delta s$ nach gebrochenen Potenzen von $\Delta_1 s$ fortschreiten, besitzen sie die Form:

$$g_1(s+\Delta s) = g_1(s) + g_{10}(s)\Delta_1 s + g_{1,\nu_2}\Delta_1 s^{\frac{\nu_1+\nu_2}{\nu_1}} + \cdots, \text{ usw.}$$

Die Richtungskosinus der positiven Halbtangente an der Stelle (s) sind hier:

$$\alpha = g_{10}(s), \quad \beta = g_{20}(s), \quad \gamma = g_{30}(s),$$

die der positiven Hauptnormalen:

$$l = \varepsilon^{\nu_1+\nu_2}\frac{g_{1,\nu_2}(s)}{\sqrt{\Sigma g_{1,\nu_2}(s)^2}}, \quad m = \varepsilon^{\nu_1+\nu_2}\frac{g_{2,\nu_2}(s)}{\sqrt{\Sigma g_{1,\nu_2}(s)^2}}, \quad n = \varepsilon^{\nu_1+\nu_2}\frac{g_{3,\nu_2}(s)}{\sqrt{\Sigma g_{1,\nu_2}(s)^2}}.$$

Für den Halbmesser der ersten Krümmung an der Stelle $(s+\Delta s)$ ergibt sich:

$$\varrho(s+\Delta s) = \frac{1}{\sqrt{\Sigma g_1''(s+\Delta s)^2}} = \varepsilon^{\nu_1+\nu_2}\frac{\nu_1^2}{\nu_2(\nu_1+\nu_2)\sqrt{\Sigma g_{1,\nu_2}(s)^2}}\,\Delta_1 s^{\frac{\nu_1-\nu_2}{\nu_1}} + \cdots$$

Wir können diese Entwicklung auch aus der S. 248 für $\varrho(t+\Delta t)$ gefundenen herleiten. Nehmen wir nämlich $\Delta_1 s^{\frac{1}{\nu_1}} = \tau$, so lassen sich die Reihen für $g_1(s+\Delta s)$, $g_2(s+\Delta s)$, $g_3(s+\Delta s)$ als Entwicklungen nach ganzen Potenzen von τ für die Umgebung der Stelle $\tau = 0$ auffassen, so daß:

$$g_1(s+\Delta s) = \varphi_1(\tau), \quad g_2(s+\Delta s) = \varphi_2(\tau), \quad g_3(s+\Delta s) = \varphi_3(\tau).$$

Dann ist:

$$\overset{(\nu_1)}{\varphi_1}(0) = \nu_1!\; g_{10}(s), \quad \overset{(\nu_1+\nu_2)}{\varphi_1}(0) = (\nu_1+\nu_2)!\; g_{1,\nu_2}(s), \text{ usw.}$$

Infolgedessen erhalten die a. a. O. mit w und W bezeichneten Zahlen die Ausdrücke:

$$w = \nu_1!, \quad W = \nu_1!\,(\nu_1+\nu_2)!\sqrt{\Sigma g_{1,\nu_2}(s)^2},$$

wo die letzte Gleichung auf Grund der Beziehung:

$$g_{10}(s)g_{1,\nu_2}(s) + g_{20}(s)g_{2,\nu_2}(s) + g_{30}(s)g_{3,\nu_2}(s) = 0$$

gewonnen wird; somit:

$$\varrho(\tau) = \varrho(s+\Delta s) = \varepsilon^{\nu_1+\nu_2}\frac{\nu_1^2}{\nu_2(\nu_1+\nu_2)\sqrt{\Sigma g_{1,\nu_2}(s)^2}}\,\tau^{\nu_1-\nu_2} + \cdots, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Auf diesem Wege soll auch der Halbmesser der zweiten Krümmung bestimmt werden.

Der kleinste, die Null übertreffende Wert von a, für den die Determinante:

$$\begin{vmatrix} g_{10}(s) & g_{20}(s) & g_{30}(s) \\ g_{1,\nu_2}(s) & g_{2,\nu_2}(s) & g_{3,\nu_2}(s) \\ g_{1,\nu_2+a}(s) & g_{2,\nu_2+a}(s) & g_{3,\nu_2+a}(s) \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, ist gleich ν_3. Man überzeugt sich hiervon leicht, wenn man die beiden Seiten der identischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} f_1'\,(t+\Delta t) & f_2'\,(t+\Delta t) & f_3'\,(t+\Delta t) \\ f_1''\,(t+\Delta t) & f_2''\,(t+\Delta t) & f_3''\,(t+\Delta t) \\ f_1'''(t+\Delta t) & f_2'''(t+\Delta t) & f_3'''(t+\Delta t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_1'\,(s+\Delta s) & g_2'\,(s+\Delta s) & g_3'\,(s+\Delta s) \\ g_1''\,(s+\Delta s) & g_2''(s+\Delta s) & g_3''(s+\Delta s) \\ g_1'''(s+\Delta s) & g_2'''(s+\Delta s) & g_3'''(s+\Delta s) \end{vmatrix} \left(\frac{d\Delta s}{d\Delta t}\right)^6$$

nach Potenzen von Δt entwickelt. Es ist ν_3 zugleich der kleinste, die Null übertreffende Wert von a, für den die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \overset{(\nu_1)}{\varphi_1}(0) & \overset{(\nu_1)}{\varphi_2}(0) & \overset{(\nu_1)}{\varphi_3}(0) \\ \overset{(\nu_1+\nu_2)}{\varphi_1\;(0)} & \overset{(\nu_1+\nu_2)}{\varphi_2\;(0)} & \overset{(\nu_1+\nu_2)}{\varphi_3\;(0)} \\ \overset{(\nu_1+\nu_2+a)}{\varphi_1\;\;(0)} & \overset{(\nu_1+\nu_2+a)}{\varphi_2\;\;(0)} & \overset{(\nu_1+\nu_2+a)}{\varphi_3\;\;(0)} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet.

Für $a = \nu_3$ werde die vorletzte Determinante mit D_2, die letzte mit D_0 bezeichnet. Man hat dann:

$$D_0 = \nu_1!\;(\nu_1+\nu_2)!\;(\nu_1+\nu_2+\nu_3)!\;D_2,$$

somit ergibt sich unter Benutzung der S. 251 für $r(t+\Delta t)$ gefundenen Entwicklung:

$$r(\tau) = r(s+\Delta s) = -\frac{\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2)}{\nu_3(\nu_2+\nu_3)(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}\frac{\Sigma g_{1,\nu_2}(s)^2}{D_2}\Delta_1 s^{\frac{\nu_1-\nu_3}{\nu_1}} + \cdots$$

Der Halbmesser der ersten Krümmung besitzt an der Stelle (s) einen endlichen Wert, wenn $\nu_1 = \nu_2$. In diesem Falle ist:

$$\varrho = \frac{1}{2\sqrt{\Sigma g_{1,\nu_1}(s)^2}}.$$

Der Halbmesser der zweiten Krümmung besitzt an der Stelle (s) einen endlichen Wert, wenn $\nu_1 = \nu_3$. In diesem Falle ergibt sich:

$$r = -\frac{\nu_2}{(2\nu_1+\nu_2)}\frac{\Sigma g_{1,\nu_2}(s)^2}{D_2}.$$

Sind beide Halbmesser endlich, so ist $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$, und für r besteht die Gleichung:

$$r = -\frac{1}{3}\frac{\Sigma g_{1,\nu_1}(s)^2}{D_2}.$$

§ 16. Die senkrechten Projektionen der Umgebung eines außergewöhnlichen Punktes einer Raumkurve auf die Seitenflächen des begleitenden Dreikants.

Um das Verhalten einer Raumkurve in der Nähe eines außergewöhnlichen Punktes zu untersuchen, projizieren wir sie senkrecht auf die Ebenen des begleitenden Dreikants. Diese Ebenen werden nicht beeinflußt durch die Art und Weise, wie man die positiven Teile der Binormale und Hauptnormale festlegt. Wir benutzen daher diejenigen Bestimmungen der positiven Teile der Tangente, Haupt- und Binormale, die sich für $\varepsilon = 1$ ergeben, so daß:

$$\alpha = \frac{f_1^{(\nu_1)}}{\sqrt{\Sigma(f_1^{(\nu_1)})^2}} = \frac{f_1^{(\nu_1)}}{w},$$

$$l = \frac{f_1^{(\nu_1+\nu_2)}\Sigma(f_1^{(\nu_1)})^2 - f_1^{(\nu_1)}\Sigma f_1^{(\nu_1)} f_1^{(\nu_1+\nu_2)}}{wW},$$

$$\lambda = \frac{f_2^{(\nu_1)} f_3^{(\nu_1+\nu_2)} - f_3^{(\nu_1)} f_2^{(\nu_1+\nu_2)}}{W},$$

wo:

$$W = \sqrt{\Sigma(f_2^{(\nu_1)} f_3^{(\nu_1+\nu_2)} - f_3^{(\nu_1)} f_2^{(\nu_1+\nu_2)})^2}.$$

Wie in § 4 S. 201 sei:

$$\xi = \alpha\Delta f_1 + \beta\Delta f_2 + \gamma\Delta f_3,$$

$$\eta = l\Delta f_1 + m\Delta f_2 + n\Delta f_3,$$

$$\zeta = \lambda\Delta f_1 + \mu\Delta f_2 + \nu\Delta f_3.$$

Hier ist die Entwicklung:

$$\Delta f_k = f_k^{(\nu_1)} g_1(\Delta t) + f_k^{(\nu_1+\nu_2)} g_2(\Delta t) + \frac{f_k^{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} + \cdots$$

zu benutzen, wo $g_1(\Delta t)$ mit dem Gliede $\frac{1}{(\nu_1)!}\Delta t^{\nu_1}$, $g_2(\Delta t)$ mit dem Gliede $\frac{1}{(\nu_1+\nu_2)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2}$ beginnt. Wir erhalten:

$$\xi = \frac{w}{(\nu_1)!}\Delta t^{\nu_1} + \cdots, \quad \eta = \frac{W}{w(\nu_1+\nu_2)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2} + \cdots,$$

$$\zeta = \frac{D}{W(\nu_1+\nu_2+\nu_3)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} + \cdots$$

1. Die Projektion der Raumkurve auf die Schmiegungsebene wird dargestellt durch die Gleichungen:

$$\xi = \frac{w}{(\nu_1)!}\Delta t^{\nu_1} + \cdots, \quad \eta = \frac{W}{w(\nu_1+\nu_2)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2} + \cdots$$

Die im ersten Teil § 1 S. 5 benutzten Zahlen ν und λ bezeichnen wir fortan mit ν' und λ' und erhalten $\nu' = \nu_1$, $\lambda' = \nu_2$. Die Projektion besitzt im außergewöhnlichen Punkt, wenn ν_1 ungerade und ν_2 ungerade, eine gewöhnliche Tangente; wenn ν_1 ungerade und ν_2 gerade, eine Wendetangente; wenn ν_1 gerade und ν_2 ungerade, eine Hellebardenspitze; wenn ν_1 gerade und ν_2 gerade, eine Schnabelspitze.

2. Die Projektion der Raumkurve auf die Normalebene wird dargestellt durch die Gleichungen:

$$\eta = \frac{W}{w(\nu_1+\nu_2)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2} + \ldots, \quad \zeta = \frac{D}{W(\nu_1+\nu_2+\nu_3)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} + \ldots$$

Für die Zahlen ν' und λ' erhalten wir hier die Werte $\nu_1 + \nu_2$ und ν_3. Die Projektion besitzt im außergewöhnlichen Punkt, wenn $\nu_1 + \nu_2$ ungerade und ν_3 ungerade, eine gewöhnliche Tangente; wenn $\nu_1 + \nu_2$ ungerade und ν_3 gerade, eine Wendetangente; wenn $\nu_1 + \nu_2$ gerade und ν_3 ungerade, eine Hellebardenspitze; wenn $\nu_1 + \nu_2$ gerade und ν_3 gerade, eine Schnabelspitze.

3. Die Projektion der Raumkurve auf die rektifizierende Ebene wird dargestellt durch die Gleichungen:

$$\xi = \frac{w}{(\nu_1)!}\Delta t^{\nu_1} \ldots, \quad \zeta = \frac{D}{W(\nu_1+\nu_2+\nu_3)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} + \ldots$$

Für die Zahlen ν' und λ' ergeben sich die Werte ν_1 und $\nu_2 + \nu_3$. Die Projektion besitzt im außergewöhnlichen Punkt, wenn ν_1 ungerade und $\nu_2 + \nu_3$ ungerade, eine gewöhnliche Tangente; wenn ν_1 ungerade und $\nu_2 + \nu_3$ gerade, eine Wendetangente; wenn ν_1 gerade und $\nu_2 + \nu_3$ ungerade, eine Hellebardenspitze; wenn ν_1 gerade und $\nu_2 + \nu_3$ gerade, eine Schnabelspitze.

Man kann sich von der Umgebung des außergewöhnlichen Punktes eine anschauliche Vorstellung machen, wenn man sich die Kurve von einem beweglichen Punkt in der Richtung durchlaufen denkt, die dem Übergang von einem positiven Δt zu einem negativen Δt entspricht. Behalten wir die im § 4 S. 202 erklärte Bezeichnung der Oktanten bei, so liegt der Punkt ξ, η, ζ bei positivem Δt im ersten oder fünften Oktanten, je nachdem D positiv oder negativ ist. Wir setzen D als positiv voraus. Der entgegengesetzte Fall ist entsprechend zu erledigen. Der bewegliche Punkt befindet sich demnach bei der Annäherung an den außergewöhnlichen Punkt im ersten Oktanten, und es sind die folgenden Fälle möglich:

1. Er tritt bei der Entfernung von dem außergewöhnlichen Punkt in den ersten Oktanten zurück, wenn für $\Delta t < 0$ sich $\xi > 0$, $\eta > 0$ $\zeta > 0$ ergibt. Dazu müssen ν_1, ν_2, ν_3 sämtlich gerade sein. Die Kurve besitzt im außergewöhnlichen Punkt eine Spitze; ihre Projektionen auf die drei Koordinatenebenen besitzen in ihm Schnabelspitzen.

2. Er tritt bei der Entfernung von dem außergewöhnlichen Punkt in den zweiten Oktanten. Dann muß für ein negatives Δt sich $\xi < 0$, $\eta > 0$, $\zeta > 0$ ergeben, und damit muß ν_1 ungerade, ν_2 ungerade, ν_3 gerade sein. Die Projektion der Raumkurve auf die Schmiegungsebene (S. E.) besitzt im außergewöhnlichen Punkt eine gewöhnliche Tangente, die Projektion auf die Normalebene (N. E.) eine Schnabelspitze, die Projektion auf die rektifizierende Ebene (R. E.) eine gewöhnliche Tangente.

3. Er tritt in den dritten Oktanten über. Da muß sich für $\Delta t < 0$ ergeben $\xi < 0$, $\eta < 0$, $\zeta > 0$, d. h. ν_1 ungerade, ν_2 gerade, ν_3 ungerade. Die Projektion der Raumkurve auf die (S. E.) besitzt im außergewöhnlichen Punkt eine Wendetangente, die Projektion auf die (N. E.) eine gewöhnliche Tangente, die Projektion auf die (R. E.) ebenfalls.

4. Er tritt in den vierten Oktanten über. Da muß für $\Delta t < 0$ sich $\xi > 0$, $\eta < 0$, $\zeta > 0$ ergeben, d. h. ν_1 gerade, ν_2 ungerade, ν_3 ungerade. Die Projektion auf die (S. E.) besitzt im außergewöhnlichen Punkt eine Hellebardenspitze, die Projektion auf die (N. E.) eine gewöhnliche Tangente, die Projektion auf die (R. E.) eine Schnabelspitze.

5. Er tritt in den fünften Oktanten über. Da muß für $\Delta t < 0$ sich $\xi > 0$, $\eta > 0$, $\zeta < 0$ ergeben, d. h. ν_1 gerade, ν_2 gerade, ν_3 ungerade sein. Die Projektion der Raumkurve auf die (S. E.) besitzt im außergewöhnlichen Punkt eine Schnabelspitze, die Projektion auf die (N. E.) eine Hellebardenspitze, die Projektion auf die (R. E.) ebenfalls.

6. Er tritt in den sechsten Oktanten über. Da muß für $\Delta t < 0$ sich $\xi < 0$, $\eta > 0$, $\zeta < 0$ ergeben, d. h. ν_1 ungerade, ν_2 ungerade, ν_3 ungerade sein. Die Projektion der Raumkurve auf die (S. E.) hat im außergewöhnlichen Punkt eine gewöhnliche Tangente, die Projektion auf die (N. E.) eine Hellebardenspitze, die Projektion auf die (R. E.) eine Wendetangente.

7. Er tritt in den siebenten Oktanten über. Da muß für $\Delta t < 0$ sich $\xi < 0$, $\eta < 0$, $\zeta < 0$ ergeben, d. h. ν_1 ungerade, ν_2 gerade, ν_3 gerade sein. Jede der drei Projektionen besitzt im außergewöhnlichen Punkt eine Wendetangente.

8. Er tritt in den achten Oktanten ein. Hier muß für $\Delta t < 0$ sich $\xi > 0$, $\eta < 0$, $\zeta < 0$ ergeben, d. h. ν_1 gerade, ν_2 ungerade, ν_3 gerade sein. Die Projektion der Raumkurve auf die (S. E.) und die auf die (R. E.) besitzt im außergewöhnlichen Punkt eine Hellebardenspitze, die Projektion auf die (N. E.) eine Wendetangente.

§ 17. Ausgezeichnete ebene Schnitte der Tangentenfläche einer Raumkurve.

Im vorigen Paragraphen versuchten wir uns die Umgebung eines Kurvenpunktes dadurch zu veranschaulichen, daß wir die senkrechten

Die im ersten Teil § 1 S. 5 benutzten Zahlen ν und
wir fortan mit ν' und λ' und erhalten $\nu' = \nu_1$, $\lambda' = \nu_2$.
besitzt im außergewöhnlichen Punkt, wenn ν_1 ungerade
eine gewöhnliche Tangente; wenn ν_1 ungerade u
Wendetangente; wenn ν_1 gerade und ν_2 unger
spitze; wenn ν_1 gerade und ν_2 gerade, eine S

2. Die Projektion der Raumkurve auf d
gestellt durch die Gleichungen:

$$\eta = \frac{W}{w(\nu_1+\nu_2)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2} + \cdots, \quad \xi = \frac{}{W}$$

Für die Zahlen ν' und λ' erh
und ν_3. Die Projektion besitzt i
$\nu_1 + \nu_2$ ungerade und ν_3 ungera
$\nu_1 + \nu_2$ ungerade und ν_3 gerad
gerade und ν_3 ungerade, ein
und ν_3 gerade, eine Schnab

3. Die Projektion d
wird dargestellt durch d

$$\xi = \frac{w}{(\nu_1)!}\Delta t^{\nu_1}$$

Für die Zahle ... Gleichungen:
Die Projektion b
und $\nu_1 + \nu_3$ ur ... $\eta_1(l \cos\varphi + \lambda \sin\varphi)$,
und $\nu_2 + \nu_3$ ... $\xi\beta + \eta_1(m\cos\varphi + \mu\sin\varphi)$,
ungerade, e ... $f_3(t) + \xi\gamma + \eta_1(n\cos\varphi + \nu\sin\varphi)$
eine Schn

Ma ... ξ-Achse fällt mit der Kurventangente zusammen. Die
Punkt ... liegt in der Normalebene und ihr positiver Teil bildet mit
von ... positiven Teil der Hauptnormalen den Winkel φ. Dabei soll
die ... vorigen Paragraphen S. 255 benutzte Bestimmung von α, l, λ usw.
angewandt werden.

Für den Schnitt unserer Ebene mit der Tangentenfläche bestehen die Gleichungen:

$$\xi\alpha + \eta_1(l\cos\varphi + \lambda\sin\varphi) = \Delta f_1 + h f_1'(t + \Delta t), \text{ usw.}$$

Man hat:

$$\Delta f_1 = \overset{(\nu_1)}{f_1}(t) g_1(\Delta t) + \overset{(\nu_1+\nu_2)}{f_1}(t)\, g_2(\Delta t) + \frac{\overset{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}{f_1}(t)}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} + \cdots$$

$$f_1'(t+\Delta t) = \overset{(\nu_1)}{f_1}(t) g_1'(\Delta t) + \overset{(\nu_1+\nu_2)}{f_1}(t)\, g_2'(\Delta t) + \frac{\overset{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}{f_1}(t)}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)!}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3-1} + \cdots$$

ltiplizieren wir die Gleichungen für ξ und η_1 der Reihe nach $\varphi - \lambda \cos\varphi$, $m \sin\varphi - \mu \cos\varphi$, $n \sin\varphi - \nu \cos\varphi$ und e, so entsteht:

$$t) + \cdots + h\left(\frac{W}{w} g_2'(\varDelta t) + \cdots\right)\Big\}$$

$$- \cos\varphi\left\{\frac{D}{W(\nu_1+\nu_2+\nu_3)!}\varDelta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} + \cdots\right.$$

$$\left. + h\left(\frac{D}{W(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)!}\varDelta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3-1} + \cdots\right)\right\} = 0.$$

Null verschieden ist, ergibt sich:

$$= - \frac{\varDelta t}{\nu_1+\nu_2} + \cdots$$

$$\varDelta t)\Big) = \frac{\nu_2 w}{\nu_1 !\, (\nu_1+\nu_2)} \varDelta t^{\nu_1} + \cdots$$

$$\sin\varphi\{\Sigma\lambda\varDelta f_1 + h\Sigma\lambda f_1'(t+\varDelta t)\}.$$

$$_1(t+\varDelta t)\} - \cos\varphi\{\Sigma\lambda\varDelta f_1 + h\Sigma\lambda f_1'(t+\varDelta t)\} = 0,$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\sin\varphi}\{\Sigma\lambda\varDelta f_1 + h\Sigma\lambda f_1'(t+\varDelta t)\}$$

$$= \frac{D}{W\sin\varphi}\frac{(-\nu_3)}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)!\,(\nu_1-\nu_2)}\varDelta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} + \cdots$$

Hiermit ist die Schnittlinie, wenn wir von ihrem mit der Tangente zusammenfallenden Teil absehen, gefunden.

Für die kennzeichnenden Zahlen ν' und λ' erhält man die Werte ν_1 und $\nu_2 + \nu_3$. Stellen wir uns auf den S. 256 eingenommenen Standpunkt, so besitzt in dem zu t gehörenden Punkt die Schnittlinie eine gewöhnliche Tangente, wenn die Ausgangskurve aus dem ersten in den zweiten oder dritten Oktanten tritt. Diese Tangente ist stationär, wenn $\nu_1 < \nu_2 + \nu_3$. Die Schnittlinie besitzt eine Wendetangente, falls die Ausgangskurve aus dem ersten Oktanten in den sechsten oder siebenten tritt; eine Schnabelspitze, wenn die Ausgangskurve aus dem ersten in den vierten Oktanten tritt, oder in den ersten zurücktritt; eine Hellebardenspitze, wenn die Ausgangskurve aus dem ersten Oktanten in den fünften oder achten tritt.

b) Ist $\sin\varphi$ gleich Null, so haben wir es mit dem Schnitt der Schmiegungsebene mit der Tangentenfläche zu tun. Wir schreiben hier η statt η_1. Dann findet sich:

$$h = -\frac{\Delta t}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} + \cdots,$$

$$\xi = \frac{(\nu_2 + \nu_3) w}{\nu_1 ! \, (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)} \Delta t^{\nu_1} + \cdots,$$

$$\eta = \frac{W \nu_3}{w(\nu_1 + \nu_2)! \, (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)} \Delta t^{\nu_1 + \nu_2} + \cdots$$

Die kennzeichnenden Zahlen ν' und λ' stimmen hier mit ν_1 und ν_2 überein. Im Falle $\nu_1 = \nu_2$ ergibt sich ein endlicher, von Null verschiedener Krümmungshalbmesser (ϱ') der Schnittkurve, den wir berechnen wollen. Es ist:

$$\frac{d^{(\nu_1)}\xi}{dt^{\nu_1}} = \frac{(\nu_1 + \nu_3) w}{(2\nu_1 + \nu_3)}, \quad \frac{d^{(2\nu_1)}\eta}{dt^{2\nu_1}} = \frac{\nu_3 W}{w(2\nu_1 + \nu_3)},$$

somit nach S. 10:

$$\varrho' = \frac{(2\nu_1 - 1)!}{\nu_1 ! \, (\nu_1 - 1)!} \, \frac{(\nu_1 + \nu_3)^2}{\nu_3 (2\nu_1 + \nu_3)} \, \frac{w^3}{W}.$$

Der Krümmungshalbmesser ϱ' ist mit dem Halbmesser ϱ der ersten Krümmung der Ausgangskurve (S. 248) durch die Gleichung verbunden:

$$\varrho' = \frac{(\nu_1 + \nu_3)^2}{\nu_3 (2\nu_1 + \nu_3)} \varrho.$$

Wenn $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$, erhalten wir:

$$\varrho' = \frac{4}{3} \varrho.$$

Für den allgemeinen Fall $\nu_1 = 1$ ist dies Ergebnis von V. Jamet gefunden. (Comptes rendus der Pariser Akademie Bd. 100. 1885. S. 1329.)

2. Schnitt der Tangentenfläche mit einer die Hauptnormale enthaltenden Ebene.

Eine solche Ebene stellen wir durch die Gleichungen dar:

$$x = f_1(t) + \eta l + \xi_1(\alpha \cos \varphi + \lambda \sin \varphi), \text{ usw.}$$

Die η-Achse fällt mit der Hauptnormalen zusammen, während der positive Teil der ξ_1-Achse mit der Tangente den Winkel φ bildet.

Für den Schnitt der Ebene mit der Tangentenfläche bestehen die Gleichungen:

$$\eta l + \xi_1(\alpha \cos \varphi + \lambda \sin \varphi) = \Delta f_1 + h f_1'(t + \Delta t), \text{ usw.}$$

Wir multiplizieren sie der Reihe nach mit $\alpha \sin \varphi - \lambda \cos \varphi$ usw. und addieren sie. Dann entsteht:

$$\sin \varphi \{ \Sigma \alpha \Delta f_1 + h \Sigma \alpha f_1'(t + \Delta t) \} - \cos \varphi \{ \Sigma \lambda \Delta f_1 + h \Sigma \lambda f_1'(t + \Delta t) \} = 0.$$

Ist $\sin \varphi$ von Null verschieden, so ergibt sich:

$$h = -\frac{\Delta t}{\nu_1} + \cdots$$

Für η erhält man die Entwicklung:

$$\eta = \frac{-\nu_2}{(\nu_1+\nu_2)!\,\nu_1}\,\frac{W}{w}\,\Delta t^{\nu_1+\nu_2} + \cdots$$

Für ζ_1 folgt zunächst:

$$\zeta_1 = \cos\varphi\{\Sigma\alpha\Delta f_1 + h\Sigma\alpha f_1'(t+\Delta t)\} + \sin\varphi\{\Sigma\lambda\Delta f_1 + h\Sigma\lambda f_1'(t+\Delta t)\},$$

sodann auf Grund der viertletzten Gleichung:

$$\zeta_1 = \frac{1}{\sin\varphi}\{\Sigma\lambda\Delta f_1 + h\Sigma\lambda f_1'(t+\Delta t)\},$$

somit unter Berücksichtigung der Entwicklung von h:

$$\zeta_1 = -\frac{(\nu_2+\nu_3)}{\sin\varphi\,(\nu_1+\nu_2+\nu_3)!\,\nu_1}\,\frac{D}{W}\,\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} + \cdots$$

Stellen wir uns auf den S. 256 eingenommenen Standpunkt, so hat die Schnittlinie in dem zu t gehörenden Punkt, wenn die Ausgangskurve aus dem ersten Oktanten in den dritten oder vierten tritt, eine gewöhnliche Tangente; tritt sie in den siebenten oder achten Oktanten, so hat sie eine Wendetangente; tritt sie in den zweiten Oktanten, oder in den ersten zurück, so hat sie eine Schnabelspitze; tritt sie in den fünften oder sechsten Oktanten, so hat sie eine Hellebardenspitze.

Wenn $\sin\varphi = 1$, so bestimmen die Gleichungen für η und ζ_1 den Schnitt der Tangentenfläche mit der Normalebene der Ausgangskurve.

3. Schnitt der Tangentenfläche mit einer die Binormale enthaltenden Ebene.

Eine solche Ebene stellen wir dar durch die Gleichungen:

$$x = f_1(t) + \xi_1(\alpha\cos\varphi + l\sin\varphi) + \zeta\lambda, \text{ usw.}$$

Die ζ-Achse fällt mit der Binormalen zusammen; der positive Teil der ξ_1-Achse bildet mit der positiven Halbtangente den Winkel φ.

Für den Schnitt der Ebene mit der Tangentenfläche bestehen die Gleichungen:

$$\xi_1(\alpha\cos\varphi + l\sin\varphi) + \zeta\lambda = \Delta f_1 + hf_1'(t+\Delta t), \text{ usw.}$$

Multiplizieren wir dieselben der Reihe nach mit $\alpha\sin\varphi - l\cos\varphi$, usw. und addieren sie, so folgt:

$$\sin\varphi\{\Sigma\alpha\Delta f_1 + h\alpha f_1'(t+\Delta t)\} - \cos\varphi\{\Sigma l\Delta f_1 + h\Sigma l f_1'(t+\Delta t)\} = 0.$$

a) Unter der Voraussetzung $\sin\varphi \gtrless 0$ ergibt diese Gleichung:

$$h = -\frac{\Delta t}{\nu_1} + \cdots$$

Für ζ erhält man die Entwicklung:

$$\zeta = -\frac{\nu_2+\nu_3}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)!\,\nu_1}\,\frac{D}{W}\,\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} + \cdots,$$

für ξ_1 folgt:

$$\xi_1 = \frac{1}{\sin\varphi}\{\Sigma l \varDelta f_1 + h \Sigma l f_1'(t + \varDelta t)\}$$
$$= \frac{-\nu_2 W}{(\nu_1 + \nu_2)!\, \nu_1\, w \sin\varphi} \varDelta t^{\nu_1 + \nu_2} + \cdots$$

Die gestaltlichen Verhältnisse der Schnittkurve sind hier dieselben, wie unter 2.

b) Für $\sin\varphi = 0$ erhalten wir den Schnitt der rektifizierenden Ebene der Ausgangskurve mit der Tangentenfläche. Wir schreiben hier ξ statt ξ_1 und finden:

$$h = -\frac{\varDelta t}{\nu_1 + \nu_2} + \cdots,$$

$$\xi = \frac{W \nu_2}{\nu_1!\,(\nu_1 + \nu_2)} \varDelta t^{\nu_1} \ldots, \quad \zeta = -\frac{\nu_3 D}{(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)!\,(\nu_1 + \nu_2) W} \varDelta t^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} + \cdots,$$

woraus sich die gestaltlichen Verhältnisse der Schnittkurve leicht erkennen lassen.

Im allgemeinen Fall, für den $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$ ist, besitzt in dem zu t gehörenden Punkt die Schnittlinie der Tangentenfläche mit der Schmiegungsebene eine gewöhnliche Tangente; die Schnittlinie mit der Normalebene (Nr. 2, $\sin\varphi = 1$) eine Hellebardenspitze und den Krümmungshalbmesser Null; die Schnittlinie mit der rektifizierenden Ebene eine Wendetangente. Der die Normalebene betreffende Teil dieses Satzes ist bereits 1845 von de Saint-Venant aufgestellt worden. (Journal de l'École Polytechnique. 30 Cahier. Bd. 18., S. 43.)

§ 18. Bemerkungen über die einschlägige Literatur und über die Anwendung von homogenen Koordinaten.

Auf die möglichen acht Gestalten der Umgebung eines Kurvenpunktes machte zuerst Ch. v. Staudt in seiner „Geometrie der Lage“ (Nürnberg 1847, S. 113) aufmerksam. Chr. Wiener wurde dadurch veranlaßt, die acht Modelle von Raumkurvenformen anzufertigen, die sich im Verlag von K. Schilling in Halle a. S. befinden. Neuere Modelle im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig rühren von K. Wiener her. Eine Erläuterung über die ersteren von Chr. Wiener findet sich in der Zeitschrift der Mathematik und Physik, 25. Jahrgang 1880 S. 95. Man vergleiche die Darstellung bei F. Klein, „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie“. (Leipzig 1902. S. 437.)

Im Jahre 1886 erschien die Leipziger Inauguraldissertation von Henry B. Fine (auch im American Journal of Mathematics Bd. 8. 1886. S. 156), in der die analytischen Bedingungen jener acht Möglichkeiten unter Benutzung von homogenen Koordinaten und Graßmannschen Methoden entwickelt wurden. Um die Übereinstimmung

jener Bedingungen mit den im § 16 S. 256 gefundenen darzutun, ist ein kurzes Eingehen auf homogene Koordinaten notwendig.

Wir betrachten zunächst, wie es auch Fine tut, die homogenen Koordinaten der Punkte einer Raumkurve als proportional vier gegebenen analytischen Funktionen einer Veränderlichen t und setzen:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1(t) : \varphi_2(t) : \varphi_3(t) : \varphi_4(t).$$

Man kommt, wie mir scheint, auf die einfachste Weise zur analytischen Darstellung der Kurventangente, wenn man sie als die Achse des Büschels der Tangentialebenen auffaßt. Wir stellen den Ebenenbüschel, dessen Achse durch die beiden Punkte $P^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)})$ und $P^{(2)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4^{(2)})$ bestimmt ist, durch die Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & x_4^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & x_4^{(2)} \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_1 & x_2 & x_4 \end{vmatrix} = 0$$

dar, in der y_1, y_2, y_3, y_4 die Koordinaten eines nicht in der Achse des Büschels liegenden, sonst aber beliebig zu wählenden, Punktes (Q), und x_1, x_2, x_3, x_4 die laufenden Koordinaten der Punkte der durch $P^{(1)}, P^{(2)}, Q$ bestimmten Ebene bedeuten.

Um den durch die Verhältnisse:

$$x_1^{(1)} : x_2^{(1)} : x_3^{(1)} : x_4^{(1)} = \varphi_1(t) : \varphi_2(t) : \varphi_3(t) : \varphi_4(t),$$

$$x_1^{(2)} : x_2^{(2)} : x_3^{(2)} : x_4^{(2)} = \varphi_1(t + \varDelta t) : \varphi_2(t + \varDelta t) : \varphi_3(t + \varDelta t) : \varphi_4(t + \varDelta t)$$

festgelegten Ebenenbüschel zu bestimmen, setzen wir zur Abkürzung:

$$\varphi_i(t + \varDelta t) = a_{i0} + a_{i1}\varDelta t + a_{i2}\varDelta t^2 + \cdots$$

Wenn nun die Proportionen:

$$a_{10} : a_{20} : a_{30} : a_{40} = a_{1n} : a_{2n} : a_{3n} : a_{4n}$$

bestehen, solange $n \leq \varkappa_1$ ist, aber nicht für $n = \varkappa_1 + 1$, erhalten wir als Gleichung des Ebenenbüschels:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{40} \\ a_{1,\varkappa_1+1} & a_{2,\varkappa_1+1} & a_{3,\varkappa_1+1} & a_{4,\varkappa_1+1} \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} + A\varDelta t + \cdots = 0.$$

Der Übergang zu $\Delta t = 0$ liefert die Gleichung des Büschels der Tangentialebenen in der Form:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & \cdots \\ a_{1,\varkappa_1+1} & \cdots \\ y_1 & \cdots \\ x_1 & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Die Achse des Büschels, d. h. die Tangente der Kurve, ist somit durch die beiden Punkte $(a_{10}\ldots)$ und $(a_{1,\varkappa_1+1}\ldots)$ bestimmt.

Wir können die Bedingung für die Zahl $\varkappa_1$ auch in der Weise ausdrücken, daß sie den größten Wert von n bedeuten soll, für den alle Unterdeterminanten zweiter Ordnung der matrix:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{40} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & a_{4n} \end{vmatrix}$$

verschwinden.

Um zur Gleichung der Schmiegungsebene zu gelangen, lassen wir zunächst den Punkt $(y_1\ldots)$ mit dem Punkte $(\varphi_1(t+\Delta t),\ldots)$ zusammenfallen.

Wenn alle Unterdeterminanten dritter Ordnung der matrix:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{40} \\ a_{1,\varkappa_1+1} & a_{2,\varkappa_1+1} & a_{3,\varkappa_1+1} & a_{4,\varkappa_1+1} \\ a_{1,\varkappa_1+1+n} & a_{2,\varkappa_1+1+n} & a_{3,\varkappa_1+1+n} & a_{4,\varkappa_1+1+n} \end{vmatrix}$$

verschwinden, solange $n \leqq \varkappa_2$ ist, aber nicht für $n = \varkappa_2 + 1$, ergibt sich als Gleichung unserer Ebene:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & \cdots \\ a_{1,\varkappa_1+1} & \cdots \\ a_{1,\varkappa_1+\varkappa_2+2} & \cdots \\ x_1 & \cdots \end{vmatrix} + B\Delta t + \cdots = 0.$$

Der Übergang zu $\Delta t = 0$ liefert die Gleichung der Schmiegungsebene in der Form:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & \cdots \\ a_{1,\varkappa_1+1} & \cdots \\ a_{1,\varkappa_1+\varkappa_2+2} & \cdots \\ x_1 & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Hiernach ist die Schmiegungsebene durch die Punkte $(a_{10}\ldots)$, $(a_{1,\varkappa_1+1}\ldots)$, $(a_{1,\varkappa_1+\varkappa_2+2})$ bestimmt.

Wir können die Bedingung für $\varkappa_2$ auch in der Forderung ausdrücken, daß $\varkappa_2$ der größte Wert von n sein soll, für den alle Unterdeterminanten dritter Ordnung der matrix:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{40} \\ a_{1,\varkappa_1+1} & a_{2,\varkappa_1+1} & a_{3,\varkappa_1+1} & a_{4,\varkappa_1+1} \\ a_{1,\varkappa_1+2} & a_{2,\varkappa_1+2} & a_{3,\varkappa_1+2} & a_{4,\varkappa_1+2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{1,\varkappa_1+n+1} & a_{2,\varkappa_1+n+1} & a_{3,\varkappa_1+n+1} & a_{4,\varkappa_1+n+1} \end{vmatrix}$$

verschwinden.

Wir gehen noch einen Schritt weiter und fragen, mit welcher Potenz von Δt die Entwicklung der Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & \cdots \\ a_{1,\varkappa_1+1} & \cdots \\ a_{1,\varkappa_1+\varkappa_2+2} & \cdots \\ \varphi_1(t+\Delta t) & \cdots \end{vmatrix}$$

beginnt. Wenn die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & \cdots \\ a_{1,\varkappa_1+1} & \cdots \\ a_{1,\varkappa_1+\varkappa_2+2} & \cdots \\ a_{1,\varkappa_1+\varkappa_2+n+2} & \cdots \end{vmatrix}$$

verschwindet, solange $n \leqq \varkappa_3$, aber nicht, wenn $n = \varkappa_3 + 1$, so beginnt die Entwicklung offenbar mit der $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + 3^{\text{ten}}$ Potenz von Δt. H. B. Fine nennt die Zahlen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ die Grade des Stationärseins des Kurvenpunktes, der Tangente und der Schmiegungsebene, wobei aber zu bemerken ist, daß damit nichts über die geometrische Beschaffenheit der Umgebung des Kurvenpunktes ausgesagt wird, da sich diese Zahlen ändern können, wenn man statt t eine neue Veränderliche einführt.

Um den Einfluß jener Zahlen auf die Beschaffenheit der Umgebung des Kurvenpunktes festzustellen, kommt man an der Unterscheidung von zwei Richtungen in einer Strecke, wie bei Fine, oder von zwei Seiten einer Ebene nicht vorbei. Wir wollen das letztere durchführen und müssen zu diesem Zweck auf die Definition der homogenen Koordinaten zurückgehen.

Die Gleichungen der Seiten eines Tetraeders seien in der Normalform:

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_{14} = 0,$$
$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \alpha_{24} = 0,$$
$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \alpha_{34} = 0,$$
$$\alpha_{41}x + \alpha_{42}y + \alpha_{43}z + \alpha_{44} = 0.$$

Die senkrechten Abstände eines Punktes (x, y, z) von den Seitenflächen des Tetraeders bezeichnen wir mit p_1, p_2, p_3, p_4, so daß:

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_{14} = p_1, \text{ usw.}$$

Wenn die Höhen des Tetraeders mit h_1, h_2, h_3, h_4 bezeichnet werden, besteht bekanntlich die Beziehung:

$$\frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} + \frac{p_4}{h_4} = 1.$$

(Vgl. z. B. W. Killing. Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten. Zweiter Teil. Paderborn 1901. S. 12.)

Verstehen wir unter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ vier, von Null verschiedene, aber sonst beliebig gewählte, feste Zahlen, so werden die homogenen Koordinaten des Punktes (x, y, z) durch die Gleichungen:

$$x_1 = \sigma\alpha_1 p_1, \quad x_2 = \sigma\alpha_2 p_2, \quad x_3 = \sigma\alpha_3 p_3, \quad x_4 = \sigma\alpha_4 p_4$$

definiert, in denen σ eine von Null verschiedene, sonst willkürliche Zahl bedeutet. Jeder Punkt besitzt demnach einfach unendlich viele Systeme von homogenen Koordinaten. Lege ich bloß die Verhältnisse dieser Koordinaten fest, wie etwa durch:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 2 : 1 : 5 : 3,$$

so läßt sich damit wohl entscheiden, ob der entsprechende Punkt in einer durch eine Gleichung von der Form:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$

gegebenen Ebene liegt oder nicht; ob aber zwei, nicht in der Ebene befindliche Punkte auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene liegen, läßt sich nur durch den hier sehr umständlichen Übergang zu rechtwinkligen Koordinaten entscheiden. Einfacher wird dieser Übergang, wenn die homogenen Koordinaten durch Gleichungen, wie etwa:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 3$$

bestimmt sind, da jetzt die Bestimmung des Proportionalitätsfaktors σ mit Hilfe der Beziehung:

$$\frac{x_1}{\alpha_1 h_1} + \frac{x_2}{\alpha_2 h_2} + \frac{x_3}{\alpha_3 h_3} + \frac{x_4}{\alpha_4 h_4} = \sigma$$

möglich wird. Sind die homogenen Koordinaten zweier, nicht in der durch die Beziehung:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$

festgelegten Ebene befindlicher Punkte P' und P'' durch die Gleichungen:

$$x_1 = x_{11}, \quad x_2 = x_{21}, \quad x_3 = x_{31}, \quad x_4 = x_{41},$$
$$x_1 = x_{12}, \quad x_2 = x_{22}, \quad x_3 = x_{32}, \quad x_4 = x_{42}$$

gegeben, so bezeichnen wir die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte P' und P'' mit x', y', z' und x'', y'', z'', die ihnen entsprechenden Werte von σ mit σ' und σ''. Dann ist:

$$x_{11} = \sigma' \alpha_1 (\alpha_{11} x' + \alpha_{12} y' + \alpha_{13} z' + \alpha_{14}),$$
$$x_{12} = \sigma'' \alpha_1 (\alpha_{11} x'' + \alpha_{12} y'' + \alpha_{13} z'' + \alpha_{14}) \quad \text{usw.}$$

Zur Abkürzung sei:

$$A_n = \sum_{\nu=1}^{4} a_\nu \alpha_\nu \alpha_{\nu n}. \qquad (n = 1 \dots 4)$$

Es ergibt sich dann:

$$\sum_{\nu=1}^{4} a_\nu x_{\nu 1} = \sigma' (A_1 x' + A_2 y' + A_3 z' + A_4),$$
$$\sum_{\nu=1}^{4} a_\nu x_{\nu 2} = \sigma'' (A_1 x'' + A_2 y'' + A_3 z'' + A_4).$$

Hieraus folgt, daß die durch die homogenen Koordinaten $(x_{11} \dots x_{41})$, $(x_{12} \dots x_{42})$ gegebenen Punkte auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der durch die Gleichung:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

bestimmten Ebene liegen, je nachdem die Ausdrücke

$$\sigma' \sum_{\nu=1}^{4} a_\nu x_{\nu 1} \quad \text{und} \quad \sigma'' \sum_{\nu=1}^{4} a_\nu x_{\nu 2}$$

dieselben oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.

Es sei nun eine Kurve in homogenen Koordinaten durch die Gleichungen:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad x_3 = \varphi_3(t), \quad x_4 = \varphi_4(t)$$

gegeben. Wir nehmen an, daß den Werten $t_0 \dots t_1$ von t lauter im Endlichen liegende Kurvenpunkte entsprechen. Die zu diesen Werten von t gehörenden Proportionalitätsfaktoren σ werden dargestellt durch die Werte einer Funktion $\sigma(t)$ von t, die durch die Gleichung:

$$\sigma(t) = \frac{\varphi_1(t)}{\alpha_1 h_1} + \frac{\varphi_2(t)}{\alpha_2 h_2} + \frac{\varphi_3(t)}{\alpha_3 h_3} + \frac{\varphi_4(t)}{\alpha_4 h_4}$$

bestimmt ist. Da die betrachteten Kurvenpunkte alle im Endlichen liegen, kann $\sigma(t)$ an keiner Stelle des Intervalls $t_0 \dots t_1$ verschwinden; es behält also längs dieses Intervalls sein Vorzeichen bei.

Legen wir nun durch den zu t gehörenden Punkt eine Ebene mit der Gleichung:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$

so befinden sich die beiden Punkte mit den homogenen Koordinaten $\varphi_1(t+\Delta t)\ldots\varphi_4(t+\Delta t)$ und $\varphi_1(t-\Delta t)\ldots\varphi_4(t-\Delta t)$ auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der Ebene, je nachdem

$$\sum_{\nu=1}^{4} a_\nu \varphi_\nu(t+\Delta t) \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{4} a_\nu \varphi_\nu(t-\Delta t)$$

gleiche oder verschiedene Vorzeichen besitzen.

Wir haben oben außer dem dem Werte t entsprechenden Punkt $P_0(a_{10}\ldots a_{40})$ noch drei weitere wesentliche Punkte kennen gelernt, nämlich den Punkt $P_1(a_{1,\varkappa_1+1}\ldots a_{4,\varkappa_1+1})$, den Punkt $P_2(a_{1,\varkappa_1+\varkappa_2+2}\ldots a_{4,\varkappa_1+\varkappa_2+2})$ und den Punkt $P_3(a_{1,\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3+3}\ldots a_{4,\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3+3})$. Diese Punkte sehen wir als die Ecken eines Tetraeders an, das wir **das begleitende Tetraeder** nennen können. Im Punkte P_0 schneiden sich die durch $P_0P_2P_3$ bestimmte Ebene E_1, die durch $P_0P_1P_3$ bestimmte Ebene E_2, und die durch $P_0P_1P_2$ bestimmte Ebene E_3, welch letztere mit der Schmiegungsebene zusammenfällt.

Die Gleichung der Ebene E_1 ist:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & \cdots \\ a_{1,\varkappa_1+\varkappa_2+2} & \cdots \\ a_{1,\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3+3} & \cdots \\ x_1 & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Für $x_1=\varphi_1(t+\Delta t)$ usw. beginnt die Entwicklung der linken Seite dieser Gleichung mit der $(\varkappa_1+1)^{\text{ten}}$ Potenz von Δt. Bei ungeradem $\varkappa_1$ besitzt die Kurve an der betrachteten Stelle eine Spitze.

Die Gleichung der Ebene E_2 ist:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & \cdots \\ a_{1,\varkappa_1+1} & \cdots \\ a_{1,\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3+3} & \cdots \\ x_1 & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Für $x_1=\varphi_1(t+\Delta t)$ usw. beginnt die Entwicklung der vorstehenden Determinante mit der $(\varkappa_1+\varkappa_2+2)^{\text{ten}}$ Potenz von Δt. Die Ebene E_2 wird von der Kurve geschnitten oder nicht, je nachdem $\varkappa_1+\varkappa_2$ ungerade oder gerade ist.

Die Gleichung der Ebene E_3 ist:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & \cdots \\ a_{1,\varkappa_1+1} & \cdots \\ a_{1,\varkappa_1+\varkappa_2+2} & \cdots \\ x_1 & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Für $x_1 = \varphi_1(t + \Delta t)$ usw. beginnt die Entwicklung der vorstehenden Determinante mit der $(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + 3)^{\text{ten}}$ Potenz von Δt. Die Schmiegungsebene wird von der Kurve geschnitten oder nicht, je nachdem $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3$ gerade oder ungerade ist.

Um den Zusammenhang zwischen den Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ und den Zahlen ν_1, ν_2, ν_3 herzustellen, nehmen wir zur Abkürzung:

$$\alpha_{i1} f_1(t) + \alpha_{i2} f_2(t) + \alpha_{i3} f_3(t) + \alpha_{i4} = p_i(t). \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Da die Koordinaten $x_1 \ldots x_4$ den Werten $\alpha_i p_i(t)$ proportional sind, können wir in den S. 263 benutzten Bezeichnungen:

$$\alpha_i p_i(t + \Delta t) = a_{i0} + a_{i1} \Delta t + \cdots$$

setzen. Aber man hat:

$$p_i(t + \Delta t) = p_i(t) + \overset{(\nu_1)}{p_i}(t) g_1(\Delta t) + \overset{(\nu_1+\nu_2)}{p_i}(t) g_2(\Delta t) + \frac{\overset{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}{p_i}(t)}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)!} \Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} + \cdots,$$

so daß die Koeffizienten $a_{i1}, a_{i2} \ldots a_{i,\nu_1-1}$ gleich Null sind.

Beständen die Proportionen:

$$a_{10} : a_{20} : a_{30} : a_{40} = a_{1\nu_1} : a_{2\nu_1} : a_{3\nu_1} : a_{4\nu_1},$$

so müßte $p_i(t)$ proportional $p_i^{(\nu_1)}(t)$ sein, und damit müßten, wenn q einen Proportionalitätsfaktor bedeutet, die Gleichungen:

$$\alpha_{i1}\left(f_1(t) - q f_1^{(\nu_1)}(t)\right) + \alpha_{i2}\left(f_2(t) - q f_2^{(\nu_1)}(t)\right) + \alpha_{i3}\left(f_3(t) - q f_3^{(\nu_1)}(t)\right) + \alpha_{i4} = 0$$

erfüllt sein, was unmöglich ist, da die Determinante der Koeffizienten α_{nm} nicht verschwindet. Wir erhalten daher $\nu_1 = \varkappa_1 + 1$.

Die Determinanten dritter Ordnung der Matrix:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{40} \\ a_{1\nu_1} & a_{2\nu_1} & a_{3\nu_1} & a_{4\nu_1} \\ a_{1,\nu_1+n} & a_{2,\nu_1+n} & a_{3,\nu_1+n} & a_{4,\nu_1+n} \end{vmatrix}$$

verschwinden, solange $n < \nu_2$. Wären sie auch für $n = \nu_2$ gleich Null, so beständen Darstellungen von der Form:

$$p_i = q_1 p_i^{(\nu_1)} + q_2 p_i^{(\nu_1+\nu_2)},$$

was sich auf demselben Wege wie vorhin als unmöglich erweist, somit $\nu_2 = \varkappa_2 + 1$.

Die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & \cdots \\ a_{1,\nu_1} & \cdots \\ a_{1,\nu_1+\nu_2} & \cdots \\ a_{1,\nu_1+\nu_2+n} & \cdots \end{vmatrix}$$

verschwindet, solange $n < \nu_3$. Für $n = \nu_3$ ist sie gleich dem Produkt der Determinante der Koeffizienten α_{nm} in die S. 249 definierte Determinante D und damit von Null verschieden. Wir erhalten also $\nu_3 = \varkappa_3 + 1$.

Im weiteren Verfolge der Literatur ist das Buch von G. Peano zu erwähnen „Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale". Torino 1887, in dem S. 98 die Bedeutung der Zahlen ν_1, ν_2, ν_3 (von Peano p, q, r genannt) für die Gestalt der Umgebung eines Kurvenpunktes dargetan wurde.

C. F. E. Björling behandelte 1890 im Archiv der Mathematik und Physik (zweite Reihe Bd. 8, S. 88) Raumkurvensingularitäten ebenfalls unter Benutzung der Zahlen ν_1, ν_2, ν_3, deren Bestimmung ebensowenig mitgeteilt wird, wie die der Anfangsglieder der benutzten Reihen.

Das Verhalten der zweiten Krümmung vor und nach einem außergewöhnlichen Punkte der Abbildung einer Raumkurve auf die t-Gerade untersuchte 1895 O. Staude in mehreren einzelnen Fällen. (American Journal of Mathematics Bd. 17 S. 359.) Seine Ergebnisse stimmen mit den in diesen Fällen aus unserer Entwicklung von $r(t + \Delta t)$ S. 251 fließenden überein.

Fast gleichzeitig mit der Arbeit von Staude erschien eine Arbeit von A. Meder (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 116. 1896. S. 50 und S. 247), in der sowohl die Gestalt der Umgebung eines außergewöhnlichen Punktes, wie das Verhalten der ersten und zweiten Krümmung in einem solchen analytisch untersucht wird. Allein die von A. Meder gefundenen Bedingungen liefern nicht unmittelbar die Bestimmung der Zahlen ν_1, ν_2, ν_3 durch die Ableitungen der Koordinaten; auch ist der Wert der ersten oder der zweiten Krümmung, falls er in einem außergewöhnlichen Punkt endlich und von Null verschieden ist, aus den Mederschen Gleichungen nicht ohne weiteres zu entnehmen.

1897 bestimmte E. Wölffing unter Benutzung der von C. Björling aufgestellten Reihen die erste und zweite Krümmung einer Raumkurve in einem außergewöhnlichen Punkt. (Archiv der Mathem. u. Phys. (2) Bd. 15. 1897. S. 145.)

Dieselbe Frage wurde 1901 von C. Burali-Forti behandelt. (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino. Vol. 36. S. 935.) Burali-Forti faßt die Ausdrücke, die sich an einer gewöhnlichen Stelle der Kurve für ϱ und r ergeben, als Grenzwerte gewisser geometrischer Größen auf und verallgemeinert das auf außergewöhnliche Punkte. Den Werten t und $t + \Delta t$ mögen die Kurvenpunkte P und P_1 entsprechen. Die Maßzahl der Entfernung beider Punkte werde

mit d_1, die Maßzahl des senkrechten Abstandes des Punktes P_1 von der in P berührenden Tangente werde mit d_2, die positiv oder negativ genommene Maßzahl des senkrechten Abstandes des Punktes P_1 von der in P berührenden Schmiegungsebene werde mit d_3 bezeichnet. An einer gewöhnlichen Stelle der Abbildung der Kurve auf die s-Gerade hat man:

$$\Delta f_1 = \alpha \Delta s + \frac{l}{2\varrho}\Delta s^2 - \frac{1}{6}\left\{\frac{\alpha}{\varrho^2} + \frac{\lambda}{r\varrho} + \frac{l}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}\right\}\Delta s^3 + \cdots$$

Wir erhalten bei positivem Δs:

$$d_1 = \sqrt{\Sigma \Delta f_1^2} = \Delta s + \cdots,$$
$$d_2 = \sqrt{\Sigma(\gamma \Delta f_2 - \beta \Delta f_3)^2} = \frac{1}{2\varrho}\Delta s^2 + \cdots,$$
$$d_3 = \Sigma \lambda \Delta f_1 = -\frac{1}{6r\varrho}\Delta s^3 + \cdots,$$

somit:

$$\varrho = \frac{1}{2}\lim_{(\Delta s = 0)} \frac{d_1^2}{d_2}, \quad -r = \frac{1}{3}\lim_{(\Delta s = 0)} \frac{d_1 d_2}{d_3}.$$

Wendet man diese Grenzgleichungen mit Burali-Forti auch auf die Umgebung eines außergewöhnlichen Punktes an, so ergibt sich bei positivem Δt:

$$d_1 = \frac{w}{\nu_1!}\Delta t^{\nu_1} + \cdots,$$
$$d_2 = \frac{W}{(\nu_1+\nu_2)!\,w}\Delta t^{\nu_1+\nu_2} + \cdots,$$
$$d_3 = \frac{D}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)!\,W}\Delta t^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} + \cdots$$

Daher hat man zunächst:

$$\frac{1}{2}\frac{d_1^2}{d_2} = \frac{(\nu_1+\nu_2)!\,w^3}{2(\nu_1!)^2 W}\Delta t^{\nu_1-\nu_2} + \cdots$$

Der Grenzwert von $\frac{1}{2}\frac{d_1^2}{d_2}$ für $\Delta t = 0$ zeigt also dasselbe Verhalten, wie es nach S. 248 für den Grenzwert von $\varrho(t+\Delta t)$ stattfindet.

Ferner ergibt sich:

$$-\frac{1}{3}\frac{d_1 d_2}{d_3} = -\frac{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)!\,W^2}{\nu_1!(\nu_1+\nu_2)!\,3D}\Delta t^{\nu_1-\nu_3} + \cdots$$

Der Grenzwert der rechten Seite dieser Gleichung zeigt für $\nu_1 > \nu_3$ und für $\nu_1 < \nu_3$ dasselbe Verhalten, wie der Grenzwert von $r(t+\Delta t)$ S. 251. Aber für $\nu_1 = \nu_3$ weichen beide Grenzwerte voneinander ab. Der erstere wird gleich:

$$-\frac{(2\nu_1+\nu_2)!\,W^2}{\nu_1!(\nu_1+\nu_2)!\,3D},$$

während der letztere gleich:

$$-\frac{\nu_2(2\nu_1+\nu_2-1)!\,W^2}{\nu_1!\,(\nu_1+\nu_2)!\,D}$$

wird. Für $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$ sind beide Grenzwerte einander gleich. Eine beständige Übereinstimmung würde sich ergeben, wenn man r durch die Grenzgleichung:

$$r = -\frac{\nu_2}{2\nu_1+\nu_2} \lim_{(\Delta t=0)} \frac{d_1 d_2}{d_3}$$

definierte.

III. Einzelheiten aus der Theorie der Raumkurven.

§ 19. Filarevolventen. Planevolventen.

Es liegt nahe, sowohl die orthogonalen Trajektorien der Tangenten (Filarevolventen), wie die der Schmiegungsebenen (Planevolventen) einer Raumkurve aufzusuchen, zwei Aufgaben, die bereits in den ersten Anfängen der Kurventheorie behandelt wurden.

1. Filarevolventen. Wir können die Koordinaten einer die Tangenten einer gegebenen Kurve schneidenden Kurve in der Form darstellen:

$$x = g_1(s) + h(s)\,g_1'(s), \text{ usw.}$$

Damit die Kurve die Tangenten senkrecht schneide, muß:

$$1 + \frac{dh(s)}{ds} = 0$$

sein, d. h.:

$$h(s) = \tau - s,$$

wo τ eine Konstante bedeutet.

Eine Filarevolvente kann also durch Abwickelung eines auf die Ausgangskurve gelegten Fadens erzeugt werden.

Wir beschränken die Veränderliche s auf ein Wertintervall $s_0 \ldots s_1$, in welchem nur gewöhnliche Punkte vorkommen, und nehmen $\tau > s_1$, so daß $\tau - s$ positiv ausfällt, und ϱ endlich und von Null verschieden ist.

Aus den Gleichungen:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\tau - s}{\varrho} l, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\tau - s}{\varrho} m, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{\tau - s}{\varrho} n$$

folgt, daß die Tangente der Filarevolvente der Hauptnormale der Ausgangskurve parallel ist.

Bezeichnen wir die Bogenlänge der Filarevolvente mit σ und betrachten sie als mit wachsendem s wachsend, so ergibt sich:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\tau - s}{\varrho},$$

und damit:

$$\frac{dl}{d\sigma} = -\frac{\varrho}{\tau - s}\left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{r}\right).$$

Die Hauptnormale der Filarevolvente ist daher sowohl zu der rektifizierenden Kante, wie zu der Hauptnormale der Ausgangskurve senkrecht.

Die Richtungskosinus der Binormale der Filarevolvente sind:

$$\frac{\frac{\lambda}{\varrho}-\frac{\alpha}{r}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}}, \quad \frac{\frac{\mu}{\varrho}-\frac{\beta}{r}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{\varrho^2}}}, \quad \frac{\frac{\nu}{\varrho}-\frac{\gamma}{r}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}},$$

d. h. die Binormale der Filarevolvente ist parallel der rektifizierenden Kante der Ausgangskurve.

Die erste Krümmung der Filarevolvente ist gleich:

$$\frac{\varrho\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}}{\tau-s},$$

die zweite ist gleich:

$$-\frac{\varrho}{\tau-s}\cdot\frac{\frac{1}{r}\frac{d\frac{1}{\varrho}}{ds}-\frac{1}{\varrho}\frac{d\frac{1}{r}}{ds}}{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}.$$

Wir sehen, daß bei konstantem $\frac{\varrho}{r}$ die zweite Krümmung verschwindet. Dies liefert nach § 7 S. 214 den Satz: Die Filarevolventen der isogonalen Trajektorien der Erzeugenden einer Zylinderfläche sind ebene Kurven.

Wir wollen diesen Satz direkt herleiten, um eine weitere Eigenschaft der betrachteten Evolventen darzulegen.

Die gegebene Kurve $\left(x=g_1(s),\ y=g_2(s),\ z=g_3(s)\right)$ befinde sich auf einem Zylinder, dessen Erzeugende der z-Achse parallel seien, und schneide die Erzeugenden unter konstantem Winkel. Dann muß $g_3'(s)$ konstant sein. Legen wir die x, y-Ebene so, daß sie die Kurve schneidet, so wird dieser Schnittpunkt der natürliche Anfangspunkt für die Bogenlänge sein, die wir als mit wachsendem z wachsend betrachten wollen. Unter dieser Annahme ist:

$$g_3(s)=cs,$$

wo c eine positive Konstante bedeutet.

Die Gleichungen der Filarevolventen werden:

$$x=g_1(s)+(\tau-s)g_1'(s),$$
$$y=g_2(s)+(\tau-s)g_2'(s),$$
$$z=\tau c;$$

die Evolventen liegen daher in Ebenen, die zu den Erzeugenden des Zylinders senkrecht sind.

Die Bogenlänge der senkrechten Projektion der Ausgangskurve auf die x, y-Ebene bezeichnen wir mit σ_1. Wir lassen ihren Nullpunkt mit dem von s zusammenfallen und betrachten sie als mit wachsendem s wachsend. Man hat dann:

$$\sigma_1 = \sqrt{1 - c^2}\, s.$$

Die Richtungskosinus der positiven Halbtangenten der Projektion sind:

$$\alpha_1 = \frac{g_1'(s)}{\sqrt{1-c^2}}, \quad \beta_1 = \frac{g_2'(s)}{\sqrt{1-c^2}}, \quad \gamma_1 = 0,$$

folglich lassen sich die Gleichungen der Filarevolventen in der Form schreiben:

$$x = g_1(s) + (\tau\sqrt{1-c^2} - \sigma_1)\alpha_1, \quad y = g_2(s) + (\tau\sqrt{1-c^2} - \sigma_1)\beta_1, \quad z = \tau c.$$

Dies zeigt, daß die Filarevolventen der gegebenen Kurve den Evolventen ihrer senkrechten Projektion auf die x, y-Ebene kongruent sind.

Die Filarevolventen einer gewöhnlichen Schraubenlinie sind Kreisevolventen. Ein weiteres Beispiel wird im § 20 S. 281 behandelt.

Die Entwickelungen im § 10 S. 228 lehren, daß jede Raumkurve eine Filarevolvente der Gratlinien aller abwickelbaren Normalenflächen ist, die durch die Kurve gelegt werden können.

2. Planevolventen. Die Gleichungen:

$$x = g_1(s) + \varphi_1(s)\alpha + \varphi_2(s)l, \quad \text{usw.}$$

stellen eine Durchdringungskurve der Schmiegungsebenen der durch $x = g_1(s)$, $y = g_2(s)$, $z = g_3(s)$ gegebenen Kurve dar. Die Zahlen $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ sind die Koordinaten des Schnittpunktes der Durchdringungskurve mit der zu s gehörenden Schmiegungsebene der gegebenen Kurve hinsichtlich des Achsenkreuzes der Tangente und Hauptnormale.

Wir erhalten:

$$\frac{dx}{ds} = \left(1 + \varphi_1'(s) - \frac{\varphi_2(s)}{\varrho}\right)\alpha + \left(\frac{\varphi_1(s)}{\varrho} + \varphi_2'(s)\right)l - \frac{\varphi_2(s)}{r}\lambda, \quad \text{usw.}$$

Damit die Tangente der Durchdringungskurve parallel der Binormale der gegebenen Kurve sei, müssen die Bedingungen:

$$1 + \varphi_1' - \frac{\varphi_2}{\varrho} = 0, \quad \frac{\varphi_1}{\varrho} + \varphi_2' = 0$$

bestehen. Die Elimination von φ_1 aus denselben ergibt:

$$\varrho^2\varphi_2'' + \varrho\varrho'\varphi_2' + \varphi_2 - \varrho = 0.$$

Führen wir die durch die Integralgleichung:

$$\vartheta = \int \frac{ds}{\varrho}$$

bestimmte Veränderliche ϑ, d. h. die Bogenlänge des sphärischen Bildes der Tangenten der gegebenen Kurve als unabhängige Veränderliche ein, so erhalten wir:

$$\frac{d\varphi_2}{d\vartheta} = \varrho\varphi_2', \quad \frac{d^2\varphi_2}{d\vartheta^2} = \varrho(\varrho'\varphi_2' + \varrho\varphi_2'').$$

Daher nimmt unsere Differentialgleichung die Gestalt an:

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\vartheta^2} + \varphi_2 - \varrho = 0;$$

wir haben es also mit einer nichthomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu tun. Nach der Integrationsregel für eine solche ist zuerst das Integral der entsprechenden homogenen Differentialgleichung, nämlich:

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\vartheta^2} + \varphi_2 = 0,$$

aufzusuchen. Dasselbe wird durch die Gleichung:

$$\varphi_2 = \xi_1 \cos\vartheta + \xi_2 \sin\vartheta$$

geliefert. Es stellt das Integral der zu lösenden Differentialgleichung dar, wenn ξ_1 und ξ_2 derart als Funktionen von s bestimmt werden, daß die Bedingungen:

$$\frac{d\xi_1}{d\vartheta}\cos\vartheta + \frac{d\xi_2}{d\vartheta}\sin\vartheta = 0,$$

$$-\frac{d\xi_1}{d\vartheta}\sin\vartheta + \frac{d\xi_2}{d\vartheta}\cos\vartheta = \varrho$$

bestehen.

Wir erhalten:

$$\xi_1 = -\int \varrho \sin\vartheta\, d\vartheta = -\int \sin\vartheta\, ds,$$

$$\xi_2 = \int \varrho \cos\vartheta\, d\vartheta = \int \cos\vartheta\, ds,$$

so daß:

$$\varphi_2 = -\cos\vartheta \int \sin\vartheta\, ds + \sin\vartheta \int \cos\vartheta\, ds.$$

Die Gleichung:

$$\varphi_1 = -\varrho\varphi_2'$$

ergibt:

$$\varphi_1 = -\sin\vartheta \int \sin\vartheta\, ds - \cos\vartheta \int \cos\vartheta\, ds.$$

Die Gleichungen der Planevolventen sind demnach die folgenden:

$$x = g_1(s) - (\alpha \sin\vartheta + l\cos\vartheta)\int \sin\vartheta\, ds - (\alpha\cos\vartheta - l\sin\vartheta)\int \cos\vartheta\, ds, \quad \text{usw.}$$

Da jedes der beiden hier auftretenden Integrale eine willkürliche Konstante, also einen Parameter, enthält, so gehört zu jeder Raumkurve eine doppelt unendliche Schar von Planevolventen, die ihrerseits eine doppelt unendliche Schar von Parallelkurven bilden.

Jede Raumkurve ist eine orthogonale Trajektorie ihrer Normalebenen, somit eine Planevolvente des Ortes der Mittelpunkte ihrer Schmiegungskugeln.

Die Tangente einer Planevolvente ist parallel der Binormale, ihre Hauptnormale ist parallel der Hauptnormale, ihre Binormale ist parallel der Tangente der Ausgangskurve in dem entsprechenden Punkt.

Ein Fall, in dem die in den Gleichungen der Planevolventen auftretenden Integrale sofort berechenbar sind, ist der Fall $\varrho = \text{const.}$, in welchem der Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln mit dem Ort der Mittelpunkte der ersten Krümmung zusammenfällt. Setzen wir:

$$\frac{1}{\varrho} = c,$$

so können wir ϑ gleich cs nehmen. Alsdann wird:

$$\int \sin\vartheta\, ds = -\frac{1}{c}\cos cs + c_1, \quad \int \cos\vartheta\, ds = \frac{1}{c}\sin cs + c_2,$$

und es folgt:

$$x = g_1(s) - \alpha(c_1 \sin cs + c_2 \cos cs) + l\left(\frac{1}{c} - c_1\cos cs + c_2 \sin cs\right), \quad \text{usw.}$$

Der Ort der Mittelpunkte der ersten Krümmung ist hier eine Planevolvente und entspricht der Wahl $c_1 = c_2 = 0$.

§ 20. **Kurven eines linearen Komplexes.**

Mit diesem Namen pflegt man die Kurven zu bezeichnen, deren Tangenten einem linearen Komplex angehören. Bedeuten $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ die Richtungskosinus einer Geraden, x, y, z die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden, so nennt man die Gesamtheit aller Geraden, bei denen die genannten Bestimmungsstücke einer Gleichung von der Form:

$$(Bz - Cy + D)\alpha_0 + (Cx - Az + E)\beta_0 + (Ay - Bx + F)\gamma_0 = 0,$$

in der A, B, C, D, E, F Konstante bedeuten, genügen, einen linearen Komplex von Geraden (vgl. § 33). Wenn die Tangenten einer Kurve

$(x = g_1(s),\ y = g_2(s),\ z = g_3(s))$ einem linearen Komplex angehören, muß für jedes s eine Gleichung von der Form:

$$(Bg_3 - Cg_2 + D)g_1' + (Cg_1 - Ag_3 + E)g_2' + (Ag_2 - Bg_1 + F)g_3' = 0$$

bestehen. Die ersten Arbeiten über Kurven eines linearen Komplexes dürften von S. Lie herrühren (s. „Geometrie der Berührungstransformationen" von S. Lie und G. Scheffers, Leipzig 1896, S. 230). Es folgten die Arbeit von E. Picard (Annales scientif. de l'École Norm sup. 2, Bd. 6, 1877, S. 229) und eine Note von P. Appell (Archiv der Mathem. u. Physik, Bd. 60, 1877, S. 274). Die Bedingung, unter der eine Kurve eines linearen Komplexes vorliegt, ergibt sich, wenn man die vorige Gleichung fünfmal differenziert und die Konstanten $A \ldots F$ eliminiert. Sie wurde zuerst von E. Halphèn aufgestellt (Journal de l'École polytéchn., Cahier 47, Bd. 28, 1880, S. 6) und enthält die Ableitungen der Koordinaten bis zur sechsten Ordnung einschließlich. Wir werden unter Anwendung der Frenetschen Formeln zeigen, daß man zur Entscheidung darüber, ob die Tangenten einer Kurve einem linearen Komplex angehören oder nicht, nur die Ableitungen der Koordinaten bis zur fünften Ordnung einschließlich nötig hat. Wir differenzieren die Ausgangsgleichung zweimal nach s und erhalten das System:

$$\begin{aligned}
&(Bg_3 - Cg_2 + D)\alpha + (Cg_1 - Ag_3 + E)\beta + (Ag_2 - Bg_1 + F)\gamma = 0,\\
&(Bg_3 - Cg_2 + D)l + (Cg_1 - Ag_3 + E)m + (Ag_2 - Bg_1 + F)n = 0,\\
&(Bg_3 - Cg_2 + D)\lambda + (Cg_1 - Ag_3 + E)\mu + (Ag_2 - Bg_1 + F)\nu\\
&\qquad = r(A\lambda + B\mu + C\nu)
\end{aligned}$$

oder:

$$(1)\qquad \begin{cases} Bg_3 - Cg_2 + D = r\lambda(A\lambda + B\mu + C\nu),\\ Cg_1 - Ag_3 + E = r\mu(A\lambda + B\mu + C\nu),\\ Ag_2 - Bg_1 + F = r\nu(A\lambda + B\mu + C\nu). \end{cases}$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit A, B, C und addieren sie, so folgt:

$$(2)\qquad AD + BE + CF = r(A\lambda + B\mu + C\nu)^2.$$

Wenn $AD + BE + CF$ gleich Null ist, so nennt man den Komplex einen speziellen. Ein solcher besteht aus den sämtlichen Treffgeraden einer festen Geraden. Jede ebene Kurve ist eine Kurve von allen speziellen Komplexen, bei denen die feste Gerade (Achse) in der Ebene der Kurve liegt. Eine nicht ebene Kurve kann nicht eine Kurve eines speziellen Komplexes sein. Denn die Gleichung:

$$A\lambda + B\mu + C\nu = 0$$

zöge hier die Gleichung:

$$Al + Bm + Cn = 0$$

sowie:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

nach sich, so daß A, B, C zugleich verschwinden müßten. Dann würde sich die Ausgangsgleichung auf

$$D\alpha + E\beta + F\gamma = 0$$

beschränken, aus der durch Integration:

$$Dg_1 + Eg_2 + Fg_3 = \text{const.}$$

hervorgeht, wonach die Kurve entgegen der Voraussetzung eine ebene Kurve wäre.

Wir müssen also die Zahl $AD + BE + CF$ als von Null verschieden betrachten. Dann können die Ausdrücke:

$$Bg_3 - Cg_2 + D, \quad Cg_1 - Ag_3 + E, \quad Ag_2 - Bg_1 + F$$

nicht zugleich verschwinden, und aus den Gleichungen (1) folgt:

$$\lambda : \mu : \nu = Bg_3 - Cg_2 + D : Cg_1 - Ag_3 + E : Ag_2 - Bg_1 + F.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar der Liesche Satz, daß alle durch denselben Punkt gehenden Kurven ein und desselben Komplexes in diesem Punkt dieselbe Schmiegungsebene besitzen.

Die Gleichung (2) zeigt sodann den weiteren Lieschen Satz, daß alle durch denselben Punkt gehenden Kurven ein und desselben Komplexes in diesem Punkt dieselbe zweite Krümmung besitzen.

Wir können dies auch direkt zeigen, indem wir aus dem System (1) die Folgerung:

$$\Sigma (Bg_3 - Cg_2 + D)^2 = r^2 (A\lambda + B\mu + C\nu)^2$$

ziehen, aus der sich mittels der Gleichung (2):

$$r = \frac{\Sigma (Bg_3 - Cg_2 + D)^2}{AD + BE + CF}$$

ergibt. Dieser Ausdruck von r lehrt, daß die zweite Krümmung einer Komplexkurve an einem im Endlichen liegenden Punkt auch stets einen endlichen, von Null verschiedenen Wert besitzt.

Um die gesuchte Bedingung abzuleiten, setzen wir:

$$\begin{aligned} A\alpha + B\beta + C\gamma &= S_1, \\ Al + Bm + Cn &= S_2, \\ A\lambda + B\mu + C\nu &= S_3. \end{aligned}$$

Differenzieren wir die Gleichungen (1) nach s, so folgt:

$$B\gamma - C\beta = \frac{dr}{ds}\lambda S_3 + l S_3 + \lambda S_2, \quad \text{usf.}$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit λ, μ, ν und addieren sie, so findet sich:

$$\frac{dr}{ds} S_3 + 2 S_2 = 0,$$

folglich:

$$r'' S_3 + \frac{r'}{r} S_2 - \frac{2 S_1}{\varrho} - \frac{2 S_3}{r} = 0,$$

oder:

$$S_3 \left(r'' - \frac{r'^2}{2r} - \frac{2}{r}\right) - \frac{2}{\varrho} S_1 = 0.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$
$$AD + BE + CF = r S_3^2$$

ergibt sich:

$$A^2 + B^2 + C^2 = \frac{AD + BE + CF}{r}\left\{1 + \frac{r'^2}{4} + \frac{\varrho^2}{4}\left(r'' - \frac{r'^2}{2r} - \frac{2}{r}\right)^2\right\}.$$

Die gesuchte Bedingung besteht also darin, daß der Ausdruck:

$$\frac{1}{r} + \frac{r'^2}{4r} + \frac{\varrho^2}{4r}\left(r'' - \frac{r'^2}{4r} - \frac{2}{r}\right)^2$$

einer von Null verschiedenen Konstanten gleich sein muß.

Um eine Form unserer Bedingung zu erhalten, die der Halphènschen entspricht, setzen wir die Ableitung des obigen Ausdruckes gleich Null. Zur Abkürzung werde:

$$r'' - \frac{r'^2}{2r} - \frac{2}{r} = \sigma$$

genommen. Man hat dann:

$$\frac{d\left(\frac{1}{r} + \frac{r'^2}{4r}\right)}{ds} = \frac{r'\sigma}{2r},$$

und die gesuchte Ableitung nimmt die Gestalt an:

$$\frac{\sigma\varrho^2}{2r}\left(\sigma' + \frac{r'}{\varrho^2} + \frac{\varrho'\sigma}{\varrho} - \frac{r'\sigma}{2r}\right).$$

Würde σ verschwinden, so müßte S_1 verschwinden, und das ist nur bei einer ebenen Kurve möglich. Wir können somit die Bedingung, unter der die Tangenten einer Kurve einem linearen Komplex angehören, auch in der Form:

$$\sigma' + \frac{r'}{\varrho^2} + \frac{\varrho'\sigma}{\varrho} - \frac{r'\sigma}{2r} = 0$$

aussprechen.

Ist diese Bedingung erfüllt, so läßt sich der lineare Komplex, dem die Tangenten der Kurve angehören, leicht bestimmen.

Wir setzen:

$$\frac{1}{r}+\frac{r'^2}{4r}+\frac{\varrho^2\sigma^2}{4r}=\frac{1}{k},$$

wo jetzt k eine Konstante bedeutet.

Aus den Gleichungen:

$$A\alpha+B\beta+C\gamma=S_1,$$
$$Al+Bm+Cn=-\frac{r'}{\varrho\sigma}S_1,$$
$$A\lambda+B\mu+C\nu=\frac{2}{\varrho\sigma}S_1$$

folgt:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\varrho\sigma\alpha-r'l+2\lambda}{2\sqrt{\frac{r}{k}}},$$

$$\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\varrho\sigma\beta-r'm+2\mu}{2\sqrt{\frac{r}{k}}},$$

$$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\varrho\sigma\gamma-r'n+2\nu}{2\sqrt{\frac{r}{k}}}.$$

Die Gleichungen (1) liefern jetzt unmittelbar die Werte von

$$\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad\frac{E}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\quad\text{und}\quad\frac{F}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Damit ist der gesuchte lineare Komplex völlig bestimmt, denn er ändert sich nicht, wenn die Zahlen $A \ldots F$ mit einem Faktor multipliziert werden.

Das einfachste Beispiel von Kurven eines linearen Komplexes bieten die gewöhnlichen Schraubenlinien dar. Hier ist sowohl ϱ wie r konstant, also auch σ. Nehmen wir als Gleichungen einer gewöhnlichen Schraubenlinie die folgenden:

$$x=p\cos t,\quad y=p\sin t,\quad z=qt,$$

so ergibt sich:

$$\sigma=\frac{2q}{p^2+q^2},\quad\frac{1}{k}=-\frac{q}{p^2}.$$

Sowohl A wie B verschwinden. Man darf daher C gleich Eins nehmen. Dann folgt:

$$D=0,\quad E=0,\quad F=k.$$

Ein weiteres Beispiel liefern die algebraischen Raumkurven dritter Ordnung. Indem wir in betreff des allgemeinen Beweises dieser Behauptung auf die Darstellung in den „Vorlesungen über Geometrie

unter besonderer Benutzung der Vorträge von A. Clebsch, bearbeitet von F. Lindemann, Bd. 2, Teil 1, Leipzig 1891, S. 242“ verweisen, betrachten wir die besondere Kurve dritter Ordnung, die durch die Gleichungen:

$$x = t, \quad y = \frac{t^2}{2}, \quad z = \frac{t^3}{6}$$

dargestellt wird. Wenn die Bogenlänge der Kurve als mit wachsendem t wachsend angesehen wird, ergibt sich:

$$\frac{ds}{dt} = 1 + \frac{t^2}{2},$$

$$\alpha = \frac{1}{1+\frac{t^2}{2}}, \quad \beta = \frac{t}{1+\frac{t^2}{2}}, \quad \gamma = \frac{\frac{t^2}{2}}{1+\frac{t^2}{2}}.$$

$$l = \frac{-t}{1+\frac{t^2}{2}}, \quad m = \frac{1-\frac{t^2}{2}}{1+\frac{t^2}{2}}, \quad n = \frac{t}{1+\frac{t^2}{2}},$$

$$\lambda = \frac{\frac{t^2}{2}}{1+\frac{t^2}{2}}, \quad \mu = -\frac{t}{1+\frac{t^2}{2}}, \quad \nu = \frac{1}{1+\frac{t^2}{2}}.$$

$$\varrho = \left(1+\frac{t^2}{2}\right)^2, \quad r = -\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^2, \quad \sigma = \frac{t^2}{\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^2}, \quad k = -1.$$

Weiter folgt, wie vorhin:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = 0, \quad E = 0, \quad F = -1 = k.$$

Die betrachtete Kurve hat infolge der Gleichung $\frac{\varrho}{r} = -1$ die Eigenschaft, eine isogonale Trajektorie der Erzeugenden eines Zylinders zu sein. Die Richtungskosinus dieser Erzeugenden, oder mit anderen Worten, die Richtungskosinus der rektifizierenden Kanten der Kurve sind:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Führen wir ein u, v, w-System mit Hilfe der Gleichungen:

$$\frac{x-z}{\sqrt{2}} = u, \quad y = v, \quad \frac{x+z}{\sqrt{2}} = w$$

ein, so werden die Gleichungen der Kurve die folgenden:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t - \frac{t^3}{6}\right), \quad v = \frac{t^2}{2}, \quad w = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t + \frac{t^3}{6}\right).$$

Die Gleichungen der Filarevolventen der Kurve sind:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t - \frac{t^3}{6}\right) + \left(\tau - t - \frac{t^3}{6}\right)\frac{1 - \frac{t^2}{2}}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)},$$

$$v_1 = \frac{t^2}{2} + \left(\tau - t - \frac{t^3}{6}\right)\frac{t}{1 + \frac{t^2}{2}},$$

$$w_1 = \frac{\tau}{\sqrt{2}}.$$

Diese Filarevolventen sind die Evolventen der senkrechten Projektion der Kurve auf die u, v-Ebene, somit die Evolventen der durch die Gleichung:

$$u^2 = v\left(1 - \frac{v}{3}\right)^2$$

dargestellten Kurve dritter Ordnung.

§ 21. Eine Untersuchung von G. Koenigs.

Die Aufgabe, einer gegebenen Kurve eine zweite so zuzuordnen, daß 1. jedem Punkt (P) der ersten ein Punkt (P_1) der zweiten entspricht, und 2. der Punkt (P_1) in der zu (P) gehörenden Schmiegungsebene der ersten Kurve, der Punkt (P) in der zu (P_1) gehörenden Schmiegungsebene der zweiten Kurve liegt, ist von G. Koenigs gelöst worden (American Journal of Mathematics, Bd. 19, 1897, S. 259), und zwar unter Anwendung homogener Koordinaten. Wir wollen die Lösung unserer Aufgabe mit rechtwinkligen Koordinaten durchführen, damit die Rolle, welche hier die beiden Krümmungen der gegebenen Kurve spielen, berücksichtigt werde; wir bemerken aber ausdrücklich, daß die Überwindung der in der Aufgabe liegenden Schwierigkeit von G. Koenigs herrührt.

Zunächst haben wir eine Hilfsbetrachtung nötig, um die vierten Ableitungen der Koordinaten nach der Bogenlänge durch die drei ersten auszudrücken. Aus der Gleichung:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{l}{\varrho}$$

folgt:

$$\frac{d^3x}{ds^3} = -\frac{\alpha}{\varrho^2} + l\frac{d\frac{1}{\varrho}}{ds} - \frac{\lambda}{\varrho r},$$

$$\frac{d^4x}{ds^4} = -\frac{3}{\varrho}\frac{d\frac{1}{\varrho}}{ds}\alpha + \left(\frac{d^2\frac{1}{\varrho}}{ds^2} - \frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{\varrho r^2}\right)l - \left(\frac{2}{r}\frac{d\frac{1}{\varrho}}{ds} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\right)\lambda.$$

Drücken wir hierin α, l, λ durch die drei ersten Ableitungen von x nach s aus, so ergibt sich eine Beziehung von der Form:

$$\frac{d^4x}{ds^4} = -4P_1\frac{d^3x}{ds^3} - 6P_2\frac{d^2x}{ds^2} - 4P_3\frac{dx}{ds},$$

wo:

$$2P_1 = \frac{\varrho'}{\varrho} + \frac{r'}{2r},$$

$$6P_2 = \frac{\varrho''}{\varrho} + \frac{\varrho' r'}{\varrho r} + \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2},$$

$$4P_3 = \frac{r'}{r\varrho^2} - \frac{\varrho'}{\varrho^3}.$$

Verstehen wir nun unter t_1 und t_2 zwei Funktionen von s, so stellen die Gleichungen:

$$\xi = x + t_1\frac{dx}{ds} + t_2\frac{d^2x}{ds^2},$$

$$\eta = y + t_1\frac{dy}{ds} + t_2\frac{d^2y}{ds^2},$$

$$\zeta = z + t_1\frac{dz}{ds} + t_2\frac{d^2z}{ds^2}$$

die Koordinaten einer Kurve dar, bei welcher der zu s gehörende Punkt in der Schmiegungsebene des zu s gehörenden Punktes (x, y, z) der gegebenen Kurve liegt. Soll der Punkt (x, y, z) in der zu dem Punkte (ξ, η, ζ) gehörenden Schmiegungsebene der zweiten Kurve liegen, so muß es zwei Funktionen τ_1 und τ_2 von s derart geben, daß:

$$x = \xi + \tau_1\frac{d\xi}{ds} + \tau_2\frac{d^2\xi}{ds^2}, \quad \text{usw.}$$

Setzen wir hierin den obigen Ausdruck für ξ ein, so folgt:

$$0 = \frac{dx}{ds}\left(t_1 + \tau_1(1 + t_1') + \tau_2 t_1''\right) + \frac{d^2x}{ds^2}\left(t_2 + \tau_1(t_1 + t_2') + \tau_2(1 + 2t_1' + t_2'')\right)$$
$$+ \frac{d^3x}{ds^3}\left(\tau_1 t_2 + \tau_2(t_1 + 2t_2')\right) + \frac{d^4x}{ds^4}\tau_2 t_2.$$

Aber $\frac{d^4x}{ds^4}$ ist, wie wir sahen, linear und homogen in $\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^3x}{ds^3}$. Da die vorige Gleichung besteht, wenn x durch y oder z ersetzt wird, so müssen, nachdem $\frac{d^4x}{ds^4}$ durch $\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^3x}{ds^3}$ ausgedrückt ist, die Koeffizienten von $\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^3x}{ds^3}$ verschwinden. Dies liefert die Gleichungen:

$$t_1 + \tau_1(1 + t_1') + \tau_2 t_1'' - 4P_3\tau_2 t_2 = 0,$$

$$t_2 + \tau_1(t_1 + t_2') + \tau_2(1 + 2t_1' + t_2'') - 6P_2\tau_2 t_2 = 0,$$

$$\tau_1 t_2 + \tau_2(t_1 + 2t_2') - 4P_1\tau_2 t_2 = 0.$$

Die Elimination von τ_1 und τ_2 ergibt:

$$t_2^2(t_1'' - 4P_3t_2) - t_2(1+t_1')(t_1 + 2t_2' - 4P_1t_2)$$
$$+ t_1(t_1 + t_2')(t_1 + 2t_2' - 4P_1t_2)$$
$$- t_1t_2(1 + 2t_1' + t_2'' - 6P_2t_2) = 0,$$

oder, da das Glied $-t_1t_2(1+t_1')$ zweimal auftritt:

$$t_2^2(t_1'' - 4P_3t_2) - t_2(1+t_1')(2t_1 + 2t_2' - 4P_1t_2)$$
$$+ t_1(t_1 + t_2')(t_1 + 2t_2' - 4P_1t_2)$$
$$- t_1t_2(t_1' + t_2'' - 6P_2t_2) = 0.$$

Wir führen nun eine Hilfsfunktion τ von s ein, welche durch die Differentialgleichung:

$$t_1 + t_2' - 2P_1t_2 = -\frac{\tau'}{\tau}t_2$$

definiert sei. Dann ergibt sich:

$$t_1' + t_2'' = 2P_1't_2 + 4P_1^2t_2 - 4P_1\frac{\tau'}{\tau}t_2 - 2P_1t_1 + \left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2 t_2 + \frac{\tau'}{\tau}t_1 - \frac{d^2\log\tau}{ds^2}t_2.$$

$$(t_1 + t_2')(t_1 + 2t_2' - 4P_1t_2) = -2P_1t_1t_2 + \frac{\tau'}{\tau}(t_1t_2 - 4P_1t_2^2) + 2\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2 t_2^2,$$

somit:

$$t_1(t_1 + t_2')(t_1 + 2t_2' - 4P_1t_2) - t_1t_2(t_1' + t_2'')$$
$$= t_1t_2^2\left(-2P_1' - 4P_1^2 + \left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2 + \frac{d^2\log\tau}{ds^2}\right).$$

Da:

$$-t_2(1+t_1')(2t_1 + 2t_2' - 4P_1t_2) = 2(1+t_1')\frac{\tau'}{\tau}t_2^2,$$

so nimmt unsere Bedingung die Form an:

$$t_1'' - 4P_3t_2 + 2(1+t_1')\frac{\tau'}{\tau} - 2P_1't_1 - 4P_1^2t_1 + \left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2 t_1 + \frac{d^2\log\tau}{ds^2}t_1 + 6P_2t_1 = 0.$$

Setzt man jetzt:

$$2\vartheta = \frac{dt_1\tau}{ds} + 2\tau,$$

oder:

$$2\vartheta = \left(t_1\frac{\tau'}{\tau} + t_1' + 2\right)\tau,$$

so folgt:

$$2\vartheta' = \left(t_1'' + 2(1+t_1')\frac{\tau'}{\tau} + \left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2 t_1 + \frac{d^2\log\tau}{ds^2}t_1\right)\tau,$$

wodurch unsere Bedingung in:

$$\vartheta' - 2P_3t_2\tau - (P_1' + 2P_1^2 - 3P_2)t_1\tau = 0$$

übergeht. Aber:

$$t_1\tau = 2P_1t_2\tau - \frac{dt_2\tau}{ds},$$

folglich:

$$\vartheta' = \{(P_1' + 2P_1^2 - 3P_2)2P_1 + 2P_3\}t_2\tau + (3P_2 - P_1' - 2P_1^2)\frac{dt_2\tau}{ds}.$$

Unter Benutzung der für P_1, P_2, P_3 aufgestellten Ausdrücke findet man:

$$3P_2 - P_1' - 2P_1^2 = \frac{1}{2\varrho^2} - \frac{1}{4r}\left(r'' - \frac{r'^2}{2r} - \frac{2}{r}\right).$$

Der Ausdruck:

$$r'' - \frac{r'^2}{2r} - \frac{2}{r}$$

werde, wie früher S. 279, mit σ bezeichnet. Ferner folgt:

$$(P_1' + 2P_1^2 - 3P_2)2P_1 + 2P_3 = \sigma\left(\frac{\varrho'}{4r\varrho} + \frac{r'}{8r^2}\right) - \frac{\varrho'}{\varrho^3} + \frac{r'}{4r\varrho^2}$$

$$= \frac{d\left(\frac{1}{2\varrho^2} - \frac{\sigma}{4r}\right)}{ds} + \frac{1}{4r}\left(\sigma' + \frac{r'}{\varrho^2} + \frac{\sigma\varrho'}{\varrho} - \frac{\sigma r'}{2r}\right).$$

Wenn wir also:

$$\sigma' + \frac{r'}{\varrho^2} + \frac{\sigma\varrho'}{\varrho} - \frac{\sigma r'}{2r} = \sigma_1$$

setzen, gewinnt unsere Bedingung die Gestalt:

$$\vartheta' = \left(\frac{d\left(\frac{1}{2\varrho^2} - \frac{\sigma}{4r}\right)}{ds} + \frac{\sigma_1}{4r}\right)t_2\tau + \left(\frac{1}{2\varrho^2} - \frac{\sigma}{4r}\right)\frac{dt_2\tau}{ds}.$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erstens: $\sigma_1 = 0$, d. h. die Tangenten der Kurve gehören einem linearen Komplex an. Hier setzen wir $t_2\tau$ gleich einer willkürlich gewählten Funktion von s, etwa $U(s)$, und erhalten:

$$\vartheta = \left(\frac{1}{2\varrho^2} - \frac{\sigma}{4r}\right)U(s) + \text{const.},$$

$$t_1\tau = 2P_1U - U', \quad -\tau = \frac{1}{2}(2P_1'U + 2P_1U' - U'') - \vartheta,$$

$$t_1 = \frac{2P_1U - U'}{\tau}, \quad t_2 = \frac{U}{\tau},$$

so daß t_1 und t_2 mit Hilfe der willkürlich zu wählenden Funktion U dargestellt sind.

Zweitens: $\sigma_1 \gtrless 0$. Hier bezeichnen wir wieder eine willkürlich gewählte Funktion mit $U(s)$ und setzen:

$$t_2\tau = \frac{4r}{\sigma_1}\frac{dU(s)}{ds}.$$

Dann folgt:

$$\vartheta = \left(\frac{1}{2\varrho^2} - \frac{\sigma}{4r}\right)\frac{4rU'}{\sigma_1} + U + \text{const.},$$

$$t_1 \tau = \frac{8 P_1 r U'}{\sigma_1} - \frac{d}{ds}\left(\frac{4 r U'}{\sigma_1}\right),$$

$$-\tau = 4 \frac{d}{ds}\left(\frac{P_1 r U'}{\sigma_1}\right) - 2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{r U'}{\sigma_1}\right) - \vartheta,$$

woraus sich t_1 und t_2 unmittelbar bestimmen lassen.

So wichtig das in den vorstehenden Formeln ausgedrückte Koenigssche Ergebnis an sich ist, indem es einerseits zeigt, daß die Lösung unserer Aufgabe keine Integrationen erfordert, und anderseits, daß der Umstand, ob die Tangenten der gegebenen Kurve einem linearen Komplex angehören oder nicht, von Einfluß auf die Lösung ist, dürfen wir uns doch nicht die geringe Brauchbarkeit der Lösung verhehlen, wenn die Aufgabe durch weitere Forderungen eingeschränkt wird, wie z. B. die der Unveränderlichkeit des Abstandes der Punkte (x, y, z) und (ξ, η, ζ), oder des Winkels, den dieser Abstand mit der Hauptnormale der gegebenen Kurve bildet. Einen Fall, in dem die Koenigsschen Formeln zum Ziele führen, werden wir im folgenden Paragraphen kennen lernen.

§ 22. Bertrandsche Kurven.

J. Bertrand kam bei Gelegenheit einer flächentheoretischen Untersuchung auf die Frage, unter welchen Umständen die Hauptnormalen einer Kurve zugleich die Hauptnormalen einer zweiten Kurve sein können (Journal de Mathématiques, Bd. 15, 1850, S. 343). Er fand unter Benutzung flächentheoretischer Hilfsmittel, daß der fragliche Fall nur eintreten kann, wenn die erste und zweite Krümmung einer Kurve durch eine Beziehung von der Form:

$$\frac{u}{\varrho} + \frac{v}{r} = 1$$

verbunden sind, in der u und v Konstante bedeuten. Die zweite Kurve wird dann durch die Gleichungen:

$$\xi = x + ul, \quad \eta = y + um, \quad \zeta = z + un$$

festgelegt.

Wir leiten diesen Satz zuerst mit Hilfe der im vorigen Paragraphen gefundenen Formeln ab. Soll der Punkt (ξ, η, ζ) auf der zum Punkt (x, y, z) gehörenden Hauptnormale liegen, so muß t_1 gleich Null sein. Damit die Verbindungsstrecke zwischen beiden Punkten in der Hauptnormale der zugeordneten Kurve liege, muß die Tangente der zugeordneten Kurve senkrecht zu der Verbindungsstrecke sein, d. h.

$$\sum \frac{d\xi}{ds} l = 0.$$

Nun ist:

$$\frac{d\xi}{ds} = \alpha + \frac{dt_2}{ds}\frac{l}{\varrho} - t_2\left(\frac{\varrho'}{\varrho^2}l + \frac{\alpha}{\varrho^2} + \frac{\lambda}{\varrho r}\right),$$

somit:

$$\sum \frac{d\xi}{ds} l = \frac{1}{\varrho}\frac{dt_2}{ds} - t_2\frac{\varrho'}{\varrho^2}.$$

Die Gleichung:

$$\frac{dt_2}{ds} - t_2\frac{\varrho'}{\varrho} = 0$$

ergibt:

$$t_2 = u\varrho,$$

wo u eine Konstante bedeutet.

Die in den Koenigsschen Formeln auftretende Funktion $U(s)$ muß derartig bestimmt werden, daß die Gleichungen $t_1 = 0$ und $t_2 = u\varrho$ erfüllt sind. Wir führen dies nur unter der Voraussetzung $\sigma_1 \gtrless 0$ durch, da der Fall $\sigma_1 = 0$ ganz entsprechend behandelt werden kann. Die Bedingung $t_1 = 0$ ergibt:

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho} + \frac{r'}{2r}\right)\frac{rU'}{\sigma_1} - \frac{d}{ds}\left(\frac{rU'}{\sigma_1}\right) = 0.$$

Es sei ε gleich $+1$ oder gleich -1, je nachdem r positiv oder negativ ausfällt. Dann liefert die Integration der vorstehenden Gleichung:

$$\frac{rU'}{\sigma_1} = c\varrho\sqrt{\varepsilon r},$$

wo c eine Konstante bedeutet. Da τ gleich ϑ wird, so ergibt die Gleichung für $t_2\tau$:

$$u\varrho\left\{\left(\frac{1}{2\varrho^2} - \frac{\sigma}{4r}\right)4c\varrho\sqrt{\varepsilon r} + U + \text{const.}\right\} = 4c\varrho\sqrt{\varepsilon r},$$

oder:

$$\left(\frac{1}{2\varrho^2} - \frac{\sigma}{4r}\right)4c\varrho\sqrt{\varepsilon r} + U + \text{const.} - \frac{4c}{u}\sqrt{\varepsilon r} = 0.$$

Differenziert man diese Gleichung nach s und setzt für U' den obigen, für σ_1 den S. 285 angegebenen Ausdruck ein, so folgt nach einigen Vereinfachungen:

$$-\frac{\varrho'}{\varrho^2} + \frac{r'}{r\varrho} - \frac{r'}{ur} = 0,$$

oder:

$$\frac{r'}{u} = \frac{\varrho r' - r\varrho'}{\varrho^2},$$

d. h.

$$\frac{r}{u} = \frac{r}{\varrho} + \text{const.},$$

oder:

$$\frac{u}{\varrho} + \frac{v}{r} = 1,$$

wenn v eine Konstante bedeutet.

Um dies Ergebnis ohne Benutzung der Koenigsschen Formeln abzuleiten, stellen wir eine die Hauptnormalen der angenommenen Kurve schneidende Kurve durch die Gleichungen dar:

$$\xi = x + ul, \quad \eta = y + um, \quad \zeta = z + un.$$

Dann ist:

$$\frac{d\xi}{ds} = \alpha + \frac{du}{ds} l - u\left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{r}\right).$$

Damit die Tangente der zweiten Kurve senkrecht zur Hauptnormale der ersten sei, muß u konstant sein. Die Bogenlänge der zweiten Kurve bezeichnen wir mit σ und erhalten weiter, wenn sie als mit wachsendem s wachsend betrachtet wird:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \sqrt{\left(1 - \frac{u}{\varrho}\right)^2 + \frac{u^2}{r^2}},$$

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{\left(1 - \frac{u}{\varrho}\right)\alpha - \frac{u}{r}\lambda}{\sqrt{\left(1 - \frac{u}{\varrho}\right)^2 + \frac{u^2}{r^2}}},$$

$$\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} = \frac{\left\{\left(1-\frac{u}{\varrho}\right)^2 + \frac{u^2}{r^2}\right\}\left\{l\left(\frac{1}{\varrho}\left(1-\frac{u}{\varrho}\right) - \frac{u}{r^2}\right) + \frac{u\varrho'}{\varrho^2}\alpha + \frac{ur'}{r^2}\lambda\right\} - \left\{\alpha\left(1-\frac{u}{\varrho}\right) - \frac{u}{r}\lambda\right\}\left\{\left(1-\frac{u}{\varrho}\right)\frac{u\varrho'}{\varrho^2} - \frac{u^2 r'}{r^3}\right\}}{\left\{\left(1 - \frac{u}{\varrho}\right)^2 + \frac{u^2}{r^2}\right\}^2}.$$

Damit die Hauptnormale der zweiten Kurve mit der der ersten zusammenfalle, müssen die Koeffizienten von α und λ in dieser Gleichung verschwinden. Der Koeffizient von α im Zähler von $\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}$ ist gleich:

$$\frac{u^2}{r^2}\left\{\left(1 - \frac{u}{\varrho}\right)\frac{r'}{r} + \frac{u\varrho'}{\varrho^2}\right\};$$

der von λ ist gleich:

$$\left(1 - \frac{u}{\varrho}\right)\frac{u}{r}\left\{\left(1 - \frac{u}{\varrho}\right)\frac{r'}{r} + \frac{u\varrho'}{\varrho^2}\right\};$$

daher:

$$\left(1 - \frac{u}{\varrho}\right)\frac{r'}{r} + \frac{u\varrho'}{\varrho^2} = 0,$$

oder:

$$r' = u\left(\frac{r'}{\varrho} - \frac{r\varrho'}{\varrho^2}\right).$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$r = u\frac{r}{\varrho} + v,$$

oder:

$$\frac{u}{\varrho} + \frac{v}{r} = 1$$

wo v eine Konstante bedeutet. Ist diese Bedingung erfüllt, und ist ε gleich $+1$ oder gleich -1, je nachdem $r \gtrless 0$, so folgt:

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \varepsilon \frac{v\alpha - u\lambda}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} = \frac{vr - u\varrho}{\varrho(u^2+v^2)} l.$$

Die Richtungskosinus der Tangente, der Haupt- und Binormale der Kurve (ξ, η, ζ) sollen mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; l_1, m_1, n_1; λ_1, μ_1, ν_1 bezeichnet werden, ihre erste und zweite Krümmung mit $\frac{1}{\varrho_1}, \frac{1}{r_1}$.

Wenn nun ε_1 gleich $+1$ oder gleich -1 ist, je nachdem $vr - u\varrho$ positiv oder negativ ausfällt, so wird:

$$\alpha_1 = \varepsilon \frac{v\alpha - u\lambda}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad l_1 = \varepsilon_1 l, \quad \lambda_1 = \varepsilon\varepsilon_1 \frac{u\alpha + v\lambda}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

$$\frac{1}{\varrho_1} = \varepsilon_1 \frac{vr - u\varrho}{\varrho(u^2+v^2)}, \quad \frac{1}{r_1} = \frac{r}{u^2+v^2}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt der P. Serretsche Satz, daß entsprechende Tangenten und entsprechende Schmiegungsebenen beider Kurven einen konstanten Winkel miteinander bilden (Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure, Paris 1860, S. 109), ferner der Schellsche Satz, daß das Produkt der zweiten Krümmungen beider Kurven konstant ist (Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung. Leipzig, 1. Aufl. 1859, S. 76, 2. Aufl. 1898, S. 110), endlich der A. Mannheimsche Satz, daß das Doppelverhältnis entsprechender Punkte beider Kurven und der zugehörigen Mittelpunkte der ersten Krümmungen konstant ist (Comptes rendus de l'Acad. des sciences, Paris 1877, Bd. 85, S. 212). Zum Beweise des letzteren Satzes bemerken wir, daß man für die Koordinaten des Mittelpunktes der ersten Krümmung der Kurve (ξ, η, ζ) die Gleichungen hat:

$$x_1' = x + \frac{v(ur + v\varrho)}{vr - u\varrho} l, \quad \text{usw.}$$

Das fragliche Doppelverhältnis wird daher gleich:

$$\frac{\varrho}{\varrho - u} \cdot \frac{v(ur + v\varrho) - u(vr - u\varrho)}{v(ur + v\varrho)} = \frac{u^2+v^2}{v^2},$$

da:

$$(\varrho - u)(ur + v\varrho) = v \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot r\varrho.$$

Die Kurven von konstanter erster Krümmung gehören zu den Bertrandschen Kurven und entsprechen der Festsetzung $v = 0$. Eine Kurve von konstanter zweiter Krümmung gehört, da u nicht verschwinden kann, nur dann zu den Bertrandschen Kurven, wenn auch die erste Krümmung konstant ist. Die Kurve ist in diesem Falle eine gewöhnliche Schraubenlinie.

§ 23. Untersuchungen von S. Lie und L. Bianchi. Kurven von konstanter erster oder zweiter Krümmung.

S. Lie hat im fünften Band des Archiv for Mathematik og Naturvideskab, Christiania 1881, S. 329, ein Verfahren angegeben, mit Hilfe dessen aus einer Kurve von konstanter zweiter Krümmung andere Kurven mit derselben Eigenschaft abgeleitet werden können. Im Anschluß hieran veröffentlichte L. Bianchi im Giornale di Matematiche, Bd. 21, 1883, S. 222, ein Verfahren zur Bestimmung von Kurven konstanter erster oder zweiter Krümmung. Wir folgen der Darstellung Bianchis, nehmen aber diejenigen Änderungen vor, die durch unsere Festsetzungen, daß $\varrho > 0$ und:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 1$$

sei, bedingt sind.

Um den Lieschen Satz abzuleiten, denken wir uns eine Kurve durch die Gleichungen:

$$\xi = x + r(\alpha \cos \vartheta + l \sin \vartheta), \quad \eta = y + r(\beta \cos \vartheta + m \sin \vartheta),$$
$$\zeta = z + r(\gamma \cos \vartheta + n \sin \vartheta)$$

bestimmt, in denen ϑ eine willkürlich gewählte Funktion von s bedeutet. Der dem Punkte (x, y, z) entsprechende Punkt (ξ, η, ζ) liegt in der zu dem Wert s gehörenden Schmiegungsebene der gegebenen Kurve. Sein Abstand vom Punkt (x, y, z) ist gleich dem absoluten Werte von r, und der Winkel dieses Abstandes mit der zu s gehörenden Hauptnormale der Kurve (x, y, z) ist gleich ϑ.

Wir betrachten r als konstant und bezeichnen die Bogenlänge der Kurve (ξ, η, ζ) mit σ. Dann ergibt sich:

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = 1 + r^2\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{d\vartheta}{ds} - \frac{\sin\vartheta}{r}\right)^2.$$

Setzen wir fest, daß σ mit s wachsen soll, und bestimmen ϑ mit Hilfe der Differentialgleichung:

$$\frac{d\vartheta}{ds} + \frac{1}{\varrho} - \frac{\sin\vartheta}{r} = 0,$$

so werden die Bogenlängen beider Kurven zwischen entsprechenden Punkten einander gleich. Wir können daher σ gleich s nehmen und erhalten:

$$\frac{d\xi}{ds} = \alpha \cos^2\vartheta + l \sin\vartheta \cos\vartheta - \lambda \sin\vartheta,$$

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{2\sin\vartheta}{r}\right)(\alpha \sin\vartheta \cos\vartheta + l \sin^2\vartheta + \lambda \cos\vartheta).$$

Die Richtungskosinus der Tangente, der Haupt- bzw. Binormale der Kurve (ξ, η, ζ) seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; l_1, m_1, n_1; \lambda_1, \mu_1, \nu_1$; ihre erste und zweite Krümmung werde mit $\frac{1}{\varrho_1}, \frac{1}{r_1}$ bezeichnet. Ist ε_0 gleich $+1$ oder gleich -1, je nachdem der Ausdruck:

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{2 \sin \vartheta}{r}$$

positiv oder negativ ausfällt, so ergibt sich, da ϱ_1 positiv sein muß:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha \cos^2 \vartheta + l \sin \vartheta \cos \vartheta - \lambda \sin \vartheta, \\ l_1 &= \varepsilon_0 (\alpha \sin \vartheta \cos \vartheta + l \sin^2 \vartheta + \lambda \cos \vartheta), \\ \lambda_1 &= \varepsilon_0 (\alpha \sin \vartheta - l \cos \vartheta), \\ \frac{1}{\varrho_1} &= \varepsilon_0 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{2 \sin \vartheta}{r}\right), \quad r_1 = r; \end{aligned}$$

die zweite Krümmung der abgeleiteten Kurve ist also gleich der der Ausgangskurve.

In betreff der Differentialgleichung:

$$\frac{d\vartheta}{ds} - \frac{\sin \vartheta}{r} + \frac{1}{\varrho} = 0$$

sei hervorgehoben, daß sie durch die Substitution $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \vartheta_1$ in eine Riccatische Differentialgleichung übergeht. Sie kann also durch Quadraturen integriert werden, falls man ein partikuläres Integral von ihr kennt.

An den dargelegten Satz von Lie knüpfte Bianchi die folgende Bemerkung:

Ordnet man einer beliebigen Kurve, die also auch eine veränderliche zweite Krümmung besitzen kann, durch die Gleichungen:

$$\xi = \int \alpha_1 \, ds, \quad \eta = \int \beta_1 \, ds, \quad \zeta = \int \gamma_1 \, ds$$

eine neue Kurve zu, so hat die letztere mit der Ausgangskurve die Bogenlänge gemein, aber auch, falls $\vartheta(s)$ der Differentialgleichung:

$$\frac{d\vartheta}{ds} + \frac{1}{\varrho} - \frac{\sin \vartheta}{r} = 0$$

genügt, die zweite Krümmung.

Diese Zuordnung ist auch dann möglich, wenn die Ausgangskurve durch eine gerade Linie vertreten wird. Die erste Krümmung ist dann als gleich Null zu betrachten. Die Binormalen sind als nach einem beliebigen Gesetz aufeinanderfolgende, die Ausgangsgerade senkrecht schneidende Geraden zu betrachten. Bedeutet also $\varphi(s)$

eine willkürlich angenommene Funktion von s, während die Ausgangsgerade mit der z-Achse zusammenfällt, so ist:

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 1,$$
$$l = +\sin\varphi, \quad m = -\cos\varphi, \quad n = 0,$$
$$\lambda = \cos\varphi, \qquad \mu = \sin\varphi, \qquad \nu = 0$$

zu setzen. Die Frenetsche Formel:

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{l}{r}$$

ergibt:

$$\frac{1}{r} = -\varphi'(s).$$

Die Bedingung für ϑ nimmt die Gestalt an:

$$\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} + \varphi'(s)\,ds = 0,$$

oder:

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = e^{-\varphi(s)}.$$

Daraus folgt:

$$\sin\vartheta = \frac{1}{\cos i\varphi}, \quad \cos\vartheta = \frac{-i\sin i\varphi}{\cos i\varphi}.$$

Die Gleichungen der zugeordneten Kurve besitzen die Gestalt:

$$\xi = \int \frac{-i\sin i\varphi\sin\varphi - \cos i\varphi\cos\varphi}{\cos^2 i\varphi}\,ds, \quad \eta = \int \frac{i\sin i\varphi\cos\varphi - \cos i\varphi\sin\varphi}{\cos^2 i\varphi}\,ds,$$

$$\zeta = -\int \frac{\sin^2 i\varphi}{\cos^2 i\varphi}\,ds.$$

Da $\cos i\varphi$ beständig positiv ist, wird ε_0 gleich $+1$ oder -1, je nachdem $\varphi'(s)$ positiv oder negativ ist. Die erste Krümmung der Kurve (ξ, η, ζ) ist gleich:

$$\frac{2\varepsilon_0\varphi'(s)}{\cos i\varphi(s)},$$

die zweite gleich $-\varphi'(s)$.

Wollen wir auf diesem Wege eine Kurve mit konstanter zweiter Krümmung erhalten, so ist:

$$\varphi(s) = \frac{s}{R} + \tau$$

zu setzen, wo R und τ Konstanten bedeuten. Für $\tau = 0$ ergibt sich:

$$\xi = -R\frac{\sin\frac{s}{R}}{\cos\frac{is}{R}}, \quad \eta = R\frac{\cos\frac{s}{R}}{\cos\frac{is}{R}}, \quad \zeta = s + iR\operatorname{tg}\frac{is}{R}.$$

Die Entwicklung von ζ beginnt mit dem Gliede $\frac{s^3}{8R^2}$; mit wachsendem s wächst also auch ζ. Die den verschiedenen Werten von τ entsprechenden Kurven werden durch Drehung der Kurve $\tau = 0$ um die z-Achse erhalten. Die so entstehende Umdrehungsfläche ist die Rotationsfläche der Traktrix. Bei positivem R windet sich die Kurve $\tau = 0$ von der positiven y-Achse nach der negativen x-Achse hin um die z-Achse hinauf, bei negativem R von der negativen y-Achse nach der negativen x-Achse hin, so daß zwei Typen von Kurven mit konstanter zweiter Krümmung gefunden sind.

Eine weitere Bemerkung Bianchis führt zur Bestimmung von Kurven mit konstanter erster Krümmung. Ordnet man einer gegebenen Kurve mittels der Gleichungen:

$$\xi = \int \lambda\, ds, \qquad \eta = \int \mu\, ds, \qquad \zeta = \int \nu\, ds$$

eine zweite zu und nimmt ε gleich $+1$ oder -1, je nachdem $r \gtrless 0$, so ist offenbar $\frac{\varepsilon}{r}$ die erste Krümmung und $-\frac{1}{\varrho}$ die zweite Krümmung der zugeordneten Kurve. Auf diese Weise wird aus einer Kurve von konstanter zweiter Krümmung eine solche von konstanter erster Krümmung erhalten.

Wir weisen noch auf die Aufgabe hin, das Bianchische Verfahren zur Auffindung von Bertrandschen Kurven zu verwenden.

§ 24. Geometrische Bedeutung von $\frac{d\varrho}{ds}$ und r.

1. Wir legen durch die Punkte einer Hauptnormale, die zu einem gewöhnlichen Punkte der Kurve $\left(x = g_1(s),\ y = g_2(s),\ z = g_3(s)\right)$ gehöre, Ebenen, die zu ihr senkrecht sind. Eine solche Ebene hat die Gleichung:

$$\Sigma(\xi - x - \tau l)\, l = 0.$$

Soll der zu dem Werte $s + \Delta s$ gehörende Kurvenpunkt in dieser Ebene liegen, so muß:

$$\Sigma\left(g_1(s + \Delta s) - g_1(s)\right) l = \tau$$

sein, oder:

$$\frac{\Delta s^2}{2\varrho} - \frac{1}{6\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}\Delta s^3 + \cdots = \tau.$$

Hieraus geht hervor, daß für ein absolut genommen hinreichend kleines Δs die Zahl τ positiv ausfällt, und daß für ein hinreichend kleines τ zwei Werte von Δs vorhanden sind, die sich aus der Entwicklung:

$$\Delta s = \sqrt{2\varrho}\,\sqrt{\tau} + \frac{1}{3}\frac{d\varrho}{ds}(\sqrt{\tau})^2 + \cdots$$

ergeben, je nachdem $\sqrt{\tau}$ als positive oder als negative Zahl betrachtet wird. Der Wert von Δs bei positivem $\sqrt{\tau}$ sei $\Delta_1 s$, der bei negativem $\sqrt{\tau}$ sei $\Delta_2 s$. Der Mittelpunkt der Sehne, welche die zu den Werten $s + \Delta_1 s$ und $s + \Delta_2 s$ gehörenden Kurvenpunkte miteinander verbindet, besitze die Koordinaten x_0, y_0, z_0. Dann ergibt sich:

$$x_0 = x + \left(\frac{1}{3}\frac{d\varrho}{ds}\alpha + l\right)\tau + \cdots, \quad \text{usw.}$$

Hierdurch ist eine Kurve festgelegt. Die dem Grenzwert $\tau = 0$ entsprechende Tangente dieser Kurve berührt im Punkte (x, y, z). Sie liegt in der zu s gehörenden Schmiegungsebene und bildet mit der Hauptnormale einen Winkel, dessen Tangente gleich $\frac{1}{3}\frac{d\varrho}{ds}$ ist.

Dieser Satz entspricht bei einer Raumkurve dem S. 61 für eine ebene Kurve bewiesenen Satze.

2. de Saint-Venant hat im Journal de l'école polytéchnique Bd. 18, cah. 30, Paris 1845, S. 54 eine geometrische Bedeutung der zweiten Krümmung einer Raumkurve angegeben, die wir genauer untersuchen wollen.

Wir betrachten einen gewöhnlichen Kurvenpunkt $\big(x = g_1(s)$, $y = g_2(s)$, $z = g_3(s)\big)$ und tragen von ihm aus auf der positiven Halbtangente die Strecke ϱ ab. Durch den erhaltenen Punkt $(x = g_1 + \varrho\alpha$, $y = g_2 + \varrho\beta$, $z = g_3 + \varrho\gamma)$ legen wir eine zur Tangente (α, β, γ) senkrechte Ebene. Dieselbe schneidet die Tangentenfläche unserer Kurve in einer ebenen Kurve, für welche der zu s gehörende Krümmungsmittelpunkt bestimmt werden soll.

Die Gleichungen der zu $(s + \Delta s)$ gehörenden Kurventangente sind:

$$\xi = x + \Delta x + \tau(\alpha + \Delta\alpha), \quad \text{usw.}$$

Damit der Punkt (ξ, η, ζ) in unserer Ebene liege, muß:

$$\Sigma(\xi - x - \varrho\alpha)\,\alpha = 0$$

sein. Dies ergibt:

$$\Sigma\big(\Delta x - \varrho\alpha + \tau(\alpha + \Delta\alpha)\big)\,\alpha = 0,$$

oder:

$$\tau - \varrho + \Delta s - \frac{\tau}{2\varrho^2}\Delta s^2 + \cdots = 0.$$

Die Zahl τ ändert sich mit Δs. Wir setzen demgemäß:

$$\tau = \varrho + \tau_1\,\Delta s + \frac{\tau_2}{2}\Delta s^2 + \cdots$$

Die vorletzte Gleichung ergibt dann:

$$\tau_1 = -1, \quad \tau_2 = \frac{1}{\varrho}.$$

Hiermit erhält man:

$$\xi = x + (\varrho - \Delta s \cdots)\alpha + \left(\Delta s + \left(\frac{1}{2\varrho} - \frac{1}{2\varrho}\frac{d\varrho}{ds}\right)\Delta s^2 \cdots\right) l + \left(-\frac{\Delta s^2}{2r} \cdots\right)\lambda.$$

Wir ziehen in unserer Ebene durch den Punkt $(g_1 + \varrho\alpha, \ldots)$ eine Parallele zu der zu s gehörenden Hauptnormale und nehmen sie zur u-Achse, ebenso eine Parallele zur Binormale und nehmen sie zur v-Achse. Dann sind die Gleichungen des Schnittes hinsichtlich des u, v-Systems die folgenden:

$$u = \Delta s + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds}\right)\Delta s^2 \ldots, \quad v = -\frac{\Delta s^2}{2r} + \cdots$$

Die Koordinaten des zu $\Delta s = 0$ gehörenden Krümmungsmittelpunktes der Schnittkurve sind somit:

$$u = 0, \quad v = -r.$$

Sowohl dieses Ergebnis, wie manche ähnliche geometrische Bedeutung von ϱ und r, erhält erst durch flächentheoretische Betrachtungen seine richtige Beleuchtung.

IV. Kinematische Betrachtungen.

§ 25. Transformation rechtwinkliger Koordinaten. Allgemeines. Schiebung.

Gehen wir von einem Punkte P einer ebenen Kurve zu einem zweiten Punkt P' der Kurve über, so läßt sich, wie wir im § 3 S. 11 sahen, die in P berührende Tangente der Kurve durch eine Drehung der Ebene der Kurve in die in P' berührende Tangente überführen. Diese Drehung vollzieht sich um einen Punkt herum, der, wenn das Bogenstück PP' in den Punkt P zusammenschrumpft, in eine Grenzlage gelangt, in welcher er der zu P gehörende Drehungsmittelpunkt der Kurve genannt wurde. Können wir eine ähnliche Betrachtung bei einer Raumkurve durchführen? Da zeigt eine eingehendere Untersuchung, daß die nächstliegende Aufgabe darin besteht, die einfachste Bewegung des Raumes zu bestimmen, welche das zum Punkte P der Raumkurve gehörende Dreikant der Tangente, Haupt- und Binormale in diejenige Lage überführt, welche das zum Punkte P' der Kurve gehörende entsprechende Dreikant vor der Bewegung innehatte.

Um diese Aufgabe zu lösen, nehmen wir zunächst außer dem System der x, y, z-Achse ein zweites rechtwinkliges System, das der ξ, η, ζ-Achse, an und fragen, ob es möglich ist, das erste System so zu bewegen, daß die positiven Teile der x, y, z-Achse bezüglich in die Lage der positiven Teile der ξ, η, ζ-Achse gelangen.

Die Richtungskosinus der positiven ξ-Achse seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; die der positiven η-Achse seien $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; die der positiven ζ-Achse seien $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$. Zwischen diesen neun Richtungskosinus bestehen zunächst die Beziehungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1, \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0, \\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0, \\ \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Die Kosinus der Winkel, welche die positive x-Achse mit der positiven ξ, η, ζ-Achse bildet, sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; ebenso sind die Richtungskosinus der positiven y-Achse bzw. z-Achse hinsichtlich des ξ, η, ζ-Systems $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ bzw. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Wir haben daher auch:

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0, \\ \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0, \\ \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit ε einen Proportionalitätsfaktor, so ergibt sich aus der vierten und sechsten Gleichung des Systems (1):

$$\varepsilon\alpha_1 = (\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2), \quad \varepsilon\beta_1 = (\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2), \quad \varepsilon\gamma_1 = (\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3).$$

Aber:

$$(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)^2 + (\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2)^2 + (\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3)^2$$
$$= (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)(\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2) - (\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3)^2 = 1,$$

somit ist ε^2 gleich Eins. Ebenso zeigen die für $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ gefundenen Gleichungen, daß die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

den Wert ε besitzt.

Die vierte und fünfte der Gleichungen (1) ergeben:

$$\varepsilon'\alpha_2 = (\gamma_1\beta_3 - \beta_1\gamma_3), \quad \varepsilon'\beta_2 = (\alpha_1\gamma_3 - \gamma_1\alpha_3), \quad \varepsilon'\gamma_2 = (\beta_1\alpha_3 - \alpha_1\beta_3).$$

Hiernach ist unsere Determinante gleich ε', so daß $\varepsilon = \varepsilon'$.

Endlich ergibt die fünfte und sechste der Gleichungen (1):

$$\varepsilon''\alpha_3 = (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2), \quad \varepsilon''\beta_3 = (\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2), \quad \varepsilon''\gamma_3 = (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2).$$

Auf Grund dieser Beziehungen erhält obige Determinante den Wert ε'', so daß $\varepsilon'' = \varepsilon$.

Wir bestimmen nun die geometrische Bedeutung der Zahl ε.

Der Schnittpunkt O_1 der ξ, η, ζ-Achse besitze die Koordinaten a, b, c. Mit P_1, P_2, P_3 bezeichnen wir die Punkte, welche im Abstande Eins von O_1 auf der positiven ξ, η, ζ-Achse liegen.

Die durch O_1, P_2, P_3 gelegte Ebene hat die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ a+\alpha_2 & b+\beta_2 & c+\gamma_2 & 1 \\ a+\alpha_3 & b+\beta_3 & c+\gamma_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung befindet sich in der Normalform der Gleichung einer Ebene; denn die Koeffizienten von x, y, z sind der Reihe nach gleich $\varepsilon\alpha_1, \varepsilon\beta_1, \varepsilon\gamma_1$; sie besitzen also die Quadratsumme Eins. Wenn wir statt x, y, z der Reihe nach $a+\alpha_1, b+\beta_1, c+\gamma_1$ setzen, so geht die obige Determinante in:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 \\ a & b & c & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 0 \end{vmatrix}$$

oder in:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

d. h. in ε über. Es bedeutet also ε die positiv oder negativ genommene Maßzahl des senkrechten Abstandes des Punktes P_1 von der Ebene $O_1P_2P_3$, je nachdem P_1 auf der einen oder anderen Seite dieser Ebene liegt. Nun können wir das Tetraeder $O_1P_1P_2P_3$ so bewegen, daß O_1 in den Koordinatenanfangspunkt fällt und P_2 in den positiven Teil der y-Achse, P_3 in den positiven Teil der z-Achse. Fällt dann P_1 in den positiven Teil der x-Achse, so wird die letzte Determinante gleich:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

d. h. ε hat den Wert Eins; fällt aber P_1 in den negativen Teil der x-Achse, so wird die Determinante gleich:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

und ε besitzt den Wert -1. Im ersteren Falle ist das System der positiven ξ, η, ζ-Achsen mit dem der positiven x, y, z-Achsen zum Zusammenfallen gebracht, im zweiten Falle hat man noch eine Spiegelung des Raumes an der y, z-Ebene nötig, um das Zusammenfallen hervorzubringen. Da aber eine Spiegelung keine Bewegung des Raumes darstellt, so ist es im Fall $\varepsilon = -1$ überhaupt unmöglich, das eine System durch Bewegung in das andere zu überführen. Wir nehmen daher an, daß ε gleich Eins sei, und stellen uns die Aufgabe, die Überführung durch eine möglichst einfache, leicht vorstellbare Bewegung zu bewerkstelligen, da die vorhin betrachtete Bewegung im allgemeinen aus einer Verschiebung und zwei Drehungen um verschiedene Achsen besteht.

Die Koordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes werden durch seine Koordinaten ξ, η, ζ im ξ, η, ζ-System mit Hilfe der Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} x = a + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta, \\ y = b + \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta, \\ z = c + \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta \end{cases}$$

festgelegt.

Diese Gleichungen bestimmen eine Abbildung des Raumes auf sich selbst. Dem Punkt mit den Koordinaten ξ, η, ζ im x, y, z-System entspricht ein Bildpunkt mit den Koordinaten x, y, z in demselben System. Wir suchen die einfachste Bewegung des x, y, z-Systems aufzufinden, welche jeden Punkt in seinen Bildpunkt überführt. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden.

Im einfachsten dieser Fälle ist $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$, und damit sind $\alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2$ gleich Null. Hier geht offenbar jeder Punkt durch diejenige Schiebung des x, y, z-Systems in seinen Bildpunkt über, welche den Anfangspunkt des x, y, z-Systems in den Anfangspunkt des ξ, η, ζ-Systems überführt.

Im zweiten dieser Fälle, den wir im folgenden Paragraphen behandeln wollen, ist $a = b = c = 0$; der Koordinatenanfangspunkt fällt mit seinem Bildpunkt zusammen. Es wird sich zeigen, daß hier die Überführung der Punkte in ihre Bildpunkte durch eine Drehung des x, y, z-Systems um eine durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Achse bewerkstelligt werden kann. Wir bezeichnen diesen Fall kurz als Transformation durch Drehung.

Im dritten Falle, der im § 27 S. 304 behandelt wird, kann die Überführung entweder durch eine Schraubung oder durch eine Drehung um eine bestimmte Gerade bewerkstelligt werden. Wir bezeichnen diesen Fall kurz als Transformation durch Schraubung.

§ 26. Transformation durch Drehung.

Um die durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta, \\ y &= \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta, \\ z &= \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta \end{aligned}$$

dargestellte Abbildung des Raumes auf sich selbst als Folge einer Bewegung zu erkennen, fragen wir zunächst, ob es Punkte gibt, die mit ihren Bildpunkten zusammenfallen.

Für die Koordinaten dieser Punkte erhalten wir die Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} (\alpha_1 - 1)\xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta = 0, \\ \beta_1 \xi + (\beta_2 - 1)\eta + \beta_3 \zeta = 0, \\ \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + (\gamma_3 - 1)\zeta = 0. \end{cases}$$

Man hat:

$$\begin{aligned} (\beta_2 - 1)(\gamma_3 - 1) - \beta_3 \gamma_2 &= \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3 + 1, \\ \beta_3 \gamma_1 - \beta_1(\gamma_3 - 1) &= \alpha_2 + \beta_1, \\ \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1(\beta_2 - 1) &= \alpha_3 + \gamma_1. \end{aligned}$$

Multipliziert man die rechten Seiten dieser Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha_1 - 1$, α_2, α_3 und addiert sie, so ergibt sich die Null. Es verschwindet also die Determinante der Gleichungen (1), folglich bestimmen diese Gleichungen, wenn sie nicht durch das Verschwinden sämtlicher Koeffizienten erfüllt sind, eine Gerade oder eine Ebene. Im letzten Fall müssen alle Unterdeterminanten zweiten Grades der Anordnung:

$$\begin{matrix} \alpha_1 - 1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 - 1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 - 1 \end{matrix}$$

verschwinden. Setzt man hier die zu $\alpha_1 - 1$, $\beta_2 - 1$, $\gamma_3 - 1$ gehörenden Unterdeterminanten gleich Null, so ergibt sich $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$. Jetzt verschwinden die Koeffizienten α_2, α_3, β_1, β_3, γ_1, γ_2 sämtlich; die Gleichungen (1) sind identisch erfüllt, und die Ausgangsgleichungen stellen überhaupt keine Transformation dar.

Um auf einem anderen, für die geometrische Deutung unserer Transformation wichtigeren Wege zu zeigen, daß die Gleichungen (1)

eine Gerade bestimmen, multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach zuerst mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, dann mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, endlich mit $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ und addieren sie jedesmal. So entsteht:

$$(2)\qquad \begin{cases} (1-\alpha_1)\xi - \beta_1\eta - \gamma_1\zeta = 0, \\ -\alpha_2\xi + (1-\beta_2)\eta - \gamma_2\zeta = 0, \\ -\alpha_3\xi - \beta_3\eta + (1-\gamma_3)\zeta = 0. \end{cases}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich:

$$(3)\qquad \begin{cases} (\beta_1-\alpha_2)\eta - (\alpha_3-\gamma_1)\zeta = 0, \\ (\gamma_2-\beta_3)\zeta - (\beta_1-\alpha_2)\xi = 0, \\ (\alpha_3-\gamma_1)\xi - (\gamma_2-\beta_3)\eta = 0. \end{cases}$$

Wenn diese Gleichungen nicht durch das Verschwinden von $\beta_1-\alpha_2$, $\alpha_3-\gamma_1$, $\gamma_2-\beta_3$ von selbst erfüllt sind, geben sie die Lösung der Gleichungen (1) und führen auf eine bestimmte, durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Gerade. Was bedeuten nun die Gleichungen $\beta_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \gamma_1$, $\gamma_2 = \beta_3$?

Man hat:

$$\begin{aligned}(\gamma_2-\beta_3)^2 &= \gamma_2^2+\beta_3^2+2\alpha_1-2\beta_2\gamma_3 = 1-\gamma_1^2-\gamma_3^2+1-\beta_1^2-\beta_2^2+2\alpha_1-2\beta_2\gamma_3 \\ &= 1+\alpha_1^2+2\alpha_1-(\beta_2+\gamma_3)^2 \\ &= (1+\alpha_1+\beta_2+\gamma_3)(1-\alpha_1-\beta_2-\gamma_3+2\alpha_1).\end{aligned}$$

Ebenso:

$$(\alpha_3-\gamma_1)^2 = (1+\alpha_1+\beta_2+\gamma_3)(1-\alpha_1-\beta_2-\gamma_3+2\beta_2),$$
$$(\beta_1-\alpha_2)^2 = (1+\alpha_1+\beta_2+\gamma_3)(1-\alpha_1-\beta_2-\gamma_3+2\gamma_3).$$

Ferner:

$$\begin{aligned}(\gamma_2-\beta_3)(\alpha_3-\gamma_1) &= \gamma_2\alpha_3-\beta_3\alpha_3-\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\beta_3 \\ &= \beta_1+\alpha_2\gamma_3+\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2+\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\alpha_2+\beta_1\gamma_3 \\ &= (1+\alpha_1+\beta_2+\gamma_3)(\alpha_2+\beta_1).\end{aligned}$$

Ebenso:

$$(\alpha_3-\gamma_1)(\beta_1-\alpha_2) = (1+\alpha_1+\beta_2+\gamma_3)(\beta_3+\gamma_2),$$
$$(\beta_1-\alpha_2)(\gamma_2-\beta_3) = (1+\alpha_1+\beta_2+\gamma_3)(\gamma_1+\alpha_3).$$

Die ersten drei dieser Gleichungen zeigen, daß das System (3) nur dann identisch erfüllt ist, wenn $1+\alpha_1+\beta_2+\gamma_3 = 0$, oder wenn $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$. Die zweite dieser Möglichkeiten liefert überhaupt keine Transformation. Um die erste zu untersuchen, lösen wir die Gleichungen (1) direkt auf und erhalten, wenn $\alpha_1+\beta_2+\gamma_3 = m$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}\xi:\eta:\zeta &= 1-m+2\alpha_1 : \alpha_2+\beta_1 : \alpha_3+\gamma_1 \\ &= \beta_1+\alpha_2 : 1-m+2\beta_2 : \beta_3+\gamma_2 \\ &= \gamma_1+\alpha_3 : \gamma_2+\beta_3 : 1-m+2\gamma_3.\end{aligned}$$

Für $m = -1$ und $\beta_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \gamma_1$, $\gamma_2 = \beta_3$ ergibt sich hieraus:

$$(4) \quad \begin{cases} \xi : \eta : \zeta = 1 + \alpha_1 : \quad \beta_1 \quad : \quad \gamma_1 \\ \qquad\quad = \quad \alpha_2 \quad : 1 + \beta_2 : \quad \gamma_2 \\ \qquad\quad = \quad \alpha_3 \quad : \quad \beta_3 \quad : 1 + \gamma_3. \end{cases}$$

Ist α_1 von -1 verschieden, so liefert die erste dieser Beziehungen eine bestimmte Gerade. Ist $\alpha_1 = -1$, so fällt das Bild des positiven Teiles der x-Achse mit dem negativen Teil der x-Achse zusammen. Dann ergibt sich an Stelle von (4):

$$\begin{aligned} \xi : \eta : \zeta &= 0 : 1 + \beta_2 : \quad \gamma_2 \\ &= 0 : \quad \beta_3 \quad : 1 + \gamma_3. \end{aligned}$$

Ist hier β_2 von -1 verschieden, so bestimmt die erste dieser Beziehungen eine zur x-Achse senkrechte Gerade. Wenn aber $\beta_2 = -1$, so fällt das Bild des positiven Teiles der y-Achse mit dem negativen Teil der y-Achse zusammen, und es bleibt:

$$\xi : \eta : \zeta = 0 : 0 : 2.$$

Diese Verhältnisse bestimmen die z-Achse.

Wir sehen, daß die Punkte, welche mit ihren Bildpunkten zusammenfallen, unter allen Umständen auf einer durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Geraden liegen. Es soll nun gezeigt werden, daß die übrigen Punkte durch eine Drehung des Raumes um diese Gerade in die Lagen ihrer Bildpunkte gelangen.

Der Koordinatenanfangspunkt zerlegt die in Rede stehende Gerade in zwei Halbgerade, von denen wir eine auswählen und ihre Richtungskosinus mit r_x, r_y, r_z bezeichnen. Von einem beliebigen, nicht in dieser Geraden liegenden Punkt (ξ, η, ζ) aus fällen wir ein Lot auf die Gerade, das sie im Punkte Q treffen möge. Die Maßzahl der Entfernung des Punktes Q vom Koordinatenanfangspunkt bezeichnen wir mit l und betrachten l als positiv oder als negativ, je nachdem Q in der Halbgeraden (r_x, r_y, r_z) oder in ihrer Verlängerung $(-r_x, -r_y, -r_z)$ liegt. Die von Q aus durch den Punkt (ξ, η, ζ) gezogene Halbgerade besitze die Richtungskosinus p_x, p_y, p_z. Die positive Maßzahl des Lotes sei d. Dann folgt:

$$(5) \qquad \xi = lr_x + dp_x, \quad \eta = lr_y + dp_y, \quad \zeta = lr_z + dp_z.$$

Den Punkt (Q) nehmen wir zum Schnittpunkt dreier neuer rechtwinkliger Koordinatenachsen, nämlich der x'-Achse, deren positiver Teil die Richtungskosinus p_x, p_y, p_z besitze, der z'-Achse, deren positiver Teil die Richtungskosinus r_x, r_y, r_z besitze, und der y'-Achse, deren positiver Teil die Richtungskosinus:

$$q_x = p_z r_y - p_y r_z, \quad q_y = p_x r_z - p_z r_x, \quad q_z = p_y r_x - p_x r_y$$

besitze. Die Gleichungen der auf der x'-, y'-, z'-Achse senkrechten neuen Koordinatenebenen sind:

$$\Sigma x p_x = 0, \quad \Sigma x q_x = 0, \quad \Sigma x r_x - l = 0;$$

somit haben wir für die neuen Koordinaten des Bildpunktes (x, y, z) des Punktes (ξ, η, ζ) die Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} x' = \Sigma x p_x = p_x(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta) + p_y(\beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta) \\ \qquad\qquad + p_z(\gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta), \\ y' = \Sigma x q_x = q_x(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta) + \cdots, \\ z' = \Sigma x r_x - l = r_x(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta) + \cdots - l. \end{cases}$$

Nach (1) ist:

$$\alpha_1 r_x + \alpha_2 r_y + \alpha_3 r_z = r_x,$$
$$\beta_1 r_x + \beta_2 r_y + \beta_3 r_z = r_y,$$
$$\gamma_1 r_x + \gamma_2 r_y + \gamma_3 r_z = r_z,$$

folglich nach (5):

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta = l r_x + d(\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z), \\ \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta = l r_y + d(\beta_1 p_x + \beta_2 p_y + \beta_3 p_z), \\ \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta = l r_z + d(\gamma_1 p_x + \gamma_2 p_y + \gamma_3 p_z). \end{cases}$$

Es kommt jetzt alles auf die Berechnung der hier auftretenden Faktoren von d an. Wir betrachten zuerst den Fall $\gamma_2 = \beta_3$, $\alpha_3 = \gamma_1$, $\beta_1 = \alpha_2$. Die Verhältnisse (4), nämlich:

$$r_x : r_y : r_z = 1 + \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3,$$

liefern entweder $\alpha_1 = -1$ oder:

$$r_x = \frac{1+\alpha_1}{\sqrt{2(1+\alpha_1)}}, \quad r_y = \frac{\alpha_2}{\sqrt{2(1+\alpha_1)}}, \quad r_z = \frac{\alpha_3}{\sqrt{2(1+\alpha_1)}};$$

in beiden Fällen ist daher, weil $r_x p_x + r_y p_y + r_z p_z = 0$, auch:

$$\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z = -p_x.$$

Ebenso folgt:

$$\beta_1 p_x + \beta_2 p_y + \beta_3 p_z = -p_y,$$
$$\gamma_1 p_x + \gamma_2 p_y + \gamma_3 p_z = -p_z,$$

somit:

$$x' = -d, \quad y' = 0, \quad z' = 0.$$

Hier geht also jeder Punkt durch eine Drehung von der Größe π um die z'-Achse in seinen Bildpunkt über.

Wenn die Differenzen $\gamma_2 - \beta_3$, $\alpha_3 - \gamma_1$, $\beta_1 - \alpha_2$ nicht sämtlich verschwinden, entnehmen wir aus den S. 300 für die Quadrate und Produkte dieser Differenzen aufgestellten Gleichungen Ausdrücke für die Richtungskosinus $\alpha_1 \ldots \gamma_3$. Zunächst hat man:

$$(\gamma_2 - \beta_3)^2 + (\alpha_3 - \gamma_1)^2 + (\beta_1 - \alpha_2)^2 = (1 + m)(3 - m).$$

Wenn $\sqrt{(1+m)(3-m)}$ mit W bezeichnet wird, können wir nach (3):

$$(8) \qquad r_x = \frac{\gamma_2 - \beta_3}{W}, \quad r_y = \frac{\alpha_3 - \gamma_1}{W}, \quad r_z = \frac{\beta_1 - \alpha_2}{W}$$

nehmen und erhalten:

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2}\left\{\frac{W^2 r_x^2}{1+m} - 1 + m\right\}, & \alpha_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{W^2 r_x r_y}{1+m} - W r_z\right\}, & \alpha_3 = \frac{1}{2}\left\{\frac{W^2 r_x r_z}{1+m} + W r_y\right\}, \\ \beta_1 = \frac{1}{2}\left\{\frac{W^2 r_x r_y}{1+m} + W r_z\right\}, & \beta_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{W^2 r_y^2}{1+m} - 1 + m\right\}, & \beta_3 = \frac{1}{2}\left\{\frac{W^2 r_y r_z}{1+m} - W r_x\right\}, \\ \gamma_1 = \frac{1}{2}\left\{\frac{W^2 r_x r_z}{1+m} - W r_y\right\}, & \gamma_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{W^2 r_y r_z}{1+m} + W r_x\right\}, & \gamma_3 = \frac{1}{2}\left\{\frac{W^2 r_z^2}{1+m} - 1 + m\right\}. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke findet sich:

$$(10) \qquad \begin{cases} \alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z = \frac{m-1}{2} p_x + \frac{W}{2} q_x, \\ \beta_1 p_x + \beta_2 p_y + \beta_3 p_z = \frac{m-1}{2} p_y + \frac{W}{2} q_y, \\ \gamma_1 p_x + \gamma_2 p_y + \gamma_3 p_z = \frac{m-1}{2} p_z + \frac{W}{2} q_z, \end{cases}$$

und wir erhalten aus (6) und (7):

$$x' = d\,\frac{m-1}{2}, \quad y' = d\,\frac{W}{2}, \quad z' = 0.$$

Da aber:

$$\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{W}{2}\right)^2 = 1,$$

so können wir:

$$\frac{m-1}{2} = \cos\vartheta, \quad \frac{W}{2} = \sin\vartheta$$

setzen. Verstehen wir unter ϑ_0 den kleinsten positiven Winkel, dessen Kosinus gleich $\frac{m-1}{2}$, dessen Sinus gleich $\frac{W}{2}$ ist, so haben wir in dem Ausdruck $\vartheta_0 + 2\nu\pi$ die allgemeinste Bestimmung von ϑ, falls ν eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet. Zur Überführung der Punkte (ξ, η, ζ) in ihre Bildpunkte (x, y, z) stehen uns also unendlich viele Drehungen um die z'-Achse zur Verfügung. Die einfachste derselben, die wir die Hauptdrehung nennen können, besitzt die Größe ϑ_0, und ihre Richtung stimmt mit der Richtung derjenigen Drehung überein, welche die positive x'-Achse auf dem kürzesten Wege in die positive y'-Achse überführt.

Unter Benutzung der gefundenen Bedeutung von m und W nehmen die Gleichungen (9) die Gestalt an:

$$(11)\quad \begin{cases} \alpha_1 = r_x^2(1-\cos\vartheta)+\cos\vartheta, & \alpha_2 = r_x r_y(1-\cos\vartheta) - r_z\sin\vartheta, \\ & \alpha_3 = r_x r_z(1-\cos\vartheta) + r_y\sin\vartheta, \\ \beta_1 = r_x r_y(1-\cos\vartheta)+r_z\sin\vartheta, & \beta_2 = r_y^2(1-\cos\vartheta)+\cos\vartheta, \\ & \beta_3 = r_y r_z(1-\cos\vartheta) - r_x\sin\vartheta, \\ \gamma_1 = r_x r_z(1-\cos\vartheta) - r_y\sin\vartheta, & \gamma_2 = r_z r_y(1-\cos\vartheta)+r_x\sin\vartheta, \\ & \gamma_3 = r_z^2(1-\cos\vartheta)+\cos\vartheta. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gelten auch im Falle $\vartheta_0 = \pi$. Hier wird z. B.:

$$\alpha_1 = 2r_x^2 - 1,\quad \beta_1 = 2r_x r_y,\quad \gamma_1 = 2r_x r_z,$$

d. h. entweder:

$$r_x = 0 \text{ und } \alpha_1 = -1$$

oder:

$$1+\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = r_x : r_y : r_z$$

in Übereinstimmung mit den Gleichungen (4).

Um aus den Gleichungen (11) allgemein gültige Darstellungen von r_x, r_y, r_z zu erhalten, bemerken wir zunächst, daß:

$$r_x^2 = \frac{\alpha_1 - \cos\vartheta}{1-\cos\vartheta},\quad r_y^2 = \frac{\beta_2 - \cos\vartheta}{1-\cos\vartheta},\quad r_z^2 = \frac{\gamma_3-\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta},$$

$$r_x r_y = \frac{\alpha_2+\beta_1}{2(1-\cos\vartheta)},\quad r_y r_z = \frac{\beta_3+\gamma_2}{2(1-\cos\vartheta)},\quad r_z r_x = \frac{\alpha_3+\gamma_1}{2(1-\cos\vartheta)}.$$

Bezeichnen ε_1, ε_2, ε_3 die positive oder negative Einheit, so ergibt sich:

$$(12)\quad r_x = \varepsilon_1\frac{\sqrt{1-m+2\alpha_1}}{\sqrt{3-m}},\quad r_y = \varepsilon_2\frac{\sqrt{1-m+2\beta_2}}{\sqrt{3-m}},\quad r_z = \varepsilon_3\frac{\sqrt{1-m+2\gamma_3}}{\sqrt{3-m}}.$$

Ist $\alpha_2+\beta_1$ von Null verschieden, so ist $\varepsilon_1\varepsilon_2$ mit $\alpha_2+\beta_1$ positiv oder negativ; ist $\beta_3+\gamma_2$ oder $\alpha_3+\gamma_1$ von Null verschieden, so ist $\varepsilon_2\varepsilon_3$ oder $\varepsilon_1\varepsilon_3$ mit $\beta_3+\gamma_2$ oder $\alpha_3+\gamma_1$ positiv oder negativ. Sobald also ein ε, das zu einem nicht verschwindenden Richtungskosinus gehört, gewählt ist, sind die anderen zu nicht verschwindenden Richtungskosinus gehörenden ε bestimmt.

§ 27. Transformation durch Schraubung.

Wenn weder $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$ noch $a = b = c = 0$, so fragen wir, ob es eine Gerade gibt, deren Punkte in ihre Bildpunkte durch ein und dieselbe Verschiebung in der Geraden übergehen. Dem Charakter des analytisch-geometrischen Verfahrens entsprechend setzen wir zunächst die fragliche Gerade als vorhanden voraus und sehen zu, ob die Bestimmung der zur Festlegung der Geraden nötigen geometrischen Größen möglich ist oder nicht. Wir denken uns die Gerade festgelegt 1. durch die Koordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 des Fußpunktes

des Lotes, das vom Koordinatenanfangspunkt auf die Gerade gefällt ist, 2. durch die Richtungskosinus α, β, γ einer der beiden Halbgeraden, in welche die Gerade durch jenen Fußpunkt geteilt wird. Ein beliebiger Punkt der Geraden hat dann die Koordinaten $\xi_1 + t\alpha$, $\eta_1 + t\beta$, $\zeta_1 + t\gamma$; sein Bildpunkt hat die Koordinaten $\xi_1 + (t+\tau)\alpha$, $\eta_1 + (t+\tau)\beta$, $\zeta_1 + (t+\tau)\gamma$, wenn der absolute Wert von τ die Größe der Verschiebung angibt, während τ positiv oder negativ ist, je nachdem die Verschiebungsrichtung die Richtungskosinus α, β, γ oder $-\alpha, -\beta, -\gamma$ besitzt.

Aus den Gleichungen (3) S. 298 folgt dann:

$$\xi_1 + (t+\tau)\alpha = a + \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\eta_1 + \alpha_3\zeta_1 + t(\alpha_1\alpha + \alpha_2\beta + \alpha_3\gamma)$$

nebst den beiden entsprechenden Gleichungen. Dies System soll für jeden Wert von t bestehen. Daher zunächst:

$$\alpha = \alpha_1\alpha + \alpha_2\beta + \alpha_3\gamma, \quad \beta = \beta_1\alpha + \beta_2\beta + \beta_3\gamma, \quad \gamma = \gamma_1\alpha + \gamma_2\beta + \gamma_3\gamma.$$

Die Lösung dieser Gleichungen bezeichnen wir wie im vorigen Paragraphen mit:

$$\alpha = r_x, \quad \beta = r_y, \quad \gamma = r_z.$$

Weiter folgt:

$$(1) \qquad \begin{cases} (\alpha_1 - 1)\xi_1 + \alpha_2\eta_1 + \alpha_3\zeta_1 = \tau r_x - a, \\ \beta_1\xi_1 + (\beta_2 - 1)\eta_1 + \beta_3\zeta_1 = \tau r_y - b, \\ \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\eta_1 + (\gamma_3 - 1)\zeta_1 = \tau r_z - c. \end{cases}$$

Hinzu kommt die Gleichung:

$$(2) \qquad \xi_1 r_x + \eta_1 r_y + \zeta_1 r_z = 0,$$

da entweder der Punkt (ξ_1, η_1, ζ_1) mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt, oder die ihn mit dem Koordinatenanfangspunkt verbindende Strecke senkrecht zu unserer Geraden liegt.

Multiplizieren wir die Gleichungen (1) der Reihe nach mit r_x, r_y, r_z und addieren sie, so folgt nach (11), S. 304:

$$(3) \qquad \tau = ar_x + br_y + cr_z.$$

Multiplizieren wir die Gleichungen (1) und (2) der Reihe nach zuerst mit $\alpha_1 - 1, \beta_1, \gamma_1, (3-m)r_x$, dann mit $\alpha_2, \beta_2 - 1, \gamma_2, (3-m)r_y$, endlich mit $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3 - 1, (3-m)r_z$ und addieren sie jedesmal, so ergibt sich:

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{a(1-\alpha_1) - b\beta_1 - c\gamma_1}{3-m}, \quad \eta_1 = \dfrac{-a\alpha_2 + b(1-\beta_2) - c\gamma_2}{3-m}, \\ \zeta_1 = \dfrac{-a\alpha_3 - b\beta_3 + c(1-\gamma_3)}{3-m}. \end{cases}$$

Die Gerade, um die es sich handelt, ist jetzt eindeutig bestimmt. Wir nennen sie die **Schraubungsachse**.

Wenn wir nun, wie im vorigen Paragraphen, von einem Punkt (ξ, η, ζ) aus ein Lot auf die Schraubungsachse fällen, so haben wir unter Benutzung der dort angewandten Bezeichnungen:

$$\xi = \xi_1 + tr_x + dp_x, \quad \eta = \eta_1 + tr_y + dp_y, \quad \zeta = \zeta_1 + tr_z + dp_z.$$

Dann folgt aus den Gleichungen (3), S. 298 und (10) des vorigen Paragraphen:

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 + (t+\tau)r_x + d(p_x \cos\vartheta + q_x \sin\vartheta), \\ y &= \eta_1 + (t+\tau)r_y + d(p_y \cos\vartheta + q_y \sin\vartheta), \\ z &= \zeta_1 + (t+\tau)r_z + d(p_z \cos\vartheta + q_z \sin\vartheta). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lehren, daß man die Überführung aller Punkte in ihre Bildpunkte, wenn $\tau = 0$ ist, durch eine Drehung um die Schraubungsachse bewirken kann.

Ist τ nicht gleich Null, so lassen sich diese Gleichungen von verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachten. Zunächst zeigen sie, daß man die Überführung des Punktes (ξ, η, ζ) in die Lage (x, y, z) durch eine Verschiebung von der Größe τ längs der Schraubungsachse und eine nachherige Drehung von der Größe ϑ um dieselbe bewirken kann, sowie auch umgekehrt durch eine solche Drehung und nachherige Verschiebung. Dabei beschreibt der Punkt (ξ, η, ζ) jedesmal ein geradliniges Stück und ein Kreisbogenstück, wozu noch beliebig viele ganze Umläufe um den Kreis hinzukommen können. Sodann zeigen sie, daß man die Überführung auch durch Schraubung bewerkstelligen kann. Eine solche besteht in einer Drehung um eine Achse und einer gleichzeitigen Verschiebung längs der Achse, wobei aber die Größe der Verschiebung zu der der Drehung in unveränderlichem Verhältnis stehen muß, welch letzteres man den Parameter der Schraubung nennt. Bedeutet ϑ_0 den kleinsten positiven Wert von ϑ, so stehen uns die unbegrenzt vielen Drehungswinkel $\vartheta_0 + 2\nu\pi$, wo ν eine beliebige ganze, positive oder negative, Zahl bedeutet, zur Verfügung. Infolgedessen können wir die in Rede stehende Überführung vermittelst unbegrenzt vieler Schraubungen vornehmen, deren Parameter durch die Gleichung:

$$k_\nu = \frac{\tau}{\vartheta_0 + 2\nu\pi}$$

bestimmt werden. Schließen wir den Fall $\alpha_2 = \beta_1$, $\beta_3 = \gamma_2$, $\gamma_1 = \alpha_3$ aus und nehmen, wie im vorigen Paragraphen:

$$r_x = \frac{\gamma_2 - \beta_3}{W}, \quad r_y = \frac{\alpha_3 - \gamma_1}{W}, \quad r_z = \frac{\beta_1 - \alpha_2}{W},$$

wo W die positive Quadratwurzel aus $(1 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)(3 - \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3)$ bezeichnet, so wird:

$$k_\nu = \frac{a(\gamma_2 - \beta_3) + b(\alpha_3 - \gamma_1) + c(\beta_1 - \alpha_2)}{W \cdot (\vartheta_0 + 2\nu\pi)},$$

und ϑ_0 bedeutet denjenigen positiven Winkel, der kleiner wie π ist und durch die Gleichungen:

$$\cos\vartheta_0 = \frac{\alpha_1+\beta_2+\gamma_3-1}{2}, \quad \sin\vartheta_0 = \frac{W}{2}$$

bestimmt wird.

Fassen wir, ähnlich wie im vorigen Paragraphen, den Punkt $(\xi_1+tr_x, \eta_1+tr_y, \zeta_1+tr_z)$ als den Anfangspunkt eines x', y', z'-Systems auf, bei dem die positive x'-Achse die Richtungskosinus p_x, p_y, p_z, die positive y'-Achse die Richtungskosinus q_x, q_y, q_z, die positive z'-Achse die Richtungskosinus r_x, r_y, r_z besitzt, so beschreibt der Punkt (ξ, η, ζ) nach der Wahl von ν ein Stück einer Schraubenlinie, die im x', y', z'-System die Gleichungen:

$$x' = d\cos u, \quad y' = d\sin u, \quad z' = k_\nu u$$

besitzt, und das Stück wird erhalten, wenn u von Null bis zu dem Werte $\vartheta_0 + 2\nu\pi$ läuft. Dabei nimmt u zu, wenn ν gleich Null oder gleich einer positiven ganzen Zahl ist, es nimmt ab, wenn ν gleich einer negativen ganzen Zahl ist. Man kann sich die Art, wie die verschiedenen Schraubenlinien liegen, leicht klarmachen, wenn man ihre einem wachsenden u entsprechenden Halbtangenten für $u=\vartheta_0+2\nu\pi$ betrachtet. Die zu ν gehörende Halbtangente bilde mit der positiven x'-Achse den Winkel α_ν, mit der positiven y'-Achse den Winkel β_ν, mit der positiven z'-Achse den Winkel γ_ν. Dann hat man:

$$\cos\alpha_\nu = \frac{-d\sin\vartheta_0}{\sqrt{d^2+\left(\frac{\tau}{\vartheta_0+2\nu\pi}\right)^2}}, \quad \cos\beta_\nu = \frac{d\cos\vartheta_0}{\sqrt{d^2+\left(\frac{\tau}{\vartheta_0+2\nu\pi}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma_\nu = \frac{\tau}{(\vartheta_0+2\nu\pi)\sqrt{d^2+\left(\frac{\tau}{\vartheta_0+2\nu\pi}\right)^2}}.$$

Um die Lage der den verschiedenen Werten von ν entsprechenden Halbtangenten zu erkennen, sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. $\tau > 0$. Ist hier $\vartheta_0 + 2\nu\pi > 0$, so ist $k_\nu > 0$; die Schraubenlinie ist rechts gewunden, und man hat:

$$\cos\gamma_\nu = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(\vartheta_0+2\nu\pi)^2}{\tau^2}d^2}}.$$

Die Halbtangenten gehen durch einen Kreissektor, der durch die für $\nu = 0$ vorhandene Halbtangente und durch die zur z'-Achse senkrechte Halbgerade mit den Richtungskosinus:

$$\cos\alpha = -\sin\vartheta_0, \quad \cos\beta = \cos\vartheta_0, \quad \cos\gamma = 0$$

begrenzt wird. — Ist $\vartheta_0 + 2\nu\pi < 0$, so ist $k_\nu < 0$; die Schraubenlinie ist links gewunden, und man hat:

$$\cos\gamma_\nu = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(\vartheta_0+2\nu\pi)^2}{\tau^2}d^2}}.$$

Hier gehen die Halbtangenten durch einen Kreissektor, der durch die für $\nu = -1$ vorhandene Halbtangente und die eben genannte Halbgerade begrenzt wird.

2. $\tau < 0$. Ist $\vartheta_0 + 2\nu\pi > 0$, so wird $k_\nu < 0$; die Schraubenlinie ist links gewunden, und man hat:

$$\cos\gamma_\nu = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(\vartheta_0+2\nu\pi)^2}{\tau^2}d^2}}.$$

Die Begrenzung des Kreissektors, in dem die Halbtangenten der Schraubenlinien liegen, ist dieselbe wie im vorigen Fall.

Ist $\vartheta_0 + 2\nu\pi < 0$, so liegen dieselben Verhältnisse wie im ersten Fall 1) vor. Die Halbgerade bildet stets eine Häufungsstelle unserer Halbtangenten, sie darf aber nicht als zu ihnen gehörig betrachtet werden, da unendlich viele Umläufe nicht vorkommen können.

Es wird nicht überflüssig sein, auch umgekehrt zu zeigen, daß eine Schraubung des Raumes zu den Formeln (3) S. 298 führt.

Die Schraubungsachse sei durch den Punkt (ξ_0, η_0, ζ_0) und die Richtungskosinus r_x, r_y, r_z bestimmt, so daß ihre Gleichungen:

$$x = \xi_0 + hr_x, \quad y = \eta_0 + hr_y, \quad z = \zeta_0 + hr_z$$

sind. Wir fällen von dem Punkt (ξ, η, ζ) aus ein Lot auf die Schraubungsachse. Der Fußpunkt desselben werde mit Q bezeichnet, seine Koordinaten seien $\xi_0 + lr_x$, $\eta_0 + lr_y$, $\zeta_0 + lr_z$. Da

$$\Sigma(\xi - \xi_0 - lr_x)r_x = 0,$$

so folgt:

$$l = \Sigma(\xi - \xi_0)r_x,$$

und die Größe d des Lotes ergibt sich gleich:

$$\sqrt{\Sigma(\xi-\xi_0)^2 - \left(\Sigma(\xi-\xi_0)r_x\right)^2}.$$

Die Halbgerade, welche von dem Fußpunkt des Lotes aus durch den Punkt (ξ, η, ζ) gelegt ist, besitzt die Richtungskosinus:

$$p_x = \frac{\xi-\xi_0-r_x\Sigma(\xi-\xi_0)r_x}{d}, \quad p_y = \frac{\eta-\eta_0-r_y\Sigma(\xi-\xi_0)r_x}{d}, \quad p_z = \frac{\zeta-\zeta_0-r_z\Sigma(\xi-\xi_0)r_x}{d}.$$

Eine zu dieser Halbgeraden und zur Schraubungsachse senkrechte Halbgerade besitzt die Richtungskosinus:

$$q_x = r_y p_z - p_y r_z = \frac{r_y(\zeta - \zeta_0) - r_z(\eta - \eta_0)}{d},$$

$$q_y = r_z p_x - p_z r_x = \frac{r_z(\xi - \xi_0) - r_x(\zeta - \zeta_0)}{d},$$

$$q_z = r_x p_y - p_x r_y = \frac{r_x(\eta - \eta_0) - r_y(\xi - \xi_0)}{d}.$$

Die Größe der durch die Schraubung hervorgebrachten Verschiebung sei τ, die Größe der Drehung ϑ. Wir haben dann für die Koordinaten der Lage des Punktes (ξ, η, ζ) nach der Schraubung die Gleichungen:

$$x = \xi_0 + (l + \tau) r_x + d\,(p_x \cos\vartheta + q_x \sin\vartheta), \quad \text{usw.}$$

oder:

$$x = \xi_0 + \big(\tau + \Sigma(\xi - \xi_0) r_x\big) r_x + \cos\vartheta \big(\xi - \xi_0 - r_x \Sigma(\xi - \xi_0) r_x\big)$$
$$+ \sin\vartheta \big(r_y(\zeta - \zeta_0) - r_z(\eta - \eta_0)\big), \quad \text{usw.}$$

Unter Benutzung der Gleichungen (11) des vorigen Paragraphen erhalten wir:

$$x = \xi_0 + \tau r_x + \alpha_1(\xi - \xi_0) + \alpha_2(\eta - \eta_0) + \alpha_3(\zeta - \zeta_0),$$
$$y = \eta_0 + \tau r_y + \beta_1(\xi - \xi_0) + \beta_2(\eta - \eta_0) + \beta_3(\zeta - \zeta_0),$$
$$z = \zeta_0 + \tau r_z + \gamma_1(\xi - \xi_0) + \gamma_2(\eta - \eta_0) + \gamma_3(\zeta - \zeta_0).$$

Setzen wir daher:

$$\xi_0(1 - \alpha_1) - \alpha_2 \eta_0 - \alpha_3 \zeta_0 + \tau r_x = a,$$
$$-\xi_0 \beta_1 + \eta_0(1 - \beta_2) - \beta_3 \zeta_0 + \tau r_y = b,$$
$$-\xi_0 \gamma_1 - \eta_0 \gamma_2 - \zeta_0(1 - \gamma_3) + \tau r_z = c,$$

so sind Gleichungen von der Form (3) § 25 S. 298 aus der gegebenen Schraubung hergeleitet.

§ 28. Schraubenbewegungen, die sich einem beweglichen Dreikant zuordnen lassen.

Wir haben im vorigen Paragraphen unter x, y, z sowohl wie unter ξ, η, ζ die Koordinaten von Punkten hinsichtlich der x, y, z-Achsen verstanden. Es ist jetzt nötig, in den Bezeichnungen eine Änderung eintreten zu lassen. Unter x, y, z wollen wir die Koordinaten des Schnittpunktes dreier zueinander senkrechter Geraden verstehen, welch letztere als die ξ, η, ζ-Achsen bezeichnet werden sollen. Die positiven Teile dieser Achsen sollen mit den positiven Teilen der x, y, z-Achse Winkel bilden, deren Kosinus der Reihe nach $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$; l_x, l_y, l_z; $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ seien, jedoch so, daß die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ l_x & l_y & l_z \\ \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \end{vmatrix}$$

den Wert 1 besitzt. Wenn sich das System der drei Geraden im Raume bei stetiger Änderung seiner Lage fortbewegt, wird der Schnittpunkt der Geraden eine Kurve beschreiben, deren Bogenlänge mit s bezeichnet werden soll. Wir können dann die Größen x, y, z, sowie die neun Richtungskosinus $\alpha_x \dots \lambda_z$ als Funktionen von s betrachten. Die Zuwüchse dieser zwölf Größen beim Übergang von s zu $s + \Delta s$ sollen durch ein vorgesetztes Δ gekennzeichnet werden.

Es ist unsere Aufgabe, die Schraubenbewegungen zu bestimmen, durch die das ξ, η, ζ-System aus der zu dem Wert s gehörenden Lage in die zu dem Wert $s + \Delta s$ gehörende überführt werden kann.

Dieser Übergang führe die ξ, η, ζ-Achse bezüglich in die ξ', η', ζ'-Achse über. Der Schnittpunkt der letzteren Achsen besitzt im x, y, z-System die Koordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$; im ξ, η, ζ-System besitze er die Koordinaten a, b, c. Aus den Gleichungen:

$$x + \Delta x = x + \alpha_x a + l_x b + \lambda_x c,$$
$$y + \Delta y = y + \alpha_y a + l_y b + \lambda_y c,$$
$$z + \Delta z = z + \alpha_z a + l_z b + \lambda_z c$$

folgt dann:

$$(1) \qquad a = \Sigma \alpha_x \Delta x, \quad b = \Sigma l_x \Delta x, \quad c = \Sigma \lambda_x \Delta x.$$

Die positive ξ'-Achse besitzt im x, y, z-System die Richtungskosinus $\alpha_x + \Delta \alpha_x$, $\alpha_y + \Delta \alpha_y$, $\alpha_z + \Delta \alpha_z$; im ξ, η, ζ-System besitze sie die Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Dann besitzt der Punkt, welcher im Abstande Eins vom Anfangspunkt auf der positiven ξ'-Achse liegt, im x, y, z-System die Koordinaten $x + \Delta x + \alpha_x + \Delta \alpha_x$, $y + \Delta y + \alpha_y + \Delta \alpha_y$, $z + \Delta z + \alpha_z + \Delta \alpha_z$, im ξ, η, ζ-System die Koordinaten $a + \alpha_1$, $b + \beta_1$, $c + \gamma_1$, folglich hat man:

$$\Delta x + \alpha_x + \Delta \alpha_x = \alpha_x(a + \alpha_1) + l_x(b + \beta_1) + \lambda_x(c + \gamma_1),$$
$$\Delta y + \alpha_y + \Delta \alpha_y = \alpha_y(a + \alpha_1) + l_y(b + \beta_1) + \lambda_y(c + \gamma_1),$$
$$\Delta z + \alpha_z + \Delta \alpha_z = \alpha_z(a + \alpha_1) + l_z(b + \beta_1) + \lambda_z(c + \gamma_1).$$

Wir erhalten somit:

$$(2) \qquad \alpha_1 = 1 + \Sigma \alpha_x \Delta \alpha_x, \quad \beta_1 = \Sigma l_x \Delta \alpha_x, \quad \gamma_1 = \Sigma \lambda_x \Delta \alpha_x.$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich, wenn im ξ, η, ζ-System die Richtungskosinus der positiven η'-Achse mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, die der positiven ζ'-Achse mit $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ bezeichnet werden:

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha_2 = \Sigma \alpha_x \Delta l_x, & \beta_2 = 1 + \Sigma l_x \Delta l_x, & \gamma_2 = \Sigma \lambda_x \Delta l_x, \\ \alpha_3 = \Sigma \alpha_x \Delta \lambda_x, & \beta_3 = \Sigma l_x \Delta \lambda_x, & \gamma_3 = 1 + \Sigma \lambda_x \Delta \lambda_x. \end{cases}$$

Betrachten wir nun die Differenzen $\gamma_2 - \beta_3$, $\alpha_3 - \gamma_1$, $\beta_1 - \alpha_2$. Man hat:

$$\gamma_2 - \beta_3 = \left(\Sigma\lambda_x \frac{d l_x}{ds} - \Sigma l_x \frac{d\lambda_x}{ds}\right)\Delta s + \cdots = 2\Sigma\lambda_x \frac{d l_x}{ds}\Delta s + \cdots,$$

$$\alpha_3 - \gamma_1 = \left(\Sigma\alpha_x \frac{d\lambda_x}{ds} - \Sigma\lambda_x \frac{d\alpha_x}{ds}\right)\Delta s + \cdots = 2\Sigma\alpha_x \frac{d\lambda_x}{ds}\Delta s + \cdots,$$

$$\beta_1 - \alpha_2 = \left(\Sigma l_x \frac{d\alpha_x}{ds} - \Sigma\alpha_x \frac{d l_x}{ds}\right)\Delta s + \cdots = 2\Sigma l_x \frac{d\alpha_x}{ds}\Delta s + \cdots$$

Da die Differenzen $\gamma_2 - \beta_3$, $\alpha_3 - \gamma_1$, $\beta_1 - \alpha_2$ als Potenzreihen von Δs auftreten, können wir die Werte von Δs auf ein so kleines Intervall beschränken, daß jene Differenzen außer für $\Delta s = 0$ an keiner Stelle des Intervalls gleichzeitig verschwinden. Wir setzen:

$$(4) \qquad p_1 = \Sigma\lambda_x \frac{d l_x}{ds}, \quad p_2 = \Sigma\alpha_x \frac{d\lambda_x}{ds}, \quad p_3 = \Sigma l_x \frac{d\alpha_x}{ds}.$$

Aus den Gleichungen:

$$\Sigma\alpha_x \frac{d\alpha_x}{ds} = 0, \qquad \Sigma l_x \frac{d\alpha_x}{ds} = p_3, \qquad \Sigma\lambda_x \frac{d\alpha_x}{ds} = -p_2,$$

$$\Sigma\alpha_x \frac{d l_x}{ds} = -p_3, \quad \Sigma l_x \frac{d l_x}{ds} = 0, \qquad \Sigma\lambda_x \frac{d l_x}{ds} = p_1,$$

$$\Sigma\alpha_x \frac{d\lambda_x}{ds} = p_2, \qquad \Sigma l_x \frac{d\lambda_x}{ds} = -p_1, \quad \Sigma\lambda_x \frac{d\lambda_x}{ds} = 0$$

folgt:

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_x}{ds} = l_x p_3 - \lambda_x p_2, & \dfrac{d\alpha_y}{ds} = l_y p_3 - \lambda_y p_2, & \dfrac{d\alpha_z}{ds} = l_z p_3 - \lambda_z p_2, \\ \dfrac{d l_x}{ds} = \lambda_x p_1 - \alpha_x p_3, & \dfrac{d l_y}{ds} = \lambda_y p_1 - \alpha_y p_3, & \dfrac{d l_z}{ds} = \lambda_z p_1 - \alpha_z p_3, \\ \dfrac{d\lambda_x}{ds} = \alpha_x p_2 - l_x p_1, & \dfrac{d\lambda_y}{ds} = \alpha_y p_2 - l_y p_1, & \dfrac{d\lambda_z}{ds} = \alpha_z p_2 - l_z p_1. \end{cases}$$

Dies zeigt, daß die Zahlen p_1, p_2, p_3 nur dann beständig verschwinden können, wenn die ξ, η, ζ-Achsen ihre Richtungen beständig beibehalten. Schließen wir diesen Fall aus, so können p_1, p_2, p_3 nur für getrennt liegende Werte von s zugleich verschwinden. Wir nehmen im folgenden an, daß der Veränderlichen s kein derartiger Wert beigelegt sei, daß also mindestens eine der Zahlen p_1, p_2, p_3 von Null verschieden ist.

Unter ε verstehen wir die positive oder negative Einheit, je nachdem Δs positiv oder negativ ist. Wir erhalten dann:

$$W = \sqrt{(\gamma_2 - \beta_3)^2 + (\alpha_3 - \gamma_1)^2 + (\beta_1 - \alpha_2)^2} = 2\varepsilon\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\,\Delta s + \cdots,$$

wo die rechts stehende Potenzreihe für einen hinreichend kleinen absoluten Wert von Δs eine positive Zahl darstellt.

Für den kleinsten positiven, der Gleichung:

$$\sin\vartheta = \frac{W}{2}$$

genügenden Wert ϑ_0 von ϑ ergibt sich eine Entwicklung von der Form:

$$\vartheta_0 = \varepsilon\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\,\Delta s + \cdots$$

Für die Richtungskosinus der Schraubungsachse im ξ, η, ζ-System ergibt sich:

$$r_\xi = \frac{2p_1\Delta s + \cdots}{2\varepsilon\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\,\Delta s + \cdots}, \quad r_\eta = \frac{2p_2\Delta s + \cdots}{2\varepsilon\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\,\Delta s + \cdots},$$

$$r_\zeta = \frac{2p_3\Delta s + \cdots}{2\varepsilon\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\,\Delta s + \cdots}.$$

Setzen wir noch:

$$\Sigma\alpha_x\frac{dx}{ds} = q_1, \quad \Sigma l_x\frac{dx}{ds} = q_2, \quad \Sigma\lambda_x\frac{dx}{ds} = q_3, \tag{6}$$

so entsteht für die Schraubungsparameter die Gleichung:

$$k_\nu = \frac{2(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)\Delta s^2 + \cdots}{(2\varepsilon\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\,\Delta s + \cdots)(2\nu\pi + \varepsilon\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\,\Delta s + \cdots)}.$$

Gehen wir mit Δs zur Grenze Null über, so erhalten wir für die Richtungskosinus der Schraubungsachse die Werte:

$$r_\xi = \frac{\varepsilon p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}, \quad r_\eta = \frac{\varepsilon p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}, \quad r_\zeta = \frac{\varepsilon p_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}. \tag{7}$$

Solange ν von Null verschieden ist, geht k_ν für $\Delta s = 0$ in die Null über, aber bei $\nu = 0$ erhalten wir im Grenzfall:

$$k_0 = k = \frac{p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}. \tag{8}$$

Der Grenzübergang führt also bei $\nu = 0$ nur dann auf eine Drehungsbewegung, wenn $p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$ verschwindet. Ist dies nicht der Fall, so erhalten wir ein und dasselbe System von Schraubenlinien, sei es, daß ε gleich 1 oder gleich -1 genommen wird. Man ersieht dies am einfachsten aus der ersten Darstellung der Koordinaten einer Schraubenlinie auf S. 187. Wird die positive Richtung der Schraubungsachse als entgegengesetzt der dort benutzten angenommen, so sind die Richtungskosinus $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ durch $-\alpha_3, -\beta_3, -\gamma_3$ zu ersetzen. Damit die zweite Schraubenlinie mit der ersten den Punkt $(x_0 + \alpha_1 p, y_0 + \beta_1 p, z_0 + \gamma_1 p)$ gemein habe, dürfen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ nicht geändert werden, aber $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ sind durch $-\alpha_2, -\beta_2, -\gamma_2$ zu ersetzen, weil die Determinante der neuen Richtungskosinus den Wert Eins besitzen muß. An Stelle von q tritt das von ε unabhängige k

auf. Die zweite Schraubenlinie fällt geometrisch mit der ersten zusammen, sie wird aber bei wachsendem t in der entgegengesetzten Richtung wie die erste durchlaufen. Wir können uns daher auf den Fall $\varepsilon = 1$ beschränken und:

$$(9) \qquad r_\xi = \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}, \quad r_\eta = \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}, \quad r_\zeta = \frac{p_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_2^2}}$$

nehmen. Im x, y, z-System besitzt die fragliche Schraubenachse die Richtungskosinus:

$$(10) \qquad \begin{cases} r_x = \alpha_x r_\xi + l_x r_\eta + \lambda_x r_\zeta, \quad r_y = \alpha_y r_\xi + l_y r_\eta + \lambda_y r_\zeta, \\ r_z = \alpha_z r_\xi + l_z r_\eta + \lambda_z r_\zeta. \end{cases}$$

Es erübrigt noch, auch die Grenzlage des Punktes festzustellen, in dem das vom Anfangspunkt des ξ, η, ζ-Systems auf die zu Δs gehörende Schraubungsachse gefällte Lot die letztere trifft. Um die Formeln (4) § 27 S. 305 anzuwenden, sind zunächst $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ nach Potenzen von Δs zu entwickeln. Wir hatten:

$$\alpha_1 = 1 + \Sigma \alpha_x \Delta \alpha_x.$$

Daher ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 + \frac{1}{2} \Sigma \alpha_x \frac{d^2 \alpha_x}{ds^2} \Delta s^2 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2} \Sigma \left(\frac{d\alpha_x}{ds} \right)^2 \Delta s^2 + \cdots \\ &= 1 - \frac{p_2^2 + p_3^2}{2} \Delta s^2 + \cdots, \end{aligned}$$

und auf demselben Wege folgt:

$$\beta_2 = 1 - \frac{p_1^2 + p_3^2}{2} \Delta s^2 + \cdots,$$

$$\gamma_3 = 1 - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} \Delta s^2 + \cdots$$

Für die Koordinaten des Fußpunktes des in Rede stehenden Lotes erhalten wir:

$$\xi_1 = \frac{(q_1 \Delta s \ldots)\left(\frac{1}{2}(p_2^2 + p_3^2)\Delta s^2 \ldots\right) - (q_2 \Delta s \ldots)(p_3 \Delta s \ldots) + (q_3 \Delta s \ldots)(p_2 \Delta s \ldots)}{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\Delta s^2 + \cdots},$$

somit wird beim Übergang zu $\Delta s = 0$:

$$(11) \qquad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{p_2 q_3 - q_2 p_3}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}, \\[2ex] \eta_1 = \dfrac{p_3 q_1 - q_3 p_1}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}, \\[2ex] \zeta_1 = \dfrac{p_1 q_2 - q_1 p_2}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}. \end{cases}$$

Im x, y, z-System möge der Punkt (ξ_1, η_1, ζ_1) die Koordinaten x', y', z' besitzen, so daß:

$$(12)\qquad \begin{cases} x' = x + \alpha_x\xi_1 + l_x\eta_1 + \lambda_x\zeta_1, \\ y' = y + \alpha_y\xi_1 + l_y\eta_1 + \lambda_y\zeta_1, \\ z' = z + \alpha_z\xi_1 + l_z\eta_1 + \lambda_z\zeta_1. \end{cases}$$

Wir können die durch den Übergang zu $\Delta s = 0$ erhaltene Schraubenbewegung als die zu dem Werte s gehörende Schraubenbewegung des ξ, η, ζ-Dreikants bezeichnen.

§ 29. Ausgezeichnete Dreikante bei einer Raumkurve nebst den ihnen zugehörigen Schraubenbewegungen.

Unter einem ausgezeichneten Dreikant bei einer Raumkurve wollen wir ein solches verstehen, in dem eine Kante mit der Tangente, oder der Hauptnormale oder der Binormale der Raumkurve zusammenfällt. Wir haben deshalb drei Fälle zu betrachten.

I. Fällt die ξ-Achse des Dreikants mit der Tangente zusammen, so sind die η-Achse und die ζ-Achse Normalen der Kurve. Wir können hier:

$$\alpha_x = \alpha, \quad \alpha_y = \beta, \quad \alpha_z = \gamma,$$
$$l_x = l\cos\varphi + \lambda\sin\varphi, \quad l_y = m\cos\varphi + \mu\sin\varphi, \quad l_z = n\cos\varphi + \nu\sin\varphi,$$
$$\lambda_x = \lambda\cos\varphi - l\sin\varphi, \quad \lambda_y = \mu\cos\varphi - m\sin\varphi, \quad \lambda_z = \nu\cos\varphi - n\sin\varphi$$

setzen, wo φ eine gegebene Funktion der Bogenlänge s der Kurve bedeutet. Man erhält:

$$\frac{d\alpha_x}{ds} = \frac{l}{\varrho}, \quad \frac{dl_x}{ds} = -\frac{\alpha\cos\varphi}{\varrho} + \lambda_x\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{d\lambda_x}{ds} = \frac{\alpha\sin\varphi}{\varrho} - l_x\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\right),$$

$$p_1 = \frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}, \quad p_2 = \frac{\sin\varphi}{\varrho}, \quad p_3 = \frac{\cos\varphi}{\varrho},$$

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0,$$

daher:

$$k = \frac{\dfrac{d\varphi}{ds} - \dfrac{1}{r}}{\left(\dfrac{d\varphi}{ds} - \dfrac{1}{r}\right)^2 + \dfrac{1}{\varrho^2}},$$

$$r_x = \frac{\alpha\left(\dfrac{d\varphi}{ds} - \dfrac{1}{r}\right) + \dfrac{\lambda}{\varrho}}{\sqrt{\left(\dfrac{d\varphi}{ds} - \dfrac{1}{r}\right)^2 + \dfrac{1}{\varrho^2}}},$$

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \frac{\frac{\cos\varphi}{\varrho}}{\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}}, \quad \zeta_1 = \frac{-\frac{\sin\varphi}{\varrho}}{\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}},$$

$$x' = x + \frac{l}{\varrho\left\{\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\right\}}.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß die sämtlichen Bestimmungsmöglichkeiten der Funktion φ nur eine einfach unendliche Schar von Schraubenbewegungen liefern, da es bei den letzteren nur auf den Wert von $\frac{d\varphi}{ds}$ an der betrachteten Stelle ankommt. Unter diesen Schraubenbewegungen befindet sich eine Drehungsbewegung, und sie entspricht dem Werte $\frac{1}{r}$ von $\frac{d\varphi}{ds}$. In diesem Falle beschreibt, wie wir § 10 S. 228 sahen, sowohl die η- wie die ζ-Achse eine abwickelbare Fläche. Die hier auftretende Drehungsachse ist die Krümmungsachse der Kurve.

Ist φ konstant, so ist die Schraubungsachse parallel der rektifizierenden Kante, und sie schneidet die Hauptnormale in dem Punkt kürzesten Abstands von der benachbarten Hauptnormale.

Fragen wir jetzt, welche Fläche von den Schraubungsachsen gebildet wird.

Zu diesem Zweck betrachten wir den Punkt mit den Koordinaten:

$$x_0 = x + \frac{\varrho}{2} l, \quad y_0 = y + \frac{\varrho}{2} m, \quad z_0 = z + \frac{\varrho}{2} n$$

als den Anfangspunkt eines u, v, w-Systems, in dem die u-Achse parallel der Binormale, die v-Achse parallel der Tangente ist, und die w-Achse mit der Hauptnormale zusammenfällt. Die Gleichungen einer Schraubungsachse sind dann, wenn unter h eine beliebige Zahl verstanden wird:

$$u = h \frac{\frac{1}{\varrho}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}}}, \quad v = h \frac{\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}}},$$

$$w = \frac{1}{\varrho\left\{\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\right\}} - \frac{\varrho}{2} = \frac{\varrho}{2} \frac{\frac{1}{\varrho^2} - \left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2}{\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}},$$

somit:

$$w(u^2 + v^2) = \frac{\varrho}{2}(u^2 - v^2).$$

Die durch diese Gleichung dritter Ordnung dargestellte Fläche gehört zu den **Konoidflächen**, d. h. den geradlinigen Flächen, deren Erzeugende eine Gerade (die **Achse der Fläche**) senkrecht schneiden, und heißt ein **Zylindroid**.

Die Schnittpunkte der Erzeugenden des Zylindroids mit der Hauptnormale füllen in letzterer die Strecke von Null bis ϱ, d. h. bis zum Mittelpunkt der ersten Krümmung aus. Dabei fällt die durch den Kurvenpunkt (x, y, z) gehende Erzeugende mit der Tangente der Kurve zusammen. Sie ist die einzige Erzeugende des Zylindroids, welche nicht die Eigenschaft besitzt, auch eine Schraubungsachse zu sein, da sie dem Fall $\frac{d\varphi}{ds} = \infty$ entspricht. Die durch den Mittelpunkt der ersten Krümmung gehende Erzeugende entspricht dem Werte $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r}$ und liefert eine Drehungsbewegung. Durch jeden Punkt zwischen den Endpunkten der Strecke von Null bis ϱ gehen zwei Erzeugende, die jedesmal entgegengesetzt gleichen Werten von $\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}$ entsprechen. Die durch den Mittelpunkt der Strecke gehenden, zu $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}$ und $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}$ gehörenden Erzeugenden stehen aufeinander senkrecht.

II. Bei einem Dreikant, das aus der Hauptnormale und zwei in der rektifizierenden Ebene liegenden Kanten gebildet ist, setzen wir:

$$\alpha_x = \alpha \cos\varphi + \lambda \sin\varphi,$$
$$l_x = l,$$
$$\lambda_x = \lambda \cos\varphi - \alpha \sin\varphi$$

und erhalten:

$$\frac{d\alpha_x}{ds} = l\left(\frac{\cos\varphi}{\varrho} + \frac{\sin\varphi}{r}\right) + \lambda_x \frac{d\varphi}{ds},$$
$$\frac{dl_x}{ds} = -\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\lambda}{r},$$
$$\frac{d\lambda_x}{ds} = l\left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{\sin\varphi}{\varrho}\right) - \alpha_x \frac{d\varphi}{ds};$$

$$p_1 = \frac{\sin\varphi}{\varrho} - \frac{\cos\varphi}{r}, \quad p_2 = -\frac{d\varphi}{ds}, \quad p_3 = \frac{\cos\varphi}{\varrho} + \frac{\sin\varphi}{r},$$

$$q_1 = \cos\varphi, \qquad q_2 = 0, \qquad q_3 = -\sin\varphi,$$

$$r_x = \frac{-\frac{1}{r}\alpha + \frac{1}{\varrho}\lambda - \frac{d\varphi}{ds} l}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}, \quad k = \frac{-\frac{1}{r}}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2},$$

$$\xi_1 = \frac{\frac{d\varphi}{ds}\sin\varphi}{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\varrho^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}, \quad \eta_1 = \frac{\frac{1}{\varrho}}{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\varrho^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}, \quad \zeta_1 = \frac{\frac{d\varphi}{ds}\cos\varphi}{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\varrho^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2},$$

$$x' = x + \frac{\frac{1}{\varrho}l + \frac{d\varphi}{ds}\lambda}{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}.$$

Die hier auftretenden Schraubungsachsen schneiden die Gerade, welche im Punkt des kürzesten Abstandes der Hauptnormale von der benachbarten Hauptnormale auf der Hauptnormale und einer Parallelen zur rektifizierenden Kante senkrecht steht, senkrecht.

Irgendein Punkt dieser Geraden hat nämlich die Koordinaten:

$$x + l\,\frac{\frac{1}{\varrho}}{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}} + h\,\frac{\frac{1}{\varrho}\alpha + \frac{1}{r}\lambda}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}},$$

$$y + m\,\frac{\frac{1}{\varrho}}{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}} + h\,\frac{\frac{1}{\varrho}\beta + \frac{1}{r}\mu}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}},$$

$$z + n\,\frac{\frac{1}{\varrho}}{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}} + h\,\frac{\frac{1}{\varrho}\gamma + \frac{1}{r}\nu}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}},$$

während ein Punkt einer Schraubungsachse die Koordinaten:

$$x + \frac{\frac{1}{\varrho}l + \frac{d\varphi}{ds}\lambda}{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} + tr_x,$$

$$y + \frac{\frac{1}{\varrho}m + \frac{d\varphi}{ds}\mu}{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} + tr_y,$$

$$z = \frac{\frac{1}{\varrho}n + \frac{d\varphi}{ds}\nu}{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} + tr_z$$

besitzt. Damit die beiden Punkte zusammenfallen, müssen hiernach drei Gleichungen zwischen t und h bestehen, die wir der Reihe nach mit

α, β, γ, sodann mit l, m, n, endlich mit λ, μ, ν multiplizieren und sie jedesmal addieren. Auf diese Weise folgt:

$$\frac{\frac{h}{\varrho}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}} = -\frac{\frac{t}{r}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{1}{\varrho}}{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}} = \frac{\frac{1}{\varrho}}{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} - t\frac{\frac{d\varphi}{ds}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{h}{r}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}} = \frac{\frac{d\varphi}{ds}}{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} + t\frac{\frac{1}{\varrho}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen ergibt sich:

$$t = -\frac{\frac{1}{\varrho}\frac{d\varphi}{ds}}{\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}, \quad h = \frac{\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{ds}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right)}.$$

Da diese Werte von t und h die dritte der vorigen Gleichungen befriedigen, ist unsere Behauptung erwiesen.

Der Punkt, in welchem die zu $\frac{d\varphi}{ds}$ gehörende Schraubungsachse die Gerade schneidet, besitzt die Koordinaten:

$$x + \frac{\frac{1}{\varrho}l}{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}} + \frac{\frac{\varphi'}{r}}{\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}+\varphi'^2\right)\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}} \cdot \frac{\frac{\alpha}{\varrho}+\frac{\lambda}{r}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}}, \quad \text{usw.}$$

Führen wir daher ein u, v, w-System ein, dessen Anfangspunkt mit dem Punkt des kürzesten Abstandes der Hauptnormale von der benachbarten Hauptnormale zusammenfällt, dessen u-Achse parallel der rektifizierenden Kante ist, dessen v-Achse mit der Hauptnormale zusammenfällt, und dessen w-Achse die Richtungskosinus:

$$\frac{\frac{\alpha}{\varrho}+\frac{\lambda}{r}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}}, \quad \text{usw.}$$

besitzt, so nehmen die Gleichungen der Schraubenachsenfläche die Gestalt an:

$$u = \tau\frac{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}, \quad v = -\tau\frac{\frac{d\varphi}{ds}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}},$$

$$w = \frac{\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{ds}}{\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right)\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}},$$

folglich:

$$w(u^2+v^2) = -\frac{uv}{r\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}\right)}.$$

Wir haben es daher wiederum mit einem **Zylindroid** zu tun. Für $w = 0$ erhalten wir entweder $u = 0$ oder $v = 0$. Aber die dem Falle $u = 0$ entsprechende Erzeugende gehört zu dem Wert Unendlich von $\frac{d\varphi}{ds}$, sie fällt mit der Hauptnormale zusammen und kann nicht als eine Schraubungsachse angesehen werden. Wenn die beiden Werte φ_1 und φ_2 von $\frac{d\varphi}{ds}$ denselben Wert von w liefern sollen, so muß:

$$\varphi_1\varphi_2 = \frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}$$

sein. Die dieser Gleichung genügenden Werte φ_1 und φ_2 sind einander gleich für $\varphi_1 = \sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}$, wo sich das Maximum von w, und für $\varphi_1 = -\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}$, wo sich das Minimum von w ergibt. Durch diese Grenzpunkte auf der Zylindroidachse geht jedesmal nur eine Erzeugende; in den Zwischenpunkten treffen sich jedesmal zwei Erzeugende.

Die für x', y', z' gefundenen Ausdrücke zeigen, daß der Ort der Fußpunkte aller Lote, die von dem Kurvenpunkt (x, y, z) aus auf die Schraubungsachsen gefällt werden können, in der Normalebene der Kurve liegt. Nehmen wir in dieser Ebene die Binormale als u_1-Achse, die Hauptnormale als v_1-Achse, so erhalten die Koordinaten der Fußpunkte die Form:

$$u_1 = \frac{\frac{d\varphi}{ds}}{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}, \quad v_1 = \frac{\frac{1}{\varrho}}{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2},$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{u_1^2}{\frac{1}{4\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}\right)}} + \frac{\left(v_1 - \frac{1}{2\varrho\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}\right)}\right)^2}{\frac{1}{4\varrho^2\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2}} = 1.$$

Die Fußpunkte liegen also auf einer Ellipse. Der Mittelpunkt dieser Ellipse liegt in der Hauptnormale und halbiert die Strecke

zwischen dem Kurvenpunkt (x, y, z) und dem Punkt kürzesten Abstandes der Hauptnormale von der benachbarten Hauptnormale.

III. Wir betrachten endlich ein Dreikant, bei dem eine Kante von der Binormale der zugrunde gelegten Kurve gebildet wird, während die beiden anderen Kanten in der Schmiegungsebene der Kurve liegen. Hier können wir:

$$\alpha_x = \alpha \cos\varphi + l \sin\varphi,$$
$$l_x = l\cos\varphi - \alpha\sin\varphi,$$
$$\lambda_x = \lambda$$

setzen und erhalten:

$$\frac{d\alpha_x}{ds} = \frac{l}{\varrho}\cos\varphi - \left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{r}\right)\sin\varphi + l_x\frac{d\varphi}{ds},$$

$$\frac{dl_x}{ds} = -\left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{r}\right)\cos\varphi - \frac{l}{\varrho}\sin\varphi - \alpha_x\frac{d\varphi}{ds},$$

$$\frac{d\lambda_x}{ds} = \frac{l}{r},$$

$$p_1 = -\frac{\cos\varphi}{r}, \quad p_2 = \frac{\sin\varphi}{r}, \quad p_3 = \frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds},$$

$$q_1 = \cos\varphi, \qquad q_2 = -\sin\varphi, \qquad q_3 = 0,$$

$$k = -\frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds}\right)^2},$$

$$r_x = \frac{-\frac{\alpha}{r} + \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds}\right)\lambda}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds}\right)^2}},$$

$$\xi_1 = \frac{\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds}\right)\sin\varphi}{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds}\right)^2}, \quad \eta_1 = \frac{\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds}\right)\cos\varphi}{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds}\right)^2}, \quad \zeta_1 = 0,$$

$$x' = x + l\,\frac{\frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds}}{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds}\right)^2}.$$

Hieraus geht hervor, daß die Schraubungsachsen die Hauptnormale senkrecht schneiden, und zwar füllen die Schnittpunkte auf der Hauptnormale die Strecke von $-\frac{r}{2}$ bis $+\frac{r}{2}$ aus. Fassen wir die Binormale als u-Achse, die Tangente als v-Achse, die Haupt-

normale als w-Achse auf, so besitzt in bezug auf das u, v, w-System ein Punkt einer Schraubungsachse die Koordinaten:

$$u = \tau \frac{\frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds}}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}, \quad v = \tau \frac{-\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}, \quad w = \frac{\frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds}}{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds}\right)^2}.$$

Daher ist:

$$w(u^2 + v^2) = -ruv$$

die Gleichung der Schraubenachsenfläche. Wir haben es also wieder mit einem Zylindroid zu tun. Jede Erzeugende des Zylindroids, mit Ausnahme der Binormale, die ja dem Werte Unendlich von $\frac{d\varphi}{ds}$ entspricht, besitzt die Eigenschaft, eine Schraubungsachse zu sein.

§ 30. Bestimmung aller Schraubungen, durch welche eine Strecke aus einer gegebenen Lage in eine zweite gegebene Lage übergeführt wird.

Geht eine Strecke P_0P_1 durch eine Bewegung des Raumes in eine neue Lage $P_0'P_1'$ über, so geht gleichzeitig die von P_0 aus nach P_1 gezogene Halbgerade in die von P_0' aus nach P_1' gezogene Halbgerade über. Die erste wollen wir durch die Gleichungen:

$$x = x_0 + h\alpha_0, \quad y = y_0 + h\beta_0, \quad z = z_0 + h\gamma_0$$

darstellen, in denen α_0, β_0, γ_0 die Richtungskosinus der Halbgeraden bezeichnen sollen. Die zweite sei durch die Gleichungen:

$$x' = x_0' + h\alpha_0', \quad y' = y_0' + h\beta_0', \quad z' = z_0' + h\gamma_0'$$

dargestellt, in denen α_0', β_0', γ_0' ebenfalls Richtungskosinus bedeuten mögen. Dabei soll der von den Halbgeraden gebildete Winkel als von Null und von π verschieden vorausgesetzt werden. Geben wir dem Parameter h in diesen sechs Gleichungen denselben positiven Wert, so sind die Punkte beider Halbgeraden in der Weise einander zugeordnet, daß je zwei Punkte der ersten denselben Abstand besitzen, wie die ihnen entsprechenden Punkte der zweiten. Eine Schraubung, welche die Punkte der ersten Halbgeraden in die ihnen entsprechenden Punkte der zweiten überführt, erfordert es, daß Gleichungen von der Form:

$$(1) \quad \begin{cases} x_0' + h\alpha_0' = a + (x_0 + h\alpha_0)\alpha_1 + (y_0 + h\beta_0)\alpha_2 + (z_0 + h\gamma_0)\alpha_3, \\ y_0' + h\beta_0' = b + (x_0 + h\alpha_0)\beta_1 + (y_0 + h\beta_0)\beta_2 + (z_0 + h\gamma_0)\beta_3, \\ z_0' + h\gamma_0' = c + (x_0 + h\alpha_0)\gamma_1 + (y_0 + h\beta_0)\gamma_2 + (z_0 + h\gamma_0)\gamma_3 \end{cases}$$

für alle Werte von h bestehen müssen, und es handelt sich um die allgemeinste, mit diesen Gleichungen verträgliche Bestimmung von $a, b, c, \alpha_1 \dots \gamma_3$, oder bei Benutzung der Gleichungen (11) § 26 S. 304 von $a, b, c, r_x, r_y, r_z, \vartheta$.

Die Vergleichung der Koeffizienten von h in dem System (1) liefert:

$$\alpha_0' = \alpha_0\alpha_1 + \beta_0\alpha_2 + \gamma_0\alpha_3,$$
$$\beta_0' = \alpha_0\beta_1 + \beta_0\beta_2 + \gamma_0\beta_3,$$
$$\gamma_0' = \alpha_0\gamma_1 + \beta_0\gamma_2 + \gamma_0\gamma_3,$$

so daß:

$$\alpha_0' = r_x\Sigma\alpha_0 r_x + (\alpha_0 - r_x\Sigma\alpha_0 r_x)\cos\vartheta + (\gamma_0 r_y - \beta_0 r_z)\sin\vartheta, \quad \text{usw.}$$

Hieraus folgt erstens:

$$\Sigma(\alpha_0' - \alpha_0)r_x = 0,$$

so daß alle Schraubungsachsen zu einer festen Richtung senkrecht sind, und zweitens:

$$\cos\vartheta = \frac{\Sigma\alpha_0\alpha_0' - (\Sigma\alpha_0 r_x)^2}{1 - (\Sigma\alpha_0 r_x)^2}, \quad \sin\vartheta = \frac{\Sigma r_x(\gamma_0'\beta_0 - \beta_0'\gamma_0)}{1 - (\Sigma\alpha_0 r_x)^2}.$$

Den Winkel beider Halbgeraden bezeichnen wir mit φ, die Richtungskosinus der Geraden, auf welcher sich die Mittelpunkte der je zwei sich entsprechende Punkte der Halbgeraden verbindenden Strecken befinden, mit m_x, m_y, m_z und setzen:

$$m_x = \frac{\alpha_0 + \alpha'_0}{2\cos\frac{\varphi}{2}}, \quad m_y = \frac{\beta_0 + \beta_0'}{2\cos\frac{\varphi}{2}}, \quad m_z = \frac{\gamma_0 + \gamma_0'}{2\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Die Richtungskosinus der zu den Schraubungsachsen senkrechten Richtung bezeichnen wir mit s_x, s_y, s_z und setzen:

$$s_x = \frac{\alpha_0' - \alpha_0}{2\sin\frac{\varphi}{2}}, \quad s_y = \frac{\beta_0' - \beta_0}{2\sin\frac{\varphi}{2}}, \quad s_z = \frac{\gamma_0' - \gamma_0}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Endlich seien n_x, n_y, n_z die Richtungskosinus einer zu beiden Richtungen senkrechten Richtung, also:

$$n_x = \frac{\gamma_0\beta_0' - \beta_0\gamma_0'}{\sin\varphi}, \quad n_y = \frac{\alpha_0\gamma_0' - \gamma_0\alpha_0'}{\sin\varphi}, \quad n_z = \frac{\beta_0\alpha_0' - \alpha_0\beta_0'}{\sin\varphi}.$$

Die letzte Richtung (n_x, n_y, n_z) steht zugleich auf den beiden Halbgeraden senkrecht.

Wir nehmen nun:

$$r_x = m_x\cos\psi + n_x\sin\psi, \quad r_y = m_y\cos\psi + n_y\sin\psi, \quad r_z = m_z\cos\psi + n_z\sin\psi.$$

Da:

$$\alpha_0 = m_x\cos\frac{\varphi}{2} - s_x\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \alpha_0' = m_x\cos\frac{\varphi}{2} + s_x\sin\frac{\varphi}{2},$$

so wird:

$$\Sigma\alpha_0 r_x = \cos\psi\cos\frac{\varphi}{2}, \quad \Sigma r_x(\gamma_0'\beta_0 - \beta_0'\gamma_0) = -\sin\varphi\sin\psi,$$

daher:

$$\cos\vartheta = \frac{\cos\varphi - \cos^2\psi\cos^2\frac{\varphi}{2}}{1-\cos^2\psi\cos^2\frac{\varphi}{2}}, \quad \sin\vartheta = \frac{-\sin\varphi\sin\psi}{1-\cos^2\psi\cos^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Die Koordinaten des Fußpunktes eines vom Koordinatenanfangspunkt aus auf eine Schraubungsachse gefällten Lotes sind nach (4) § 27 S. 305:

$$\xi_1 = \frac{a(1-\alpha_1) - b\beta_1 - c\gamma_1}{3-\alpha_1-\beta_2-\gamma_3}, \quad \text{usw.}$$

Aus (1) ergibt sich:

$$a = x_0' - x_0\alpha_1 - y_0\alpha_2 - z_0\alpha_3, \quad \text{usw.},$$

daher nach (11) S. 304:

$$\xi_1 = \frac{(x_0'+x_0)(1-\alpha_1) - y_0'\beta_1 - z_0'\gamma_1 - y_0\alpha_2 - z_0\alpha_3}{3-\alpha_1-\beta_2-\gamma_3}$$

$$= \frac{x_0'+x_0}{2} - r_x\frac{\Sigma r_x(x_0'+x_0)}{2} + \frac{r_z(y_0'-y_0) - r_y(z_0'-z_0)}{2}\cot\frac{\varphi}{2}\sin\psi.$$

Man hat:

$$r_z(y_0'-y_0) - r_y(z_0'-z_0)$$
$$= \{(y_0'-y_0)m_z - (z_0'-z_0)m_y\}\cos\psi + \{(y_0'-y_0)n_z - (z_0'-z_0)n_y\}\sin\psi.$$

Ersetzen wir hierin m_z durch $n_x s_y - n_y s_x$, m_y durch $n_z s_x - n_x s_z$, n_z durch $s_x m_y - s_y m_x$, $n_y = m_x s_z - m_z s_x$, so ergibt sich:

$$r_z(y_0'-y_0) - r_y(z_0'-z_0) = (n_x\cos\psi - m_x\sin\psi)\Sigma(x_0'-x_0)s_x$$
$$- s_x\cos\psi\,\Sigma(x_0'-x_0)n_x + s_x\sin\psi\,\Sigma(x_0'-x_0)m_x.$$

Wenn wir diese Gleichung mit $\sin\psi$ multiplizieren und im ersten Gliede rechts statt $n_x\sin\psi$ den Ausdruck $r_x - m_x\cos\psi$ setzen, so folgt:

$$\{r_z(y_0'-y_0) - r_y(z_0'-z_0)\}\sin\psi = r_x\cos\psi\,\Sigma(x_0'-x_0)s_x - m_x\Sigma(x_0'-x_0)s_x$$
$$- s_x\sin\psi\big(\cos\psi\,\Sigma(x_0'-x_0)n_x - \sin\psi\,\Sigma(x_0'-x_0)m_x\big),$$

damit findet sich:

$$\xi_1 = \frac{x_0'+x_0}{2} - m_x\frac{\cot\frac{\varphi}{2}}{2}\Sigma(x_0'-x_0)s_x$$

$$+ s_x\frac{\cot\frac{\varphi}{2}\sin\psi}{2}\big(\sin\psi\,\Sigma(x_0'-x_0)m_x - \cos\psi\,\Sigma(x_0'-x_0)n_x\big)$$

$$+ r_x\frac{1}{2}\Big\{\cot\frac{\varphi}{2}\cos\psi\,\Sigma(x_0'-x_0)s_x - \Sigma r_x(x_0'+x_0)\Big\}.$$

Nun sei:

$$\frac{x_0' + x_0}{2} - \frac{m_x}{2} \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \Sigma(x_0' - x_0)s_x = m_1,$$

$$\frac{y_0' + y_0}{2} - \frac{m_y}{2} \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \Sigma(x_0' - x_0)s_x = m_2,$$

$$\frac{z_0' + z_0}{2} - \frac{m_z}{2} \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \Sigma(x_0' - x_0)s_x = m_3,$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \Sigma(x_0' - x_0) m_x = p,$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \Sigma(x_0' - x_0) n_x = q,$$

dann können wir die Gleichungen der Schraubungsachsen, unter t einen Parameter verstehend, in der Form schreiben:

$$x = m_1 + s_x(p \sin^2\psi - q \sin\psi \cos\psi) + t r_x,$$
$$y = m_2 + s_y(p \sin^2\psi - q \sin\psi \cos\psi) + t r_y,$$
$$z = m_3 + s_z(p \sin^2\psi - q \sin\psi \cos\psi) + t r_z.$$

Da ψ beliebig gewählt werden kann, haben wir es mit einer einfach unendlichen Schar von Schraubungsachsen zu tun. Die letzteren schneiden die Gerade, welche durch den Punkt (m_1, m_2, m_3) geht und die Richtungskosinus s_x, s_y, s_z besitzt, senkrecht. Nehmen wir diesen Punkt zum Anfangspunkt eines u, v, w-Systems, in dem die u-Achse die Richtungskosinus m_x, m_y, m_z, die v-Achse die Richtungskosinus n_x, n_y, n_z, die w-Achse die Richtungskosinus s_x, s_y, s_z besitzt, so sind:

$$u = t \cos\psi, \quad v = t \sin\psi, \quad w = p \sin^2\psi - q \sin\psi \cos\psi$$

bei veränderlichem t und ψ die Gleichungen der Schraubungsachsenfläche. Die Elimination von t und ψ liefert:

$$w(u^2 + v^2) = pv^2 - quv.$$

Setzt man nun, falls p und q nicht gleichzeitig verschwinden:

$$u = u_0 \cos\varepsilon - v_0 \sin\varepsilon, \quad v = u_0 \sin\varepsilon + v_0 \cos\varepsilon, \quad w = w_0 + \frac{p}{2},$$

$$\cos 2\varepsilon = \frac{-q}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \sin 2\varepsilon = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

so ergibt sich die folgende Flächengleichung:

$$w_0(u_0^2 + v_0^2) = \sqrt{p^2 + q^2} \cdot u_0 v_0.$$

Wir haben es daher mit einem Zylindroid zu tun, dessen Achse gleich $\sqrt{p^2 + q^2}$ ist.

Die geometrische Bedeutung des Punktes (m_1, m_2, m_3) erhellt folgendermaßen. Das Quadrat des Abstandes zweier einander zugeordneter Punkte der beiden gegebenen Geraden ist gleich:

$$\Sigma\left(x_0' - x_0 + h(\alpha_0' - \alpha_0)\right)^2.$$

Soll der Abstand ein Minimum sein, so muß die Beziehung:

$$\Sigma(x_0' - x_0)(\alpha_0' - \alpha_0) + h\Sigma(\alpha_0' - \alpha_0)^2 = 0$$

bestehen. Dies ergibt:

$$h = -\frac{\Sigma(x_0' - x_0)s_x}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Die x-Koordinate des Mittelpunktes der kleinsten Verrückungsstrecke erweist sich gleich:

$$\frac{x_0' + x_0}{2} - \frac{\alpha_0' + \alpha_0}{4\sin\frac{\varphi}{2}}\Sigma(x_0' - x_0)s_x,$$

d. h. gleich m_1. Die Achse des Zylindroids enthält somit den Mittelpunkt der kleinsten Verrückungsstrecke. Die Größe dieser Verrückungsstrecke ist gleich:

$$\sqrt{\Sigma\left(x_0' - x_0 - s_x\Sigma(x_0' - x_0)s_x\right)^2}$$

oder:

$$\sqrt{\Sigma(x_0' - x_0)^2 - \left(\Sigma(x_0' - x_0)s_x\right)^2}.$$

Setzen wir:

$$\Sigma(x_0' - x_0)s_x = r,$$

so folgt aus dieser Gleichung und aus den folgenden:

$$\Sigma(x_0' - x_0)m_x = 2p\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

$$\Sigma(x_0' - x_0)n_x = 2q\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

daß:

$$x_0' - x_0 = 2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(pm_x + qn_x) + rs_x, \quad \text{usw.}$$

Wir haben somit:

$$\Sigma(x_0' - x_0)^2 = 4\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}(p^2 + q^2) + r^2,$$

daher wird die Maßzahl der kleinsten Verrückungsstrecke gleich:

$$2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{p^2 + q^2}.$$

Hierdurch ist, falls p und q nicht gleichzeitig verschwinden, die geometrische Bedeutung der in der Zylindroidgleichung auftretenden Konstanten dargetan.

Wenn aber p und q zugleich verschwinden, haben die beiden Halbgeraden oder ihre Verlängerungen einen Punkt gemein, der keine Ortsveränderung erfährt. An Stelle der Schraubungen treten hier, wie es geometrisch offenbar ist, aber auch sogleich analytisch gezeigt werden soll, Drehungen. Die Drehungsachsen gehen durch den gemeinsamen Punkt und liegen in der Ebene $w = 0$, d. h. in der Ebene, welche sowohl die Mittelpunkte aller Verrückungsstrecken, wie die durch den gemeinsamen Punkt gezogene und auf beiden Halbgeraden senkrechte Gerade enthält.

Für die bei einer Schraubung stattfindende Verschiebung fanden wir in (3) § 27 S. 305 den Wert:

$$\tau = ar_x + br_y + cr_z.$$

Dies ergibt gegenwärtig nach (1) S. 321:

$$\tau = \Sigma(x_0' - x_0\alpha_1 - y_0\alpha_2 - z_0\alpha_3)r_x.$$

Da aber nach (11) § 26 S. 304:

$$\alpha_1 r_x + \beta_1 r_y + \gamma_1 r_z = r_x,$$
$$\alpha_2 r_x + \beta_2 r_y + \gamma_2 r_z = r_y,$$
$$\alpha_3 r_x + \beta_3 r_y + \gamma_3 r_z = r_z,$$

so erhalten wir:

$$\tau = \Sigma(x_0' - x_0)r_x = 2 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(p \cos\psi + q \sin\psi).$$

Sind p und q beide gleich Null, so haben wir es ausschließlich mit Drehungen zu tun, da τ für jeden Wert von ψ verschwindet. Im entgegengesetzten Falle erhalten wir nur eine Drehung und diese entspricht dem durch die Gleichungen:

$$\sin\psi = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \cos\psi = \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

bestimmten Wert von ψ. Die zugehörige Drehungsachse wird durch die Gleichungen:

$$u = t\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad v = t\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad w = p$$

festgelegt.

Eine weitere Eigenschaft der Zylindroidachse ergibt sich, wenn man den kürzesten Abstand der beiden gegebenen Geraden berechnet. Das Quadrat des Abstandes des Punktes $(x_0 + h\alpha_0, y_0 + h\beta_0, z_0 + h\gamma_0)$ der ersten Geraden von dem Punkt $(x_0' + l\alpha_0', y_0' + l\beta_0', z_0' + l\gamma_0')$ der zweiten Geraden ist:

$$\Sigma(x_0' - x_0 + l\alpha_0' - h\alpha_0)^2.$$

Setzen wir statt α_0, α_0', $x_0' - x_0$, usw. die Ausdrücke $m_x \cos\frac{\varphi}{2} - s_x \sin\frac{\varphi}{2}$, $m_x \cos\frac{\varphi}{2} + s_x \sin\frac{\varphi}{2}$, $2 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(pm_x + qn_x) + rs_x$, usw., so wird das Quadrat des Abstandes gleich:

$$\left(2p \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + (l-h)\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(r + (l+h)\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 + 4q^2 \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}.$$

Da das Quadrat des kürzesten Abstandes (S. 218) gleich $4q^2 \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$ ist, so bestehen für die den Endpunkten des kürzesten Abstandes entsprechenden Werte von l und h die Gleichungen:

$$2p \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + (l-h)\cos\frac{\varphi}{2} = 0, \quad r + (l+h)\sin\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Die x-Koordinate des Mittelpunktes des kürzesten Abstandes ist:

$$\frac{x_0' + x_0}{2} + \frac{l}{2}\alpha_0' + \frac{h}{2}\alpha_0 = \frac{x_0' + x_0}{2} - \frac{m_x}{2} r \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} - s_x p \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$$
$$= m_1 - s_x p \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}.$$

Daher liegt der Mittelpunkt des kürzesten Abstandes auf der Zylindroidachse.

Um die vorstehenden Ergebnisse für die Lehre von den Raumkurven fruchtbar zu machen, nehmen wir an, daß der Punkt (x_0, y_0, z_0) eine Kurve beschreibe, und setzen fortan x, y, z statt x_0, y_0, z_0. Dabei sollen x, y, z ebenso wie $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ als Funktionen der Bogenlänge s der Kurve betrachtet werden. Die Koordinaten x_0', y_0', z_0', ebenso die Richtungskosinus $\alpha_0', \beta_0', \gamma_0'$ sollen aus $x, y, z, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ dadurch hervorgehen, daß statt s gesetzt wird $s + \Delta s$. Dabei werde angenommen, daß der Bogenlänge s ein Wert beigelegt sei, für den weder $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ noch $\frac{d\alpha_0}{ds}, \frac{d\beta_0}{ds}, \frac{d\gamma_0}{ds}$ gleichzeitig verschwinden.

Für α_0' erhalten wir die Entwicklung:

$$\alpha_0' = \alpha_0 + \frac{d\alpha_0}{ds}\Delta s + \cdots,$$

für x_0' die Entwicklung:

$$x_0' = x + \frac{dx}{ds}\Delta s + \cdots,$$

endlich für φ die Entwicklung:

$$\varphi = \sqrt{\sum\left(\frac{d\alpha_0}{ds}\right)^2}\,\Delta s + \cdots$$

Beim Grenzübergang zu $\Delta s = 0$ ergibt sich:

$$m_x = \alpha_0, \quad n_x = \frac{\gamma_0 \frac{d\beta_0}{ds} - \beta_0 \frac{d\gamma_0}{ds}}{\sqrt{\sum\left(\frac{d\alpha_0}{ds}\right)^2}}, \quad s_x = \frac{\frac{d\alpha_0}{ds}}{\sqrt{\sum\left(\frac{d\alpha_0}{ds}\right)^2}},$$

somit:

$$r_x = \alpha_0 \cos\psi + \frac{\gamma_0 \frac{d\beta_0}{ds} - \beta_0 \frac{d\gamma_0}{ds}}{\sqrt{\sum\left(\frac{d\alpha_0}{ds}\right)^2}} \sin\psi.$$

Die Entwicklung von ϑ (S. 323) nimmt die Form an:

$$\vartheta = -\frac{\sqrt{\sum\left(\frac{d\alpha_0}{ds}\right)^2}}{\sin\psi} \Delta s + \cdots$$

Daraus geht hervor, daß dem Werte $\psi = 0$ keine Schraubungsachse entsprechen kann.

Für den Parameter der zu ψ gehörenden Schraubenbewegung hat man bei $\Delta s = 0$:

$$k = -\sin\psi \left\{ \frac{\Sigma\alpha_0 \frac{dx}{ds}}{\sqrt{\sum\left(\frac{d\alpha_0}{ds}\right)^2}} \cos\psi + \frac{\sum \frac{dx}{ds}\left(\gamma_0 \frac{d\beta_0}{ds} - \beta_0 \frac{d\gamma_0}{ds}\right)}{\sum\left(\frac{d\alpha_0}{ds}\right)^2} \sin\psi \right\},$$

und zudem folgt:

$$m_1 = x - \alpha_0 \frac{\sum \frac{dx}{ds}\frac{d\alpha_0}{ds}}{\sum\left(\frac{d\alpha_0}{ds}\right)^2},$$

$$m_2 = y - \beta_0 \frac{\sum \frac{dx}{ds}\frac{d\alpha_0}{ds}}{\sum\left(\frac{d\alpha_0}{ds}\right)^2},$$

$$m_3 = z - \gamma_0 \frac{\sum \frac{dx}{ds}\frac{d\alpha_0}{ds}}{\sum\left(\frac{d\alpha_0}{ds}\right)^2},$$

$$p = \frac{\Sigma\alpha_0 \frac{dx}{ds}}{\sqrt{\sum\left(\frac{d\alpha_0}{ds}\right)^2}}, \quad q = \frac{\sum \frac{dx}{ds}\left(\gamma_0 \frac{d\beta_0}{ds} - \beta_0 \frac{d\gamma_0}{ds}\right)}{\sum\left(\frac{d\alpha_0}{ds}\right)^2}.$$

Betrachten wir nun einige besondere Fälle!

I. Wenn $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$, $\gamma_0 = \gamma$, so ergibt sich:

$$m_x = \alpha, \quad n_x = -\lambda, \quad s_x = l,$$

$$r_x = \alpha \cos\psi - \lambda \sin\psi,$$

$$m_1 = x, \quad m_2 = y, \quad m_3 = z, \quad p = \varrho, \quad q = 0.$$

Wir erhalten dasselbe Zylindroid, wie unter I im vorigen Paragraphen; jede Erzeugende desselben, mit Ausnahme der Kurven-

tangente ($\psi = 0$), hat die Eigenschaft einer Schraubungsachse. Die Drehungsachse entspricht dem Werte $\psi = \frac{\pi}{2}$.

II. Wenn $\alpha_0 = l$, $\beta_0 = m$, $\gamma_0 = n$, so ergibt sich:

$$m_x = l, \quad n_x = \frac{\frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda}{\varrho}}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2}}}, \quad s_x = \frac{-\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\lambda}{r}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}},$$

$$r_x = l \cos\psi + \frac{\frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda}{\varrho}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}},$$

$$m_1 = x + l\frac{\frac{1}{\varrho}}{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}, \quad m_2 = y + m\frac{\frac{1}{\varrho}}{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}, \quad m_3 = z + n\frac{\frac{1}{\varrho}}{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}},$$

$$p = 0, \quad q = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}.$$

Wir erhalten dasselbe Zylindroid, wie unter II des vorigen Paragraphen; jede Erzeugende desselben, mit Ausnahme der Hauptnormale der Kurve, besitzt die Eigenschaft einer Schraubungsachse. Eine Drehungsachse kommt nicht vor.

III. Wenn $\alpha_0 = \lambda$, $\beta_0 = \mu$, $\gamma_0 = \nu$, so ergibt sich:

$$m_x = \lambda, \quad n_x = \alpha, \quad s_x = l,$$
$$r_x = \lambda \cos\psi + \alpha \sin\psi,$$
$$m_1 = x, \quad m_2 = y, \quad m_3 = z, \quad p = 0, \quad q = r.$$

Wir erhalten dasselbe Zylindroid, wie unter III des vorigen Paragraphen; jede Erzeugende desselben, mit Ausnahme der Binormale der Kurve, besitzt die Eigenschaft einer Schraubungsachse. Eine Drehungsachse kommt nicht vor.

Bemerkung. Die allgemeine, in diesem Paragraphen behandelte Aufgabe ist wohl zuerst von E. Lamarle (Théorie géométrique des centres et axes instantanés de rotation, Brüssel u. Paris 1859, S. 113, vgl. R. v. Lilienthal, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-vereinigung, Bd. 11, 1902, S. 38) für den Fall unendlich naher Lagen der Geraden gelöst. Daß die sich ergebende Achsenfläche ein Zylindroid ist, hat Lamarle nicht bemerkt, ebensowenig C. Moshammer (Wiener Sitzungsber. 1876, Bd. 73, Abt. 2, S. 143) und Pelišek-Miloslaw (Archiv d. Math. (2) Bd. 7, 1889, S. 1), die auf synthetischem Wege den Fall endlich verschiedener Lagen untersuchten. Den Nach-

weis, daß die Achsenfläche stets ein Zylindroid ist, erbrachte unter Benutzung der Graßmannschen Methode F. Rath (Mathem.-naturwiss. Mitteilungen, Stuttgart, (2) Bd. 6, S. 85, 1904 und Bd. 7, S. 9, 1905). Von dem Zylindroid wird im zweiten Bande dieser Vorlesungen ausführlicher die Rede sein.

§ 31. Translationsstrahlen und Binormalstrahlen.

Wir gehen jetzt zurück zu der einem beweglichen Dreikant zugeordneten Schraubenbewegung. Die Achsen des Dreikants bildeten das ξ, η, ζ-System. Die Schraubenbewegung war bestimmt durch die Schraubungsachse $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1;\, r_\xi, r_\eta, r_\zeta)$ und den Parameter k. Durch den Punkt (ξ_1, η_1, ζ_1) werde senkrecht zur Schraubungsachse eine Ebene gelegt. In ihr ziehen wir vom Punkte (ξ_1, η_1, ζ_1) aus zwei zueinander senkrechte Halbgerade mit den Richtungskosinus $p_\xi, p_\eta, p_\zeta;\, q_\xi, q_\eta, q_\zeta$, jedoch so, daß:

$$\begin{vmatrix} p_\xi & p_\eta & p_\zeta \\ q_\xi & q_\eta & q_\zeta \\ r_\xi & r_\eta & r_\zeta \end{vmatrix} = 1.$$

Irgendein Punkt dieser Ebene besitzt die Koordinaten:

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi_1 + v\,(p_\xi \cos u_0 + q_\xi \sin u_0), \\ \eta' &= \eta_1 + v\,(p_\eta \cos u_0 + q_\eta \sin u_0), \\ \zeta' &= \zeta_1 + v\,(p_\zeta \cos u_0 + q_\zeta \sin u_0). \end{aligned}$$

Hierin bedeutet v die Maßzahl des Abstandes der Punkte (ξ', η', ζ') und (ξ_1, η_1, ζ_1), während u_0 die Maßzahl des Winkels bedeutet, den die vom Punkte (ξ_1, η_1, ζ_1) aus durch den Punkt (ξ', η', ζ') gezogene Halbgerade mit der Halbgeraden (p_ξ, p_η, p_ζ) bildet.

Nehmen wir nun eine Schraubung des Raumes vor, bei der die Größe der Drehung mit u bezeichnet werde, so gelangt der Punkt (ξ', η', ζ') in eine neue Lage, deren Koordinaten:

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \xi_1 + v\big(p_\xi \cos(u_0 + u) + q_\xi \sin(u_0 + u)\big) + kur_\xi, \\ \eta &= \eta_1 + v\big(p_\eta \cos(u_0 + u) + q_\eta \sin(u_0 + u)\big) + kur_\eta, \\ \zeta &= \zeta_1 + v\big(p_\zeta \cos(u_0 + u) + q_\zeta \sin(u_0 + u)\big) + kur_\zeta \end{aligned} \right.$$

sind.

Auf diese Weise werden durch eine Schraubenbewegung doppelt unendlich viele Schraubenlinien bestimmt, längs derer u veränderlich ist, während die Parameter durch v und u_0 vertreten werden. Durch jeden Punkt des Raumes, der nicht auf der Schraubungsachse liegt, geht eine und nur eine Schraubenlinie hindurch. Dieselbe ordnet dem Punkte drei Gerade zu, nämlich die Tangente, die Binormale

und die Hauptnormale der durch ihn bestimmten Schraubenlinie. Die erstere nennen wir nach dem Vorgange von C. Küpper (Monatshefte für Math. u. Phys., 1. Jahrgang, 1890, S. 95) den **Translationsstrahl des Punktes**, die zweite wollen wir den **Binormalstrahl des Punktes** nennen. Die dritte fällt mit der Geraden zusammen, die durch den Punkt hindurchgeht und die Schraubungsachse senkrecht schneidet; sie braucht also nicht besonders bestimmt zu werden.

Wir berechnen zunächst die Richtungskosinus des Translationsstrahls eines beliebig gewählten, aber nicht in der Schraubungsachse liegenden, Punktes (ξ, η, ζ).

Man hat:

$$\frac{d\xi}{du} = v\Big(-p_\xi \sin(u_0+u) + q_\xi \cos(u_0+u)\Big) + kr_\xi.$$

Da aber:

$$v\cos(u_0+u) = \Sigma(\xi-\xi_1)p_\xi, \quad v\sin(u_0+u) = \Sigma(\xi-\xi_1)q_\xi,$$

so folgt:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{du} &= (\eta-\eta_1)(-p_\xi q_\eta + q_\xi p_\eta) + (\zeta-\zeta_1)(-p_\xi q_\zeta + q_\xi p_\zeta) + kr_\xi \\ &= kr_\xi + r_\eta(\zeta-\zeta_1) - r_\zeta(\eta-\eta_1).\end{aligned}$$

Die Richtungskosinus des Translationsstrahls des Punktes (ξ, η, ζ) sind somit proportional den Zahlen:

$$(2)\qquad \begin{cases} p_1k + p_2(\zeta-\zeta_1) - p_3(\eta-\eta_1), \quad p_2k + p_3(\xi-\xi_1) - p_1(\zeta-\zeta_1), \\ p_3k + p_1(\eta-\eta_1) - p_2(\xi-\xi_1). \end{cases}$$

Auf Grund der Gleichungen (11) § 28 S. 313 findet sich:

$$p_3\eta_1 - p_2\zeta_1 = q_1 - p_1k, \quad p_1\zeta_1 - p_3\xi_1 = q_2 - p_2k, \quad p_2\xi_1 - p_1\eta_1 = q_3 - p_3k.$$

Die fraglichen Richtungskosinus sind daher ebenfalls proportional den Zahlen:

$$(3)\qquad q_1 + p_2\zeta - p_3\eta, \quad q_2 + p_3\xi - p_1\zeta, \quad q_3 + p_1\eta - p_2\xi.$$

Wir berechnen ferner die Richtungskosinus des Binormalstrahls eines beliebig gewählten, aber nicht in der Schraubungsachse liegenden Punktes (ξ, η, ζ).

Da die Binormale senkrecht zur Tangente und zur Hauptnormale, die letztere senkrecht zur Tangente und zur Schraubungsachse liegt, müssen die Richtungskosinus der Binormale proportional sein den Zahlen:

$$\frac{d\eta}{du}\left(r_\xi\frac{d\eta}{du} - r_\eta\frac{d\xi}{du}\right) - \frac{d\zeta}{du}\left(r_\zeta\frac{d\xi}{du} - r_\xi\frac{d\zeta}{du}\right), \quad \text{usw.}$$

oder:

$$r_\xi\Sigma\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 - \frac{d\xi}{du}\Sigma r_\xi\frac{d\xi}{du}, \quad \text{usw.}$$

Wendet man hier die Bestimmungen:

$$\frac{d\xi}{du} = kr_\xi + r_\eta(\zeta - \zeta_1) - r_\zeta(\eta - \eta_1), \quad \text{usw.}$$

an, so zeigen sich die Richtungskosinus des Binormalstrahls des Punktes (ξ, η, ζ) proportional den Zahlen:

$$r_\xi \Sigma\big(r_\eta(\zeta - \zeta_1) - r_\zeta(\eta - \eta_1)\big)^2 - k\big(r_\eta(\zeta - \zeta_1) - r_\zeta(\eta - \eta_1)\big),$$
$$r_\eta \Sigma\big(r_\eta(\zeta - \zeta_1) - r_\zeta(\eta - \eta_1)\big)^2 - k\big(r_\zeta(\xi - \xi_1) - r_\xi(\zeta - \zeta_1)\big),$$
$$r_\zeta \Sigma\big(r_\eta(\zeta - \zeta_1) - r_\zeta(\eta - \eta_1)\big)^2 - k\big(r_\xi(\eta - \eta_1) - r_\eta(\xi - \xi_1)\big),$$

oder, wenn man die Gleichungen: $p_3\eta_1 - p_2\zeta_1 = q_1 - p_1 k$, usf. berücksichtigt, proportional den Zahlen:

$$p_1 \Sigma(q_1 + p_2\zeta - p_3\eta)^2 - (q_1 + p_2\zeta - p_3\eta)\Sigma p_1 q_1,$$
$$p_2 \Sigma(q_1 + p_2\zeta - p_3\eta)^2 - (q_2 + p_3\xi - p_1\zeta)\Sigma p_1 q_1,$$
$$p_3 \Sigma(q_1 + p_2\zeta - p_3\eta)^2 - (q_3 + p_1\eta - p_2\xi)\Sigma p_1 q_1.$$

Wir gelangen zu geometrischen Sätzen, wenn wir die Translations- und Binormalstrahlen der Punkte einer gegebenen Geraden oder einer gegebenen Ebene betrachten und nach den besonderen Fällen fragen, die hier möglich sind.

§ 32. Translationsstrahlen der Punkte einer Geraden.

Wir nehmen eine Gerade als durch die Gleichungen:

$$\xi = \xi_0 + t\alpha_0, \quad \eta = \eta_0 + t\beta_0, \quad \zeta = \zeta_0 + t\gamma_0, \quad (\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1)$$

gegeben an. Für das Folgende ist es nötig, die Lage und Größe des kürzesten Abstandes der Geraden von der Schraubungsachse zu bestimmen, falls die Gerade nicht dieser Achse parallel ist.

Der Punkt kürzesten Abstandes gehört zu dem Werte:

$$t_0 = \frac{\Sigma(\xi_1 - \xi_0)(\alpha_0 - r_\xi \Sigma\alpha_0 r_\xi)}{1 - (\Sigma\alpha_0 r_\xi)^2}$$

von t. Der Zähler von t_0 ist zunächst gleich:

$$\Sigma(\xi_1 - \xi_0)(\alpha_0 \Sigma r_\xi^2 - r_\xi \Sigma\alpha_0 r_\xi)$$

und damit gleich:

$$\Sigma(\gamma_0 r_\eta - \beta_0 r_\zeta)\big(r_\eta(\zeta_1 - \zeta_0) - r_\zeta(\eta_1 - \eta_0)\big)$$

oder:

$$\frac{1}{w^2}\Sigma(\gamma_0 p_2 - \beta_0 p_3)\big(-p_1 k + p_2(\zeta_1 - \zeta_0) - p_3(\eta_1 - \eta_0)\big),$$

wo:

$$w^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2.$$

Setzen wir daher:

$$\pi_1 = p_1 k + p_2(\zeta_0 - \zeta_1) - p_3(\eta_0 - \eta_1),$$
$$\pi_2 = p_2 k + p_3(\xi_0 - \xi_1) - p_1(\zeta_0 - \zeta_1),$$
$$\pi_3 = p_3 k + p_1(\eta_0 - \eta_1) - p_2(\xi_0 - \xi_1)$$

oder, was nach dem Obigen dasselbe ist:

$$\pi_1 = q_1 + p_2\zeta_0 - p_3\eta_0, \quad \pi_2 = q_2 + p_3\xi_0 - p_1\zeta_0, \quad \pi_3 = q_3 + p_1\eta_0 - p_2\xi_0,$$

so folgt:

$$t_0 = \frac{\Sigma\pi_1(\gamma_0 p_2 - \beta_0 p_3)}{(\Sigma\alpha_0 p_1)^2 - w^2}.$$

Die Koordinaten des Punktes kürzesten Abstandes der Geraden von der Schraubungsachse bezeichnen wir mit $\xi_{00}, \eta_{00}, \zeta_{00}$, so daß:

$$\xi_{00} = \xi_0 + t_0\alpha_0, \quad \eta_{00} = \eta_0 + t_0\beta_0, \quad \zeta_{00} = \zeta_0 + t_0\gamma_0.$$

Die Maßzahl des kürzesten Abstandes (e) der Geraden von der Schraubungsachse wird gegeben durch die Gleichung:

$$e = \frac{\Sigma(\xi_0 - \xi_1)(\gamma_0 r_\eta - \beta_0 r_\zeta)}{\sqrt{1 - (\Sigma\alpha_0 r_\xi)^2}},$$

oder:

$$e = -\frac{\Sigma\alpha_0(p_2(\zeta_0 - \zeta_1) - p_3(\eta_0 - \eta_1))}{\sqrt{w^2 - (\Sigma\alpha_1 p_1)^2}} = \frac{k\Sigma\alpha_0 p_1 - \Sigma\alpha_0\pi_1}{\sqrt{w^2 - (\Sigma\alpha_0 p_1)^2}}.$$

Die Bedeutung des Vorzeichens von e entnehmen wir der Betrachtung auf S. 190. Durch den in der Schraubungsachse liegenden Endpunkt des kürzesten Abstands ziehen wir die Halbgerade (II) mit den Richtungskosinus $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, während die Halbgerade (I) die Richtungskosinus r_ξ, r_η, r_ζ besitze. Je nachdem der kürzeste Abstand in der Halbgeraden (IV) oder in der ihr entgegengesetzten Halbgeraden liegt, ist e positiv oder negativ.

Wir fragen zunächst, unter welcher Bedingung eine gegebene Gerade der Translationsstrahl eines ihrer Punkte ist. Ist dies der Fall, so muß es einen solchen Wert von t geben, daß die Richtungskosinus der Geraden gleich den Richtungskosinus des Translationsstrahls des zu diesem Werte von t gehörenden Punktes werden. Bezeichnen wir daher mit p einen Proportionalitätsfaktor, so muß sich t aus den Gleichungen:

$$q_1 + p_2(\zeta_0 + t\gamma_0) - p_3(\eta_0 + t\beta_0) = p\alpha_0, \quad \text{usw.}$$

oder:

$$\pi_1 + t(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0) = p\alpha_0,$$
$$\pi_2 + t(p_3\alpha_0 - p_1\gamma_0) = p\beta_0,$$
$$\pi_3 + t(p_1\beta_0 - p_2\alpha_0) = p\gamma_0$$

berechnen lassen. Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $p_2\gamma_0 - p_3\beta_0$, $p_3\alpha_0 - p_1\gamma_0$, $p_1\beta_0 - p_2\alpha_0$ und addieren sie, so entsteht:

$$\Sigma\pi_1(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0) + t\left(w^2 - (\Sigma\alpha_0 p_1)^2\right) = 0.$$

Dies besagt, daß wir nur dann einen endlichen Wert von t erhalten können, wenn die Gerade nicht parallel der Schraubungsachse ist.

Multiplizieren wir unsere Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, dann mit p_1, p_2, p_3 und addieren sie jedesmal, so entsteht:

$$\Sigma\alpha_0\pi_1 = p, \quad kw^2 = p\,\Sigma\alpha_0 p_1.$$

Daher muß die Bedingung:

$$kw^2 = \Sigma\alpha_0\pi_1\,\Sigma\alpha_0 p_1,$$

oder:

$$\Sigma\alpha_0 p_1\,\Sigma\alpha_0\pi_1 - \Sigma p_1 q_1 = 0$$

erfüllt sein.

Aus der Gleichung für den kürzesten Abstand e folgt:

$$\Sigma\alpha_0\pi_1 = k\,\Sigma\alpha_0 p_1 - e\sqrt{w^2 - (\Sigma\alpha_0 p_1)^2},$$

somit gewinnt unsere Bedingung die Gestalt:

$$k = -e\frac{\Sigma\alpha_0 p_1}{\sqrt{w^2 - (\Sigma\alpha_0 p_1)^2}},$$

oder, wenn wir mit ψ den Winkel der Geraden mit der Schraubungsachse bezeichnen, und:

$$\Sigma\alpha_0 p_1 = w\cos\psi, \quad \sqrt{w^2 - (\Sigma\alpha_0 p_1)^2} = w\sin\psi$$

setzen:

$$k = -e\operatorname{cotg}\psi.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Gerade, wie der obige Wert von t zeigt, der Translationsstrahl desjenigen ihrer Punkte, in dem sie den kürzesten Abstand von der Schraubungsachse besitzt.

Auf jeder Geraden, die nicht der Schraubungsachse parallel ist, besitzt der Punkt kürzesten Abstandes von der Schraubungsachse eine kinematische Bedeutung. Fassen wir nämlich in den Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen die Veränderliche u als die Maßzahl der Zeit auf, so kommt jedem Punkte die Geschwindigkeit $\sqrt{\sum\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2}$ zu, die wir mit V bezeichnen wollen Die Geschwindigkeiten der Punkte einer Geraden hängen von der einen Veränderlichen t ab; wir können daher nach einem Maximum oder Minimum dieser Geschwindigkeit fragen. Man hat:

$$V^2 = \frac{1}{w^2}\Sigma\left(\pi_1 + t(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0)\right)^2,$$

$$\frac{dV^2}{dt} = \frac{2}{w^2} \Sigma\left(\pi_1 + t(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0)\right)(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0),$$

$$\frac{d^2V^2}{dt^2} = \frac{2}{w^2} \Sigma(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0)^2.$$

Da die zweite Ableitung von V^2 nach t positiv ist, haben wir es nur mit einem Minimum der Geschwindigkeit zu tun, und dieses findet im Punkte des kürzesten Abstandes der Geraden von der Schraubungsachse statt. Wir wollen fortan diesen Punkt als den Nullpunkt der Geraden bezeichnen.

Wir fragen ferner nach der von den Translationsstrahlen der Punkte einer Geraden gebildeten Fläche.

Die Gleichungen des zu dem Punkt $(\xi_0 + t\alpha_0,\ \eta_0 + t\beta_0,\ \zeta_0 + t\gamma_0)$ gehörenden Translationsstrahls sind:

$$\xi = \xi_0 + t\alpha_0 + h\left(\pi_1 + t(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0)\right), \quad \text{usw.}$$

Betrachten wir hier t und h als veränderlich, so haben wir die Gleichungen der zu bestimmenden Fläche vor uns.

Ist die Gerade parallel der Schraubungsachse, so werden ξ, η, ζ lineare Funktionen von t und h. Unsere Fläche ist alsdann eine Ebene mit der Gleichung:

$$\Sigma(\xi - \xi_0)(\beta_0\pi_3 - \gamma_0\pi_2) = 0.$$

Für eine nicht zur Schraubungsachse parallele Gerade nimmt die Determinante der Koeffizienten von t, h, th in den obigen Gleichungen den Wert:

$$\Sigma\pi_1\{(p_3\alpha_0 - p_1\gamma_0)\gamma_0 - (p_1\beta_0 - p_2\alpha_0)\beta_0\}$$

oder:

$$\Sigma\alpha_0\pi_1\,\Sigma\alpha_0 p_1 - \Sigma p_1\pi_1$$

an. Da $\Sigma p_1\pi_1 = \Sigma p_1 q_1$, so besagt das Verschwinden der Determinante, daß wir es mit einem Translationsstrahl zu tun haben. In diesem Falle ist unsere Fläche wiederum eine Ebene. Ihre Gleichung besitzt die Form:

$$\Sigma(\xi - \xi_0)(\alpha_0\Sigma\alpha_0 p_1 - p_1) = 0.$$

Sie zeigt, daß die Normale der Ebene senkrecht zu dem kürzesten Abstand der Geraden von der Schraubungsachse ist; die Ebene selbst fällt also zusammen mit der zu dem Nullpunkte der Geraden gehörenden Schmiegungsebene der durch den Nullpunkt gehenden Schraubenlinie.

Wenn die gegebene Gerade weder der Schraubungsachse parallel ist, noch mit einem Translationsstrahl zusammenfällt, ersetzen wir den Punkt (ξ_0, η_0, ζ_0) durch den Nullpunkt $(\xi_{00}, \eta_{00}, \zeta_{00})$ der Geraden und vollziehen die Elimination von t und h aus den Gleichungen der Fläche, wie folgt. Es sei:

$$a_\xi = \frac{\alpha_0 + \tau p_1}{\sigma}, \qquad a_\eta = \frac{\beta_0 + \tau p_2}{\sigma}, \qquad a_\zeta = \frac{\gamma_0 + \tau p_3}{\sigma},$$

$$b_\xi = \frac{\alpha_0 + \tau_1 p_1}{\sigma_1}, \qquad b_\eta = \frac{\beta_0 + \tau_1 p_2}{\sigma_1}, \qquad b_\zeta = \frac{\gamma_0 + \tau_1 p_3}{\sigma_1},$$

$$c_\xi = \frac{p_2\gamma_0 - p_3\beta_0}{\sqrt{w^2 - (\Sigma\alpha_0 p_1)^2}}, \quad c_\eta = \frac{p_3\alpha_0 - p_1\gamma_0}{\sqrt{w^2 - (\Sigma\alpha_0 p_1)^2}}, \quad c_\zeta = \frac{p_1\beta_0 - p_2\alpha_0}{\sqrt{w^2 - (\Sigma\alpha_0 p_1)^2}},$$

$$\sigma = \sqrt{1 + 2\tau\Sigma\alpha_0 p_1 + \tau^2 w^2}, \quad \sigma_1 = \sqrt{1 + 2\tau_1\Sigma\alpha_0 p_1 + \tau_1^2 w^2},$$

$$1 + (\tau + \tau_1)\Sigma\alpha_0 p_1 + \tau\tau_1 w^2 = 0.$$

Hier bedeuten a_ξ, a_η, a_ζ; b_ξ, b_η, b_ζ; c_ξ, c_η, c_ζ die Richtungskosinus dreier zueinander senkrechter Richtungen, von denen die letzte sowohl zu der gegebenen Geraden wie zu der Schraubungsachse senkrecht ist. Da zwischen den Zahlen τ und τ_1 nur *eine* Beziehung angenommen wurde, liegt es in unserer Hand, noch eine zweite hinzuzufügen. Wir setzen:

$$\Sigma(\xi - \xi_{00})a_\xi = \xi', \quad \Sigma(\xi - \xi_{00})b_\xi = \eta', \quad \Sigma(\xi - \xi_{00})c_\xi = \zeta'.$$

Wenn in π_1, π_2, π_3 die Zahlen ξ_0, η_0, ζ_0 durch $\xi_{00}, \eta_{00}, \zeta_{00}$ ersetzt werden, möge ψ_1, ψ_2, ψ_3 entstehen, so daß:

$$\psi_1 = q_1 + p_2\zeta_{00} - p_3\eta_{00}, \quad \text{usw.}$$

Man hat dann die Beziehung:

$$\Sigma\psi_1(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0) = 0,$$

die aussagt, daß der Translationsstrahl des Nullpunktes der Geraden auf dem kürzesten Abstande der Geraden von der Schraubungsachse senkrecht steht. Da:

$$\xi - \xi_{00} = t\alpha_0 + h\left(\psi_1 + t(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0)\right) \quad \text{usw.,}$$

erhalten wir:

$$\xi' = \frac{1 + \tau\Sigma\alpha_0 p_1}{\sigma} t + \frac{\Sigma\alpha_0\psi_1 + \tau\Sigma p_1 q_1}{\sigma} h,$$

$$\eta' = \frac{1 + \tau_1\Sigma\alpha_0 p_1}{\sigma_1} t + \frac{\Sigma\alpha_0\psi_1 + \tau_1\Sigma p_1 q_1}{\sigma_1} h,$$

$$\zeta' = \sqrt{w^2 - (\Sigma\alpha_0 p_1)^2}\, ht.$$

Aus den ersten beiden dieser Gleichungen folgt:

$$t = \frac{\sigma(\Sigma\alpha_0\psi_1 + \tau_1\Sigma p_1 q_1)\xi' - \sigma_1(\Sigma\alpha_0\psi_1 + \tau\Sigma p_1 q_1)\eta'}{(\tau - \tau_1)(\Sigma\alpha_0 p_1\Sigma\alpha_0\psi_1 - \Sigma p_1 q_1)},$$

$$h = \frac{-\sigma(1 + \tau_1\Sigma\alpha_0 p_1)\xi' + \sigma_1(1 + \tau\Sigma\alpha_0 p_1)\eta'}{(\tau - \tau_1)(\Sigma\alpha_0 p_1\Sigma\alpha_0\psi_1 - \Sigma p_1 q_1)}.$$

Unterwerfen wir die Zahlen τ und τ_1 der weiteren Bedingung:

$$(1+\tau\Sigma\alpha_0 p_1)(\Sigma\alpha_0\psi_1+\tau_1\Sigma p_1 q_1)+(1+\tau_1\Sigma\alpha_0 p_1)(\Sigma\alpha_0\psi_1+\tau\Sigma p_1 q_1)=0,$$

so erhalten wir die Flächengleichung in der Form:

$$\zeta'=\frac{-\sqrt{w^2-(\Sigma\alpha_0 p_1)^2}}{(\tau-\tau_1)^2(\Sigma\alpha_0 p_1\Sigma\alpha_0\psi_1-\Sigma p_1 q_1)^2}\Big\{\sigma^2(1+\tau_1\Sigma\alpha_0 p_1)(\Sigma\alpha_0\psi_1+\tau_1\Sigma p_1 q_1)\xi'^2$$
$$+\sigma_1^2(1+\tau\Sigma\alpha_0 p_1)(\Sigma\alpha_0\psi_1+\tau\Sigma p_1 q_1)\eta'^2\Big\}.$$

Unsere Fläche ist also ein hyperbolisches Paraboloid. Der Scheitelpunkt desselben fällt mit dem Nullpunkte der Geraden zusammen. Längs der Geraden ist:

$$\xi':\eta'=\frac{1+\tau\Sigma\alpha_0 p_1}{\sigma}:\frac{1+\tau_1\Sigma\alpha_0 p_1}{\sigma_1},\quad \zeta'=0;$$

längs des Translationsstrahls des Nullpunktes ist:

$$\xi':\eta'=\frac{\Sigma\alpha_0\psi_1+\tau\Sigma p_1 q_1}{\sigma}:\frac{\Sigma\alpha_0\psi_1+\tau_1\Sigma p_1 q_1}{\sigma_1},\quad \zeta'=0;$$

somit fallen die sich im Nullpunkte schneidenden Erzeugenden des Paraboloids mit der Geraden und dem Translationsstrahl ihres Nullpunktes zusammen.

Man hat:

$$\tau\sigma_1^2=\tau+2\tau\tau_1\Sigma\alpha_0 p_1-\tau_1\big(1+(\tau+\tau_1)\Sigma\alpha_0 p_1\big)=(\tau-\tau_1)(1+\tau_1\Sigma\alpha_0 p_1),$$

$$\tau_1\sigma^2=-(\tau-\tau_1)(1+\tau\Sigma\alpha_0 p_1).$$

Die Gleichung unseres Paraboloids läßt sich daher auch in der Form:

$$\zeta'=\frac{-\sigma^2\sigma_1^2\sqrt{w^2-(\Sigma\alpha_0 p_1)^2}}{(\tau-\tau_1)^2(\Sigma\alpha_0 p_1\Sigma\alpha_0\psi_1-\Sigma p_1 q_1)^2}\Big\{\tau(\Sigma\alpha_0\psi_1+\tau_1\Sigma p_1 q_1)\xi'^2$$
$$-\tau_1(\Sigma\alpha_0\psi_1+\tau\Sigma p_1 q_1)\eta'^2\Big\}$$

schreiben. Sobald $\Sigma\alpha_0\psi_1$ gleich Null ist, erhalten wir ein gleichseitiges Paraboloid, da die Koeffizienten von ξ'^2 und η'^2 entgegengesetzt gleich werden. Die Beziehung $\Sigma\alpha_0\psi_1=0$ bedeutet geometrisch, daß die gegebene Gerade auf dem Translationsstrahl ihres Nullpunktes senkrecht steht. Weitere Bedeutungen dieser Beziehung werden wir im nächsten Paragraphen kennen lernen.

Für eine Hauptnormale einer Schraubenlinie ist $\Sigma\alpha_0 p_1$ gleich Null, und da ihr kürzester Abstand von der Schraubungsachse verschwindet, auch $\Sigma\alpha_0\pi_1$ gleich Null. Man hat aber:

$$\Sigma\alpha_0\pi_1=\Sigma\alpha_0\psi_1.$$

In diesem Falle ist:

$$1 + \tau\tau_1 w^2 = 0, \text{ und } \quad \tau_1 + \tau_1 = 0,$$

daher:

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 = 2.$$

Die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_\xi & a_\eta & a_\zeta \\ b_\xi & b_\eta & b_\zeta \\ c_\xi & c_\eta & c_\zeta \end{vmatrix}$$

soll den Wert Eins besitzen. Dann folgt allgemein:

$$\tau - \tau_1 = \frac{\sigma\sigma_1}{\sqrt{w^2 - (\Sigma\alpha_0 p_1)^2}},$$

und in unserem Fall:

$$\tau - \tau_1 = \frac{2}{w}.$$

Damit erhält die Gleichung des zu einer Hauptnormale gehörenden Paraboloids die Form:

$$\zeta' = \frac{1}{2k}(\xi'^2 - \eta'^2).$$

§ 33. Der lineare Komplex von Geraden.

Unter welcher Bedingung ist eine Gerade, die weder die Schraubungsachse schneidet, noch ihr parallel liegt, der Binormalstrahl eines ihrer Punkte?

Wenn wir die Gerade wieder als durch die Gleichungen:

$$\xi = \xi_0 + t\alpha_0, \quad \text{usw.}$$

gegeben annehmen, so müssen die Beziehungen:

$$r_\xi \Sigma\left(r_\eta(\zeta - \zeta_1) - r_\zeta(\eta - \eta_1)\right)^2 - k\left(r_\eta(\zeta - \zeta_1) - r_\zeta(\eta - \eta_1)\right) = p\alpha_0, \quad \text{usw.}$$

bestehen, wo p einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Multipliziert man diese Beziehungen der Reihe nach mit r_ξ, r_η, r_ζ, dann mit $\xi - \xi_1$, $\eta - \eta_1$, $\zeta - \zeta_1$, dann mit $r_\eta(\zeta - \zeta_1) - r_\zeta(\eta - \eta_1)$, usw. und addiert sie jedesmal, so ergibt sich:

$$\Sigma\left(r_\eta(\zeta - \zeta_1) - r_\zeta(\eta - \eta_1)\right)^2 = p\Sigma\alpha_0 r_\xi,$$

$$\Sigma(\xi - \xi_1)r_\xi \cdot \Sigma\left(r_\eta(\zeta - \zeta_1) - r_\zeta(\eta - \eta_1)\right)^2 = p\Sigma\alpha_0(\xi - \xi_1),$$

$$-k\Sigma\left(r_\eta(\zeta - \zeta_1) - r_\zeta(\eta - \eta_1)\right)^2 = p\Sigma\alpha_0\left(r_\eta(\zeta - \zeta_1) - r_\zeta(\eta - \eta_1)\right),$$

folglich:

$$\Sigma\alpha_0\left(kr_\xi + r_\eta(\zeta - \zeta_1) - r_\zeta(\eta - \eta_1)\right) = 0$$

und:

$$\Sigma(\xi - \xi_1)r_\xi \cdot \Sigma\alpha_0 r_\xi - \Sigma\alpha_0(\xi - \xi_1) = 0.$$

Die erste dieser Bedingungen sagt aus, daß die Gerade zu den Translationsstrahlen aller ihrer Punkte senkrecht sein muß. Da sich die Bedingung aber, wenn man ξ, η, ζ durch $\xi_0 + t\alpha_0$, usw. ersetzt, von t frei erweist, indem sie die Form:

$$\Sigma \alpha_0 \pi_1 = 0$$

annimmt, so lehrt sie weiter, daß, wenn die Gerade auf dem Translationsstrahl eines ihrer Punkte senkrecht steht, sie zu den Translationsstrahlen aller ihrer Punkte senkrecht ist, oder mit anderen Worten, daß sie eine Normale aller durch sie hindurchgehenden Schraubenlinien ist.

Die zweite dieser Bedingungen wird durch den Wert:

$$\frac{\Sigma(\xi_1 - \xi_0)(\alpha_0 - r_\xi \Sigma \alpha_0 r_\xi)}{1 - (\Sigma \alpha_0 r_\xi)^2}$$

von t erfüllt. Dieser Wert gehört aber nach § 32 S. 332 zu dem Nullpunkte der Geraden. Wir haben daher den Satz, daß jede weder die Schraubungsachse schneidende noch ihr parallele Gerade, deren Bestimmungsstücke der Gleichung:

$$\Sigma \alpha_0 \pi_1 = 0$$

genügen, der Binormalstrahl ihres Nullpunktes ist.

Die Gesamtheit der Binormalen unserer Schraubenlinien nennen wir einen linearen Komplex von Geraden.

Der Grund dieser Benennung beruht auf folgender Erwägung.

Schreiben wir unsere Bedingung in der Form:

$$q_1\alpha_0 + q_2\beta_0 + q_3\gamma_0 + p_1(\gamma_0\eta_0 - \beta_0\zeta_0) + p_2(\alpha_0\zeta_0 - \gamma_0\xi_0) + p_3(\beta_0\xi_0 - \alpha_0\eta_0) = 0,$$

so stellt sie eine lineare homogene Gleichung zwischen den sechs Zahlen:

$$\alpha_0, \quad \beta_0, \quad \gamma_0, \quad \gamma_0\eta_0 - \beta_0\zeta_0, \quad \alpha_0\zeta_0 - \gamma_0\xi_0, \quad \beta_0\xi_0 - \alpha_0\eta_0$$

dar. Diese Zahlen oder solche, die ihnen proportional sind, sieht J. Plücker (Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig 1868) als die Koordinaten einer Geraden an. Jede homogene Gleichung zwischen diesen Koordinaten ist für Plücker die Gleichung eines Linienkomplexes, und zwar je nach ihrem Grade die eines linearen, quadratischen, kubischen Komplexes, usf. Die Tangenten unserer Schraubenlinien bilden hiernach einen quadratischen Komplex, da die Bedingung für einen Translationsstrahl sich in der Gestalt:

$$\Sigma \alpha_0 p_1 \cdot \Sigma \alpha_0 \pi_1 - \Sigma p_1 q_1 \cdot \Sigma \alpha_0^2 = 0$$

schreiben läßt.

Liegt eine Gleichung von der Form:

$$A\alpha_0 + B\beta_0 + C\gamma_0 + D(\gamma_0\eta_0 - \beta_0\zeta_0) + E(\alpha_0\zeta_0 - \gamma_0\xi_0) + F(\beta_0\xi_0 - \alpha_0\eta_0) = 0$$

vor, in der weder die Koeffizienten D, E, F zugleich verschwinden, noch der Ausdruck:

$$AD + BE + CF$$

den Wert Null besitzt, so fallen die durch die Gleichung bestimmten Geraden mit den Binormalen oder, wie wir nach dem Obigen auch sagen können, mit den Normalen aller Schraubenlinien zusammen, die durch eine Schraubenbewegung entstehen, deren Achse durch die Gleichungen:

$$r_\xi = \frac{D}{\sqrt{D^2+E^2+F^2}}, \quad r_\eta = \frac{E}{\sqrt{D^2+E^2+F^2}}, \quad r_\zeta = \frac{F}{\sqrt{D^2+E^2+F^2}},$$

$$\xi_1 = \frac{EC-BF}{D^2+E^2+F^2}, \quad \eta_1 = \frac{FA-CD}{D^2+E^2+F^2}, \quad \zeta_1 = \frac{DB-AE}{D^2+E^2+F^2},$$

deren Parameter durch die Gleichung:

$$k = \frac{AD+BE+CF}{D^2+E^2+F^2}$$

bestimmt wird.

Verschwindet der Ausdruck $AD + BE + CF$, so nennt Plücker den Komplex einen speziellen. Hier ist für jede Gerade der kürzeste Abstand e (§ 32 S. 333) gleich Null; der Komplex besteht also aus allen Treffgeraden der Achse.

Die Plückersche Theorie ist entweder ein Beispiel dafür, daß rein formale Überlegungen zu wichtigen geometrischen Begriffsbildungen führen können, oder sie ist, erst nachdem sich ihr Urheber auf anderem Wege von der Bedeutung des Komplexbegriffes überzeugt hat, unter dem Vorbilde der gewöhnlichen Theorie der Ebene und der Flächen zweiten Grades aufgestellt.

Plücker faßt (a. a. O. S. 57) die Geraden eines linearen Komplexes als Tangenten von Schraubenlinien auf. Dies ist aber unzweckmäßig, weil diese Schraubenlinien nicht einer, sondern unendlich vielen Schraubenbewegungen ihr Dasein verdanken, indem die Parameter der letzteren sich mit den die Schraubenlinien enthaltenden Kreiszylindern ändern.

Ersetzen wir nämlich die Zahlen q_1, q_2, q_3 durch die Zahlen:

$$q_1' = q_1 - \frac{kp_1}{\sin^2\psi}, \quad q_2' = q_2 - \frac{kp_2}{\sin^2\psi}, \quad q_3' = q_3 - \frac{kp_3}{\sin^2\psi},$$

wo:

$$\cos\psi = \Sigma\alpha_0 r_\xi, \quad \sin\psi = \sqrt{1-(\Sigma\alpha_0 r_\xi)^2},$$

so ändern sich die Ausdrücke ξ_1, η_1, ζ_1 nicht, während statt k der Wert:

$$k' = -k\,\mathrm{cotg}^2\psi$$

auftritt. Die Bedingung für einen Translationsstrahl nimmt die Form an:

$$\Sigma\alpha_0 p_1 \cdot \Sigma\alpha_0 \pi_1 - \frac{k}{\sin^2\psi}(\Sigma\alpha_0 p_1)^2 - w^2 k + \frac{w^2 k}{\sin^2\psi} = 0$$

oder:

$$\Sigma\alpha_0 p_1 \cdot \Sigma\alpha_0 \pi_1 = 0;$$

sie ist also für eine Komplexgerade erfüllt, d. h. eine solche Gerade ist ein Translationsstrahl bei einer Schraubenbewegung, die sich nur durch den Parameter von der bisher betrachteten unterscheidet. Für eine Komplexgerade hat man:

$$e = k \operatorname{cotg} \psi,$$

daher:

$$k' = -\frac{e^2}{k}.$$

Der kürzeste Abstand e ist aber der Halbmesser der Querschnitte des Kreiszylinders, auf dem alle Schraubenlinien liegen, bei denen ψ denselben Wert besitzt, somit ändert sich der Parameter k' mit diesen Kreiszylindern.

§ 34. Konjugierte Gerade.

Wir legen durch die Punkte einer gegebenen Geraden Ebenen, die zu den Translationsstrahlen der Punkte senkrecht sind, und fragen nach dem Umhüllungsgebilde dieser Ebenen.

Ist die Gerade parallel der Schraubungsachse, so liegt eine Schar paralleler Ebenen vor.

Ist die Gerade ein Komplexstrahl, so enthalten die Ebenen sämtlich den Strahl selbst; sie bilden also einen Büschel, dessen Achse die Gerade ist.

Wir schließen diese beiden Fälle aus und erhalten als Gleichung der Ebenenschar die folgende:

$$\Sigma(\xi - \xi_0 - t\alpha_0)\left(\pi_1 + t(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0)\right) = 0,$$

oder:

$$\Sigma(\xi - \xi_0)\pi_1 + t\{\Sigma(\xi - \xi_0)(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0) - \Sigma\alpha_0\pi_1\} = 0.$$

Die Ebenenschar bildet daher einen Ebenenbüschel. Die Achse des letzteren ist die Schnittlinie der beiden Ebenen mit den Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \Sigma(\xi - \xi_0)\pi_1 = 0, \\ \Sigma(\xi - \xi_0)(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0) = \Sigma\alpha_0\pi_1. \end{cases}$$

Diese Schnittlinie nennt man die der gegebenen Geraden in bezug auf den Komplex konjugierte Gerade.

Die Richtungskosinus der konjugierten Geraden sollen mit α_0', β_0', γ_0' bezeichnet werden. Sie sind proportional den Zahlen:

$$\pi_2(p_1\beta_0 - p_2\alpha_0) - \pi_3(p_3\alpha_0 - p_1\gamma_0), \quad \text{usw.},$$

die sich nicht ändern, wenn wir statt ξ_0, η_0, ζ_0 die Koordinaten ξ_{00}, η_{00}, ζ_{00} des Punktes kürzesten Abstandes der gegebenen Geraden von der Schraubungsachse setzen. Da:

$$\Sigma\psi_1(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0) = 0,$$

so erhalten wir:

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha_0' = \dfrac{p_1\Sigma\alpha_0\pi_1 - \alpha_0\Sigma p_1 q_1}{\sqrt{\Sigma\psi_1^2\cdot(w^2-(\Sigma\alpha_0 p_1)^2)}}, \quad \beta_0' = \dfrac{p_2\Sigma\alpha_0\pi_1 - \beta_0\Sigma p_1 q_1}{\sqrt{\Sigma\psi_1^2\cdot(w^2-(\Sigma\alpha_0 p_1)^2)}}, \\ \gamma_0' = \dfrac{p_3\Sigma\alpha_0\pi_1 - \gamma_0\Sigma p_1 q_1}{\sqrt{\Sigma\psi_1^2\cdot(w^2-(\Sigma\alpha_0 p_1)^2)}}. \end{cases}$$

Ist die gegebene Gerade ein Translationsstrahl, so steht ihre Konjugierte auf ihr senkrecht.

Der Punkt kürzesten Abstandes der konjugierten Geraden von der Schraubungsachse besitze die Koordinaten ξ_{00}', η_{00}', ζ_{00}'. Dann ist:

$$\Sigma(q_1 + p_2\zeta_{00}' - p_3\eta_{00}')(p_2\gamma_0' - p_3\beta_0') = 0.$$

Aber:

$$p_2\gamma_0' - p_3\beta_0' = -\frac{\Sigma p_1 q_1}{\sqrt{\Sigma\psi_1^2\cdot(w^2-(\Sigma\alpha_0 p_1)^2)}}(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0),$$

somit:

$$\Sigma(q_1 + p_2\zeta_{00}' - p_3\eta_{00}')(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0) = 0.$$

Da auch:

$$\Sigma(q_1 + p_2\zeta_{00} - p_3\eta_{00})(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0) = 0,$$

so ergibt sich:

$$\Sigma\big((\zeta_{00}' - \zeta_{00})p_2 - (\eta_{00}' - \eta_{00})p_3\big)(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0) = 0$$

oder:

$$\Sigma(\xi_{00}' - \xi_{00})(\alpha_0 w^2 - p_1\Sigma\alpha_0 p_1) = 0.$$

Außer dieser Gleichung dienen zur Berechnung von ξ_{00}', η_{00}', ζ_{00}' nach (1) die folgenden Gleichungen:

$$\Sigma(\xi_{00}' - \xi_{00})\psi_1 = 0,$$
$$\Sigma(\xi_{00}' - \xi_{00})(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0) = \Sigma\alpha_0\pi_1.$$

Um die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 w^2 - p_1\Sigma\alpha_0 p_1 & \beta_0 w^2 - p_2\Sigma\alpha_0 p_1 & \gamma_0 w^2 - p_3\Sigma\alpha_0 p_1 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ p_2\gamma_0 - p_3\beta_0 & p_3\alpha_0 - p_1\gamma_0 & p_1\beta_0 - p_2\alpha_0 \end{vmatrix}$$

zu bestimmen, berechnen wir die Adjunkte des ersten Elements der dritten Zeile der Determinante. Man hat:

$$\begin{aligned}(\beta_0 w^2 - p_2\Sigma\alpha_0 p_1)\psi_3 - (\gamma_0 w^2 - p_3\Sigma\alpha_0 p_1)\psi_2 \\ = (\beta_0\psi_3 - \gamma_0\psi_2)\Sigma p_1^2 - (p_2\psi_3 - p_3\psi_2)\Sigma\alpha_0 p_1 \\ = p_1\{p_1(\beta_0\psi_3 - \gamma_0\psi_2) - \alpha_0(p_2\psi_3 - p_3\psi_2)\} - (p_2\psi_2 + p_3\psi_3)(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0).\end{aligned}$$

Auf Grund der Bedingung:

$$\Sigma\psi_1(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0) = 0$$

wird der Faktor von p_1 gleich $-\psi_1(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0)$, und die Adjunkte gewinnt die Form:

$$-\Sigma p_1 q_1 \cdot (p_2\gamma_0 - p_3\beta_0).$$

Die Determinante wird daher gleich:

$$-\Sigma p_1\pi_1 \cdot (w^2 - (\Sigma\alpha_0 p_1)^2),$$

und wir erhalten:

$$\xi'_{00} = \xi_{00} + \frac{\Sigma\alpha_0\pi_1}{w^2 - (\Sigma\alpha_0 p_1)^2}(p_2\gamma_0 - p_3\beta_0), \quad \text{usw.}$$

Dies zeigt, daß der Punkt $(\xi'_{00}, \eta'_{00}, \zeta'_{00})$ in derjenigen Geraden liegt, welche den kürzesten Abstand der gegebenen Geraden von der Schraubungsachse enthält.

Der senkrechte Abstand (e') des Punktes $(\xi'_{00}, \eta'_{00}, \zeta'_{00})$ von der Schraubungsachse ergibt sich gleich:

$$e + \frac{\Sigma\alpha_0\pi_1}{\sqrt{w^2 - (\Sigma\alpha_0 p_1)^2}},$$

d. h.

$$e' = k \operatorname{cotg}\psi.$$

Um dies Ergebnis geometrisch zu deuten, denken wir die Gerade (L), welche sowohl die Schraubenachse wie die gegebene Gerade $(\xi_{00}, \eta_{00}, \zeta_{00}; \alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ senkrecht schneidet, konstruiert. Ihre Gleichungen sind:

$$\xi = \xi_{00} + h\frac{p_2\gamma_0 - p_3\beta_0}{\sqrt{w^2 - (\Sigma\alpha_0 p_1)^2}}, \quad \text{usw.}$$

Bewegen wir nun die gegebene Gerade so, daß sie sich parallel bleibt, während der Punkt $(\xi_{00}, \eta_{00}, \zeta_{00})$ die Gerade (L) beschreibt, so dreht sich die konjugierte Gerade um den Punkt $(\xi'_{00}, \eta'_{00}, \zeta'_{00})$ auf der Geraden (L) und beschreibt die in diesem Punkte auf der Geraden (L) senkrechte Ebene.

Wir zeigen endlich, daß jede Gerade die Konjugierte ihrer Konjugierten ist.

Die Richtungskosinus der der Geraden $(\xi'_{00}, \eta'_{00}, \zeta'_{00}; \alpha_0', \beta_0', \gamma_0')$ konjugierten Geraden seien $\alpha_0'', \beta_0'', \gamma_0''$; die Koordinaten des Punktes kürzesten Abstandes der letzteren Geraden von der Schraubungsachse seien $\xi''_{00}, \eta''_{00}, \zeta''_{00}$, und zudem werde:

$$\psi_1' = q_1 + p_2\zeta'_{00} - p_3\eta'_{00}, \quad \psi_2' = q_2 + p_3\xi'_{00} - p_1\zeta'_{00}, \quad \psi_3' = q_3 + p_1\eta'_{00} - p_2\xi'_{00}$$

gesetzt. Man erhält dann:

$$\psi_1' = \psi_1 + \frac{\Sigma\alpha_0\pi_1}{w^2 - (\Sigma\alpha_0 p_1)^2}(p_1\Sigma\alpha_0 p_1 - \alpha_0 w^2), \quad \text{usw.}$$

Hieraus folgt:

$$\Sigma p_1 \psi_1' = \Sigma p_1 \pi_1, \quad \Sigma \alpha_0 \psi_1' = 0, \quad \Sigma \alpha_0' \psi_1' = \frac{\Sigma p_1 q_1 \, \Sigma \alpha_0 \pi_1}{\sqrt{\Sigma \psi_1^2 \cdot (w^2 - (\Sigma \alpha_0 p_1)^2)}}.$$

Für den Zähler von α_0'' ergibt sich:

$$p_1 \Sigma \alpha_0' \psi_1' - \alpha_0' \Sigma p_1 q_1 = \alpha_0 \frac{(\Sigma p_1 q_1)^2}{\sqrt{\Sigma \psi_1^2 \cdot (w^2 - (\Sigma \alpha_0 p_1)^2)}},$$

so daß:

$$\alpha_0'' = \alpha_0, \quad \beta_0'' = \beta_0, \quad \gamma_0'' = \gamma_0.$$

Ferner ist:

$$\xi_{00}'' = \xi_{00}' + \frac{\Sigma \alpha_0' \psi_1'}{w^2 - (\Sigma \alpha_0' p_1)^2} (p_2 \gamma_0' - p_3 \beta_0').$$

Aber:

$$p_2 \gamma_0' - p_3 \beta_0' = \frac{- \Sigma p_1 q_1 \cdot (p_2 \gamma_0 - p_3 \beta_0)}{\sqrt{\Sigma \psi_1^2 \cdot (w^2 - (\Sigma \alpha_0 p_1)^2)}},$$

$$w^2 - (\Sigma \alpha_0' p_1)^2 = \Sigma (p_2 \gamma_0' - p_3 \beta_0')^2 = \frac{(\Sigma p_1 q_1)^2}{\Sigma \psi_1^2},$$

womit folgt:

$$\xi_{00}'' = \xi_{00}' - \frac{\Sigma \alpha_0 p_1 \cdot (p_2 \gamma_0 - p_3 \beta_0)}{w^2 - (\Sigma \alpha_0 p_1)^2} = \xi_{00}, \quad \eta_{00}'' = \eta_{00}, \quad \zeta_{00}'' = \zeta_{00},$$

so daß unsere Behauptung erwiesen ist.

§ 35. Anwendung des Vorigen auf die im § 29 betrachteten Schraubenbewegungen.

Wir haben im § 29 drei Mannigfaltigkeiten von Schraubenbewegungen betrachtet, und jede derselben umfaßte einfach unendlich viele Schraubenbewegungen. Es liegt nahe, die Rolle zu untersuchen, welche die einem gewöhnlichen Kurvenpunkte zugehörigen Geraden, nämlich die Tangente, die Haupt- und Binormale, die rektifizierende Kante und die Krümmungsachse, bei allen diesen Schraubenbewegungen spielen. Dabei wollen wir die Berechnung der unter Umständen auftretenden Paraboloide nicht durchführen, da sie für unsere Zwecke zu verwickelt erscheint.

Die Richtungskosinus der ξ, η, ζ-Achsen hinsichtlich des x, y, z-Systems wurden im § 28 mit $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$; l_x, l_y, l_z; $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ bezeichnet. Ein Punkt, der im ξ, η, ζ-System die Koordinaten ξ, η, ζ besitzt, möge im x, y, z-System die Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ besitzen, ebenso mögen die Richtungskosinus einer Geraden im x, y, z-System mit $\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0, \bar{\gamma}_0$ bezeichnet werden, wenn sie im ξ, η, ζ-System mit $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ bezeichnet sind. Es bestehen dann die Beziehungen:

$$\bar{x} = x + \alpha_x \xi + l_x \eta + \lambda_x \zeta, \quad \text{usw.},$$

$$\bar{\alpha}_0 = \alpha_x \alpha_0 + l_x \beta_0 + \lambda_x \gamma_0, \quad \text{usw.}$$

I. In dem Falle, in welchem das ξ, η, ζ-System aus der Kurventangente und zwei Normalen der Kurve bestand, hatten wir:

$$\alpha_x = \alpha, \quad l_x = l \cos\varphi + \lambda \sin\varphi, \quad \lambda_x = \lambda \cos\varphi - l \sin\varphi,$$
$$p_1 = \frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}, \quad p_2 = \frac{\sin\varphi}{\varrho}, \quad p_3 = \frac{\cos\varphi}{\varrho},$$
$$q_1 = 1, \qquad q_2 = 0, \qquad q_3 = 0.$$

Für die Tangente der Kurve ist:

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = 0; \quad \alpha_0 = 1, \quad \beta_0 = 0, \quad \gamma_0 = 0,$$

folglich:

$$\Sigma \alpha_0 \pi_1 = 1, \quad \Sigma \alpha_0 p_1 = \frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r} = \Sigma p_1 q_1.$$

Die Tangente ist daher ein Translationsstrahl bei allen unseren Schraubenbewegungen.

Die von den Translationsstrahlen der Punkte der Tangente bestrichene Ebene hat die Gleichung:

$$\eta \sin\varphi + \zeta \cos\varphi = 0.$$

Da:

$$\eta = \Sigma(\bar{x} - x)(l \cos\varphi + \lambda \sin\varphi),$$
$$\zeta = \Sigma(\bar{x} - x)(-l \sin\varphi + \lambda \cos\varphi),$$

so wird:

$$\eta \sin\varphi + \zeta \cos\varphi = \Sigma(\bar{x} - x)\lambda.$$

Die in Rede stehende Ebene fällt also bei allen Schraubenbewegungen mit der Schmiegungsebene der Kurve zusammen.

Für die Konjugierte der Tangente erhalten wir:

$$\alpha_0' = 0, \quad \beta_0' = \sin\varphi, \quad \gamma_0' = \cos\varphi,$$

folglich:

$$\bar{\alpha}_0' = \lambda, \quad \bar{\beta}_0' = \mu, \quad \bar{\gamma}_0' = \nu.$$

Da:

$$\xi_{00} = 0, \quad \eta_{00} = 0, \quad \zeta_{00} = 0,$$

so folgt:

$$\xi_{00}' = 0, \quad \eta_{00}' = \varrho \cos\varphi, \quad \zeta_{00}' = -\varrho \sin\varphi$$

und:

$$\bar{x}_{00}' = x + \varrho l.$$

Die Konjugierte der Tangente fällt daher bei allen Schraubenbewegungen mit der Krümmungsachse zusammen.

Die Krümmungsachse besitzt im x, y, z-System die Gleichungen:

$$\bar{x} = x + \varrho l + h\lambda, \quad \text{usw.},$$

wo h den veränderlichen Parameter bezeichnet. Im ξ, η, ζ-System besitzt sie die Gleichungen:

$$\xi = \Sigma(\varrho l + h\lambda)\alpha,$$
$$\eta = \Sigma(\varrho l + h\lambda)(l\cos\varphi + \lambda\sin\varphi),$$
$$\zeta = \Sigma(\varrho l + h\lambda)(-l\sin\varphi + \lambda\cos\varphi),$$

somit:

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = \varrho\cos\varphi, \quad \zeta_0 = -\varrho\sin\varphi,$$
$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = \sin\varphi, \quad \gamma_0 = \cos\varphi,$$
$$\Sigma\alpha_0\pi_1 = \varrho\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\right), \quad \Sigma\alpha_0 p_1 = \frac{1}{\varrho},$$

also:

$$\Sigma\alpha_0\pi_1\,\Sigma\alpha_0 p_1 - \Sigma p_1 q_1 = 0.$$

Die Krümmungsachse ist daher bei allen Schraubenbewegungen ein Translationsstrahl.

Die Gleichung der von den Translationsstrahlen der Punkte der Krümmungsachse bestrichenen Ebene ist $\xi = 0$, sie fällt daher mit der Normalebene der Kurve zusammen.

Die rektifizierende Kante hat im x, y, z-System die Gleichungen:

$$\bar{x} = x + h\frac{\frac{1}{\varrho}\lambda - \frac{1}{r}\alpha}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}}, \quad \text{usw.},$$

im ξ, η, ζ-System hat sie die Gleichungen:

$$\xi = h\frac{-\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}}, \quad \eta = h\frac{\frac{\sin\varphi}{\varrho}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}}, \quad \zeta = h\frac{\frac{\cos\varphi}{\varrho}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}},$$

somit:

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = 0,$$

$$\alpha_0 = \frac{-\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}}, \quad \beta_0 = \frac{\frac{\sin\varphi}{\varrho}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}}, \quad \gamma_0 = \frac{\frac{\cos\varphi}{\varrho}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}},$$

$$\pi_1 = 1, \quad \pi_2 = 0, \quad \pi_3 = 0, \quad \Sigma\alpha_0 p_1 = \frac{-\frac{1}{r}\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{\varrho^2}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}}.$$

Die rektifizierende Kante ist daher bei keiner Schraubenbewegung ein Komplexstrahl.

Die Gleichung:

$$\Sigma\alpha_0 p_1\,\Sigma\alpha_0\pi_1 - \Sigma p_1 q_1 = -\frac{\frac{d\varphi}{ds}}{\varrho^2\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}\right)}$$

zeigt, daß die rektifizierende Kante auch bei keiner Schraubenbewegung ein Translationsstrahl ist; denn für $\varphi = \text{const.}$ wird die rektifizierende Kante der Schraubungsachse parallel, und die Parallelen zur Schraubungsachse haben wir nicht zu den Translationsstrahlen gerechnet.

Um die Konjugierte der rektifizierenden Kante bei einer Schraubenbewegung zu bestimmen, bemerken wir zunächst, daß:

$$\xi_{00} = \eta_{00} = \zeta_{00} = 0.$$

Man erhält ferner:

$$\alpha_0' = 0, \quad \beta_0' = \sin\varphi, \quad \gamma_0' = \cos\varphi.$$

Da:

$$w^2 = \left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2},$$

so ergibt sich:

$$w^2 - (\Sigma\alpha_0 p_1)^2 = \frac{\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}},$$

und weiter:

$$\xi_{00}' = 0, \quad \eta_{00}' = \frac{\varrho\cos\varphi}{r\frac{d\varphi}{ds}}, \quad \zeta_{00}' = -\frac{\varrho\sin\varphi}{r\frac{d\varphi}{ds}},$$

also im x, y, z-System:

$$\bar{\alpha}_0' = \lambda, \quad x_{00}' = x + \frac{\varrho}{r\frac{d\varphi}{ds}}\,l.$$

Die Konjugierten der rektifizierenden Kante sind daher der Binormale parallel und liegen in der Normalebene.

Zu jeder unserer Schraubenbewegungen gehört ein linearer Komplex. Die Gleichung eines solchen ist:

$$\alpha_0 + \frac{\sin\varphi}{\varrho}(\alpha_0\zeta_0 - \gamma_0\xi_0) + \frac{\cos\varphi}{\varrho}(\beta_0\xi_0 - \alpha_0\eta_0) + \left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\right)(\gamma_0\eta_0 - \beta_0\zeta_0) = 0.$$

Hierin spielt die mit den einzelnen Schraubenbewegungen veränderliche Zahl $\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}$ die Rolle eines linear auftretenden Parameters. Man kann daher mit Plücker die vorstehende Gleichung als die einer linearen Schar von Komplexen auffassen.

Die allen diesen Komplexen gemeinsamen Geraden fallen zusammen mit den Geraden, welche den beiden, durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_0 + \frac{\sin\varphi}{\varrho}(\alpha_0\zeta_0 - \gamma_0\xi_0) + \frac{\cos\varphi}{\varrho}(\beta_0\xi_0 - \alpha_0\eta_0) = 0, \\ \gamma_0\eta_0 - \beta_0\zeta_0 = 0 \end{cases}$$

dargestellten Komplexen zugleich angehören.

Für den ersten dieser Komplexe ist in den Bezeichnungen des § 33 S. 339:

$$A = 1,\quad B = 0,\quad C = 0,\quad D = 0,\quad E = \frac{\sin\varphi}{\varrho},\quad F = \frac{\cos\varphi}{\varrho}.$$

Der Komplex ist also ein spezieller. Seine Achse wird bestimmt durch die Gleichungen:

$$r_\xi = 0,\quad r_\eta = \sin\varphi,\quad r_\zeta = \cos\varphi,$$
$$\xi_1 = 0,\quad \eta_1 = \varrho\cos\varphi,\quad \zeta_1 = -\varrho\sin\varphi,$$

oder im x, y, z-System:

$$r_x = \lambda,\qquad r_y = \mu,\qquad r_z = \nu,$$
$$\bar{x}_1 = x + \varrho l,\quad \bar{y}_1 = y + \varrho m,\quad \bar{z}_1 = z + \varrho n.$$

Die Achse fällt also mit der Krümmungsachse zusammen.

Der zweite Komplex ist ebenfalls ein spezieller und seine Achse wird von der Tangente der Kurve gebildet.

Die allen Komplexen der linearen Schar gemeinsamen Geraden schneiden sowohl die Tangente wie die Krümmungsachse. Sie bilden also eine doppelt unendliche Schar von Geraden. Eine solche nennt man nach Plücker eine Linienkongruenz, nach E. E. Kummer ein Strahlensystem.

Im besonderen gehören die durch den betrachteten Kurvenpunkt gehenden Normalen der Kurve allen Komplexen der Schar an.

Der Satz, daß das betrachtete Strahlensystem aus den Schnittgeraden der Tangente und der Krümmungsachse besteht, kann auch folgendermaßen bewiesen werden. Eine Gerade, deren Bestimmungsstücke der Gleichung:

$$\gamma_0\eta_0 - \beta_0\zeta_0 = 0$$

genügen, ist entweder der ξ-Achse parallel ($\gamma_0 = \beta_0 = 0$) oder sie schneidet die ξ-Achse, d. h. die Tangente. Die erste der Gleichungen (1) ergibt für $\gamma_0 = \beta_0 = 0$:

$$\varrho + \zeta_0\sin\varphi - \eta_0\cos\varphi = 0,$$

oder im x, y, z-System:

$$\Sigma(\bar{x}_0 - x)\,l - \varrho = 0.$$

Der Punkt (ξ_0, η_0, ζ_0) muß sich also in einer Ebene befinden, die die Krümmungsachse enthält und zur rektifizierenden Ebene parallel ist. Die in dieser Ebene befindlichen Parallelen zur Tangente gehören dem Strahlensystem an. — Wenn die Gerade die Tangente schneidet, können wir $\eta_0 = \zeta_0 = 0$ nehmen. Jetzt ergibt die erste der Gleichungen (1):

$$\alpha_0 + \beta_0\xi_0\frac{\cos\varphi}{\varrho} - \gamma_0\xi_0\frac{\sin\varphi}{\varrho} = 0.$$

Die Gerade muß also senkrecht zu einer Richtung sein, deren Richtungskosinus zu 1, $\xi_0 \frac{\cos\varphi}{\varrho}$, $-\xi_0 \frac{\sin\varphi}{\varrho}$ proportional sind; sie liegt somit in einer Ebene, deren Gleichung:

$$\xi - \xi_0 + \eta \frac{\cos\varphi}{\varrho} \xi_0 - \zeta \frac{\sin\varphi}{\varrho} \xi_0 = 0$$

ist. Bei veränderlichem ξ_0 stellt diese Gleichung ein Ebenenbüschel dar, dessen Achse mit der Krümmungsachse zusammenfällt. Daher muß jede nicht zur Tangente parallele Gerade des Strahlensystems sowohl die Tangente wie die Krümmungsachse schneiden.

II. In dem Falle, in welchem das ξ, η, ζ-System aus der Hauptnormale und zwei in der rektifizierenden Ebene liegenden Kanten gebildet war, hatten wir:

$$\alpha_x = \alpha \cos\varphi + \lambda \sin\varphi, \quad l_x = l, \quad \lambda_x = \lambda \cos\varphi - \alpha \sin\varphi,$$

$$p_1 = \frac{\sin\varphi}{\varrho} - \frac{\cos\varphi}{r}, \quad p_2 = -\frac{d\varphi}{ds}, \quad p_3 = \frac{\cos\varphi}{\varrho} + \frac{\sin\varphi}{r},$$

$$q_1 = \cos\varphi, \qquad q_2 = 0, \qquad q_3 = -\sin\varphi.$$

$$\Sigma p_1 q_1 = \Sigma p_1 \pi_1 = -\frac{1}{r}.$$

Für die Tangente ergibt sich:

$$\alpha_0 = \cos\varphi, \qquad \beta_0 = 0, \qquad \gamma_0 = -\sin\varphi,$$

$$\xi_{00} = 0, \qquad \eta_{00} = 0, \qquad \zeta_{00} = 0,$$

$$\Sigma\alpha_0\pi_1 = 1, \qquad \Sigma\alpha_0 p_1 = -\frac{1}{r} = \Sigma p_1\pi_1.$$

Die Tangente ist somit ein Translationsstrahl bei allen Schraubenbewegungen.

Die bei einer Schraubenbewegung von den Translationsstrahlen der Punkte der Tangente bestrichene Ebene hat die Gleichung:

$$\xi \sin\varphi + \zeta \cos\varphi - \eta \frac{d\varphi}{ds} \varrho = 0.$$

Der Gesamtheit unserer Schraubenbewegungen entspricht daher ein Ebenenbüschel.

Für die Konjugierte der Tangente ergibt sich:

$$\alpha_0' = \frac{\frac{\sin\varphi}{\varrho}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}, \quad \beta_0' = -\frac{\frac{d\varphi}{ds}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}, \quad \gamma_0' = \frac{\frac{\cos\varphi}{\varrho}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}},$$

$$\xi_{00}' = \frac{\frac{d\varphi}{ds}\sin\varphi}{\frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}, \qquad \eta_{00}' = \frac{\frac{1}{\varrho}}{\frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}, \qquad \zeta_{00}' = \frac{\frac{d\varphi}{ds}\cos\varphi}{\frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}.$$

Die Gleichungen der Konjugierten im x, y, z-System sind:

$$\bar{x} = x + \frac{\frac{1}{\varrho}}{\frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} l + \frac{\frac{d\varphi}{ds}}{\frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} \lambda + h \frac{\frac{1}{\varrho}\lambda - \frac{d\varphi}{ds} l}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}, \quad \text{usw.}$$

Bei jeder Schraubenbewegung liegt daher die Konjugierte der Tangente in der Normalebene der Kurve.

Für die rektifizierende Kante ist:

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{\frac{\lambda}{\varrho} - \frac{\alpha}{r}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}}, \quad \text{usw.},$$

somit:

$$\alpha_0 = \frac{-\frac{\cos\varphi}{r} + \frac{\sin\varphi}{\varrho}}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2}}}, \quad \beta_0 = 0, \quad \gamma_0 = \frac{\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{\cos\varphi}{\varrho}}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2}}}.$$

Außerdem haben wir:

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = 0.$$

Es folgt:

$$\Sigma\alpha_0\pi_1 = \frac{-\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}}, \quad \Sigma\alpha_0 p_1 = \sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}.$$

Die rektifizierende Kante ist daher ein Translationsstrahl bei allen Schraubenbewegungen.

Die Gleichung der von den Translationsstrahlen der Punkte der rektifizierenden Kante bestrichenen Ebene ist:

$$\eta = 0.$$

Diese Ebene fällt daher bei allen Schraubenbewegungen mit der rektifizierenden Ebene zusammen.

Um die Konjugierte der rektifizierenden Kante bei einer Schraubenbewegung zu bestimmen, ist zunächst der Punkt kürzesten Abstandes der rektifizierenden Kante von der Schraubungsachse zu bestimmen. Man erhält:

$$t_0 = \frac{\frac{1}{\varrho}}{\frac{d\varphi}{ds}\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}},$$

so daß:

$$\xi_{00} = \frac{\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\sin\varphi}{\varrho} - \frac{\cos\varphi}{r}\right)}{\frac{d\varphi}{ds}\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}\right)}, \quad \eta_{00} = 0, \quad \zeta_{00} = \frac{\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{\cos\varphi}{\varrho}\right)}{\frac{d\varphi}{ds}\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}\right)}.$$

Damit folgt:

$$\alpha_0' = 0, \quad \beta_0' = 1, \quad \gamma_0' = 0.$$

$$\xi_{00}' = \frac{\sin\varphi}{\frac{d\varphi}{ds}}, \quad \eta_{00}' = 0, \quad \zeta_{00}' = \frac{\cos\varphi}{\frac{d\varphi}{ds}}.$$

Im x, y, z-System hat die Konjugierte die Gleichungen:

$$x = x + \frac{\lambda}{\frac{d\varphi}{ds}} + hl, \quad \text{usw.}$$

Die Konjugierten der rektifizierenden Kante bei den einzelnen Schraubenbewegungen sind daher der Hauptnormale parallel und liegen in der Normalebene.

Die Krümmungsachse besitzt im x, y, z-System die Gleichungen:

$$\bar{x} = x + \varrho l + h\lambda, \quad \text{usw.}$$

Dies liefert im ξ, η, ζ-System:

$$\xi = h \sin\varphi, \quad \eta = \varrho, \quad \zeta = h\cos\varphi,$$

d. h.

$$\xi_0 = 0, \qquad \eta_0 = \varrho, \quad \zeta_0 = 0,$$

$$\alpha_0 = \sin\varphi, \quad \beta_0 = 0, \quad \gamma_0 = \cos\varphi.$$

Wir erhalten:

$$\pi_1 = -\frac{\varrho}{r}\sin\varphi, \quad \pi_2 = 0, \quad \pi_3 = -\frac{\varrho}{r}\cos\varphi,$$

$$\Sigma\alpha_0\pi_1 = -\frac{\varrho}{r}, \quad \Sigma\alpha_0 p_1 = \frac{1}{\varrho}.$$

Die Krümmungsachse ist daher ein Translationsstrahl bei allen Schraubenbewegungen.

Die von den Translationsstrahlen der Punkte der Krümmungsachse bei einer Schraubenbewegung bestrichene Ebene besitzt die Gleichung:

$$\frac{\cos\varphi}{r}\xi + \frac{d\varphi}{ds}(\eta - \varrho) - \frac{\sin\varphi}{r}\zeta = 0.$$

Die den sämtlichen Schraubenbewegungen entsprechenden Ebenen bilden somit einen Ebenenbüschel.

Da $t_0 = 0$, haben wir:

$$\xi_{00} = 0, \quad \eta_{00} = \varrho, \quad \zeta_{00} = 0.$$

Es ergibt sich:

$$\alpha_0' = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}, \quad \beta_0' = \frac{r\frac{d\varphi}{ds}}{\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}, \quad \gamma_0' = \frac{-\sin\varphi}{\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}},$$

$$\xi_{00}' = \frac{\varrho r\frac{d\varphi}{ds}}{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}\cos\varphi, \quad \eta_{00}' = \varrho - \frac{\varrho}{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}, \quad \zeta_{00}' = -\frac{\varrho r\frac{d\varphi}{ds}}{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}\sin\varphi.$$

Die Konjugierte der Krümmungsachse hat im x, y, z-System die Gleichungen:

$$\bar{x} = x + \frac{\varrho r \frac{d\varphi}{ds}}{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}\,\alpha + \left(\varrho - \frac{\varrho}{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}\right) l$$

$$+ h \frac{\alpha + r\frac{d\varphi}{ds} l}{\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}, \quad \text{usw.}$$

Die den verschiedenen Schraubenbewegungen entsprechenden Konjugierten der Krümmungsachse bestreichen daher die Schmiegungsebene der Kurve.

Die durch unsere Schraubenbewegungen bestimmten linearen Komplexe werden durch die Gleichung:

$$\alpha_0 \cos\varphi - \gamma_0 \sin\varphi + \left(\frac{\sin\varphi}{\varrho} - \frac{\cos\varphi}{r}\right)(\gamma_0 \eta_0 - \beta_0 \zeta_0)$$

$$+ \left(\frac{\cos\varphi}{\varrho} + \frac{\sin\varphi}{r}\right)(\beta_0 \xi_0 - \alpha_0 \eta_0) - \frac{d\varphi}{ds}(\alpha_0 \zeta_0 - \gamma_0 \xi_0) = 0$$

festgelegt. Hier kommt in der Schar der den verschiedenen Werten von $\frac{d\varphi}{ds}$ entsprechenden Komplexen nur *ein* spezieller, nämlich der durch die Bedingung:

$$\alpha_0 \zeta_0 - \gamma_0 \xi_0 = 0$$

bestimmte, vor. Wir haben es mit dem von *Plücker* a. a. O. S. 73 behandelten Falle zu tun. Um die allen Komplexen gemeinsamen Geraden zu finden, bemerken wir zunächst, daß eine Gerade, deren Bestimmungsstücke der letzten Gleichung genügen, entweder der Hauptnormale parallel ist ($\alpha_0 = \gamma_0 = 0$), oder sie schneidet. Ist sie der Hauptnormale parallel, so müssen, damit sie dem betrachteten Strahlensystem angehöre, ihre Bestimmungsstücke noch der Gleichung:

$$\zeta_0\left(\frac{\sin\varphi}{\varrho} - \frac{\cos\varphi}{r}\right) - \xi_0\left(\frac{\cos\varphi}{\varrho} + \frac{\sin\varphi}{r}\right) = 0$$

oder im x, y, z-System:

$$\Sigma(\bar{x}_0 - x)\left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{r}\right) = 0$$

genügen. Diese Gleichung stellt die Ebene dar, welche die Hauptnormale und die rektifizierende Kante enthält; folglich schneiden die dem Strahlensystem angehörenden Parallelen zur Hauptnormale die rektifizierende Kante. — Wenn die Gerade die Hauptnormale trifft, können wir $\xi_0 = \zeta_0 = 0$ nehmen. Dann muß noch die Bedingung:

$$\alpha_0\left(\cos\varphi - \left(\frac{\cos\varphi}{\varrho} + \frac{\sin\varphi}{r}\right)\eta_0\right) - \gamma_0\left(\sin\varphi - \left(\frac{\sin\varphi}{\varrho} - \frac{\cos\varphi}{r}\right)\eta_0\right) = 0$$

befriedigt werden, d. h. die Gerade muß in der Ebene liegen, deren Gleichung:

$$\xi\left(\cos\varphi\left(1-\frac{\eta_0}{\varrho}\right)-\frac{\sin\varphi}{r}\eta_0\right)-\zeta\left(\sin\varphi\left(1-\frac{\eta_0}{\varrho}\right)+\frac{\cos\varphi}{r}\eta_0\right)=0$$

ist, oder im x, y, z-System:

$$\Sigma(\bar{x}-x)\left(\alpha\left(1-\frac{\eta_0}{\varrho}\right)-\lambda\frac{\eta_0}{r}\right)=0.$$

Sie stellt bei veränderlichem η_0 einen Ebenenbüschel dar, dessen Achse die Hauptnormale ist. Jedem Punkte der Hauptnormale ist eine Ebene des Büschels zugeordnet. Von allen durch einen Punkt der Hauptnormale gehenden Geraden gehören nur diejenigen dem Strahlensystem an, die in der dem Punkte zugeordneten Ebene liegen.

Dem Kurvenpunkte selbst ist die Normalebene zugeordnet, so daß alle durch den Kurvenpunkt gehenden Normalen der Kurve dem Strahlensystem angehören.

Dem Mittelpunkte der ersten Krümmung ist die Schmiegungsebene zugeordnet.

Dem Punkte kürzesten Abstandes der Hauptnormale von der unendlich benachbarten Hauptnormale (§ 10 S. 224) ist die Ebene zugeordnet, welche die Hauptnormale enthält und zur rektifizierenden Kante senkrecht liegt.

III. In dem Falle, in dem das ξ, η, ζ-System aus der Binormale und zweien in der Schmiegungsebene liegenden Kanten besteht, benutzten wir die Bestimmungen:

$$\alpha_x=\alpha\cos\varphi+l\sin\varphi,\quad l_x=l\cos\varphi-\alpha\sin\varphi,\quad \lambda_x=\lambda$$

und fanden:

$$p_1=-\frac{\cos\varphi}{r},\quad p_2=\frac{\sin\varphi}{r},\quad p_3=\frac{1}{\varrho}+\frac{d\varphi}{ds},$$

$$q_1=\cos\varphi,\qquad q_2=-\sin\varphi,\quad q_3=0.$$

Für die Tangente haben wir:

$$\xi_0=0,\quad \eta_0=0,\quad \zeta_0=0;\quad \alpha_0=\cos\varphi,\quad \beta_0=-\sin\varphi,\quad \gamma_0=0,$$

$$\Sigma\alpha_0\pi_1=1,\quad \Sigma\alpha_0 p_1=-\frac{1}{r}=\Sigma p_1 q_1.$$

Die Tangente ist daher ein Translationsstrahl bei allen Schraubenbewegungen. Die von den Translationsstrahlen der Punkte der Tangente bestrichene Ebene ist bei allen Schraubenbewegungen die Schmiegungsebene.

Die Konjugierten der Tangente bei den einzelnen Schraubenbewegungen sind parallel der Binormale und bestreichen die Normalebene; man erhält nämlich:

$$\alpha_0' = 0, \quad \beta_0' = 0, \quad \gamma_0' = 1,$$

$$\xi_{00}' = \frac{\sin\varphi}{\frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds}}, \quad \eta_{00}' = \frac{\cos\varphi}{\frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds}}, \quad \zeta_{00}' = 0.$$

Die rektifizierende Kante teilt mit der Tangente die letztere Eigenschaft; denn hier ist:

$$\alpha_0' = 0, \quad \beta_0' = 0, \quad \gamma_0' = 1; \quad \xi_{00}' = \frac{\sin\varphi}{\frac{d\varphi}{ds}}, \quad \eta_{00}' = \frac{\cos\varphi}{\frac{d\varphi}{ds}}, \quad \zeta_{00}' = 0,$$

während:

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = 0;$$

$$\alpha_0 = -\frac{\varrho\cos\varphi}{r\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}, \quad \beta_0 = \frac{\varrho\sin\varphi}{r\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}.$$

Da hier:

$$\Sigma\alpha_0\pi_1 \cdot \Sigma\alpha_0 p_1 - \Sigma p_1 q_1 = -\frac{\varrho\frac{d\varphi}{ds}}{r\left(1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right)},$$

so ist die rektifizierende Kante bei keiner Schraubenbewegung ein Translationsstrahl. Für $\varphi = \text{const.}$ liegt sie parallel der Schraubungsachse.

Hinsichtlich der Krümmungsachse ergibt sich:

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0, \quad \gamma_0 = 1;$$

$$\xi_0 = \xi_{00} = \varrho\sin\varphi, \quad \eta_0 = \eta_{00} = \varrho\cos\varphi, \quad \zeta_0 = \zeta_{00} = 0,$$

$$\pi_1 = -\frac{d\varphi}{ds}\varrho\cos\varphi, \quad \pi_2 = \frac{d\varphi}{ds}\varrho\sin\varphi, \quad \pi_3 = -\frac{\varrho}{r},$$

$$\Sigma\alpha_0\pi_1 = -\frac{\varrho}{r}, \quad \Sigma\alpha_0 p_1 = \frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds},$$

$$\Sigma\alpha_0\pi_1 \cdot \Sigma\alpha_0 p_1 - \Sigma p_1 q_1 = -\frac{\varrho}{r}\frac{d\varphi}{ds};$$

die Krümmungsachse ist daher nur bei $\varphi = \text{const.}$ ein Translationsstrahl.

Für die Konjugierten der Krümmungsachse bei den einzelnen Schraubenbewegungen folgt:

$$\alpha_0' = -\frac{\cos\varphi}{r\sqrt{\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}, \quad \beta_0' = \frac{\sin\varphi}{r\sqrt{\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}, \quad \gamma_0' = \frac{\frac{d\varphi}{ds}}{\sqrt{\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}},$$

oder im x, y, z-System:

$$\bar{\alpha}_0' = \frac{-\frac{\alpha}{r} + \lambda\frac{d\varphi}{ds}}{\sqrt{\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}, \quad \text{usw.}$$

Ferner hat man:

$$\xi'_{00} = 0, \quad \eta'_{00} = 0, \quad \zeta'_{00} = 0$$

oder im x, y, z-System:

$$x'_{00} = x, \quad \text{usw.}$$

Die Konjugierten der Krümmungsachse bilden also einen Büschel, dessen Ebene mit der rektifizierenden Ebene zusammenfällt, während der gemeinsame Schnittpunkt seiner Geraden mit dem Kurvenpunkt (x, y, z) zusammenfällt.

Die bei den einzelnen Schraubenbewegungen auftretenden linearen Komplexe werden durch die Gleichung:

$$\alpha_0 \cos\varphi - \beta_0 \sin\varphi - \frac{\cos\varphi}{r}(\gamma_0\eta_0 - \beta_0\zeta_0) + \frac{\sin\varphi}{r}(\alpha_0\zeta_0 - \gamma_0\xi_0)$$
$$+ \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{d\varphi}{ds}\right)(\beta_0\xi_0 - \alpha_0\eta_0) = 0$$

bestimmt. Die allen diesen Komplexen gemeinsamen Geraden werden durch die Bedingungen:

$$\alpha_0 \cos\varphi - \beta_0 \sin\varphi - \frac{\cos\varphi}{r}(\gamma_0\eta_0 - \beta_0\zeta_0) + \frac{\sin\varphi}{r}(\alpha_0\zeta_0 - \gamma_0\xi_0) = 0,$$
$$\beta_0\xi_0 - \alpha_0\eta_0 = 0$$

festgelegt. Eine Gerade, deren Bestimmungsstücke der letzten Bedingung genügen, ist entweder parallel der Binormale $(\alpha_0 = \beta_0 = 0)$, oder sie schneidet die Binormale. Im Falle des Parallelismus geht die vorletzte Bedingung in:

$$\eta_0 \cos\varphi + \xi_0 \sin\varphi = 0$$

oder im x, y, z-System:

$$\Sigma(\bar{x}_0 - x)l = 0$$

über, d. h. dem betrachteten Strahlensystem gehören diejenigen Parallelen zur Binormale an, die in der rektifizierenden Ebene liegen.

Im Falle des Schneidens können wir $\xi_0 = \eta_0 = 0$ setzen, und damit erhält die erste Bedingung die Form:

$$\alpha_0\left(\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{r}\zeta_0\right) - \beta_0\left(\sin\varphi - \frac{\cos\varphi}{r}\zeta_0\right) = 0.$$

Die Gerade muß daher in einer Ebene liegen, deren Gleichung im ξ, η, ζ-System:

$$\xi\left(\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{r}\zeta_0\right) - \eta\left(\sin\varphi - \frac{\cos\varphi}{r}\zeta_0\right) = 0,$$

im x, y, z-System:

$$\Sigma(\bar{x} - x)\left(\alpha + \frac{l}{r}\zeta_0\right) = 0$$

ist. Jedem Punkte der Binormale ist hierdurch eine die Binormale enthaltende Ebene zugeordnet. Dem Kurvenpunkte entspricht dabei die Normalebene der Kurve.

§ 36. Translations- und Binormalstrahlen der Punkte einer Ebene. Anwendungen.

Wir fassen die Translationsstrahlen der Punkte einer Ebene ins Auge. Sind a_ξ, a_η, a_ζ; b_ξ, b_η, b_ζ; c_ξ, c_η, c_ζ die Richtungskosinus von drei zueinander senkrechten Richtungen, so stellen die Gleichungen:

$$\xi = \xi_0 + ta_\xi + \tau b_\xi, \quad \eta = \eta_0 + ta_\eta + \tau b_\eta, \quad \zeta = \zeta_0 + ta_\zeta + \tau b_\zeta$$

die Koordinaten der Punkte einer Ebene dar, wenn t und τ als veränderlich angesehen werden. Wir fragen, ob es in der Ebene einen Punkt gibt, dessen Translationsstrahl senkrecht zur Ebene liegt. Zutreffendenfalls müssen sich die drei Größen:

$$q_1 + p_2\zeta - p_3\eta, \quad q_2 + p_3\xi - p_1\zeta, \quad q_3 + p_1\eta - p_2\xi$$

verhalten wie c_ξ zu c_η zu c_ζ. Multiplizieren wir also die drei Größen der Reihe nach mit a_ξ, a_η, a_ζ, dann mit b_ξ, b_η, b_ζ und addieren jedesmal, so müssen beide Summen verschwinden. Wir nehmen die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_\xi & a_\eta & a_\zeta \\ b_\xi & b_\eta & b_\zeta \\ c_\xi & c_\eta & c_\zeta \end{vmatrix}$$

gleich Eins und erhalten:

$$\Sigma(q_1 + p_2\zeta_0 - p_3\eta_0)a_\xi - \tau\Sigma p_1 c_\xi = 0,$$
$$\Sigma(q_1 + p_2\zeta_0 - p_3\eta_0)b_\xi + t\,\Sigma p_1 c_\xi = 0.$$

Wenn also $\Sigma p_1 c_\xi$ von Null verschieden ist, d. h. wenn die angenommene Ebene die Schraubungsachse schneidet, gibt es in ihr einen einzigen Punkt, dessen Translationsstrahl senkrecht zur Ebene liegt. Wir nennen ihn den Nullpunkt der Ebene und wollen unter $\xi_0', \eta_0', \zeta_0'$ die Koordinaten des Nullpunktes verstehen, so daß:

$$\Sigma(q_1 + p_2\zeta_0' - p_3\eta_0')a_\xi = 0, \quad \Sigma(q_1 + p_2\zeta_0' - p_3\eta_0')b_\xi = 0.$$

Die gegebene Ebene ist die Normalebene der durch ihren Nullpunkt gehenden Schraubenlinie in diesem Punkt.

Hiernach ist es zweckmäßig, an die Stelle der Zahlen a_ξ, a_η, a_ζ die Richtungskosinus $(a'_\xi, a'_\eta, a'_\zeta)$ der Hauptnormale der durch den Nullpunkt der Ebene gehenden Schraubenlinie, an Stelle der Zahlen

b_ξ, b_η, b_ζ die Richtungskosinus $(b'_\xi, b'_\eta, b'_\zeta)$ der Binormale dieser Schraubenlinie zu setzen.

Wir nehmen abkürzend:

$$q_1 + p_2\zeta_0' - p_3\eta_0' = \chi_1, \quad q_2 + p_3\xi_0' - p_1\zeta_0' = \chi_2, \quad q_3 + p_1\eta_0' - p_2\xi_0' = \chi_3$$

und erhalten:

$$a'_\xi = \frac{p_2\chi_3 - p_3\chi_2}{\sqrt{w^2\Sigma\chi_1^2 - (\Sigma p_1 q_1)^2}}, \quad b'_\xi = \frac{p_1\Sigma\chi_1^2 - \chi_1\Sigma p_1 q_1}{\sqrt{\Sigma\chi_1^2}\sqrt{w^2\Sigma\chi_1^2 - (\Sigma p_1 q_1)^2}}, \quad c'_\xi = \frac{\chi_1}{\sqrt{\Sigma\chi_1^2}}.$$

Der kürzeste Abstand des Nullpunktes von der Schraubungsachse ist gleich dem kürzesten Abstand des Translationsstrahls des Nullpunktes von der Schraubungsachse. Nach § 32 S. 333 erhalten wir, da hier c'_ξ an die Stelle von α_0, χ_1 an die Stelle von π_1, usw. tritt:

$$e = -\frac{W}{w^2},$$

wo:

$$W = \sqrt{w^2\Sigma\chi_1^2 - (\Sigma p_1 q_1)^2},$$

so daß $\frac{W}{w^2}$ die absolute Maßzahl des kürzesten Abstandes ist.

Wir fragen nun nach denjenigen Punkten unserer Ebene, deren Translationsstrahlen in der Ebene liegen. Ein derartiger Punkt besitze die Koordinaten:

$$\xi = \xi_0' + t_0 a'_\xi + \tau_0 b'_\xi, \quad \text{usw.}$$

Als Bedingung für t_0 und τ_0 ergibt sich:

$$\Sigma\chi_1\{q_1 + p_2(\zeta_0' + t_0 a'_\zeta + \tau_0 b'_\zeta) - p_3(\eta_0' + t_0 a'_\eta + \tau_0 b'_\eta)\} = 0.$$

Man hat:

$$p_2 a'_\zeta - p_3 a'_\eta = \frac{p_1\Sigma p_1 q_1 - w^2\chi_1}{W},$$

$$p_2 b'_\zeta - p_3 b'_\eta = -\frac{\Sigma p_1 q_1}{\sqrt{\Sigma\chi_1^2}} a'_\xi,$$

somit erhält unsere Bedingung die Gestalt:

$$\Sigma\chi_1^2 - t_0 W = 0.$$

Dies zeigt, daß die Punkte, deren Translationsstrahlen sich in der Ebene befinden, auf einer Parallelen (L) zur Binormale der durch den Nullpunkt der Ebene gehenden Schraubenlinie liegen.

Die Richtungskosinus eines solchen Translationsstrahls sind proportional den Zahlen:

$$\frac{\sqrt{\Sigma\chi_1^2}\,\Sigma p_1 q_1}{W} b'_\xi - \frac{\Sigma p_1 q_1}{\sqrt{\Sigma\chi_1^2}} a'_\xi \tau_0, \quad \text{usw.};$$

wir können also die Gleichungen des Strahles im ξ, η, ζ-System in der Form:

$$\xi = \xi_0' + \frac{\Sigma\chi_1^2}{W} a'_\xi + \tau_0 b'_\xi + h(\Sigma\chi_1^2 \cdot b'_\xi - Wa'_\xi\tau_0), \quad \text{usw.}$$

nehmen. Im Koordinatensystem der Haupt- und Binormale der durch den Nullpunkt der Ebene gehenden Schraubenlinie sind die Gleichungen des Strahles die folgenden:

$$t = \frac{\Sigma\chi_1^2}{W} - hW\tau_0, \quad \tau = \tau_0 + h\Sigma\chi_1^2;$$

die Schar der in der Ebene liegenden Translationsstrahlen umhüllt somit eine Parabel, deren Gleichung:

$$\tau^2 = -\frac{4\Sigma\chi_1^2}{W}\left(t - \frac{\Sigma\chi_1^2}{W}\right)$$

ist. Der Brennpunkt der Parabel fällt mit dem Nullpunkt der Ebene, ihre Scheiteltangente mit der Geraden (L) zusammen.

Ähnliche Betrachtungen wie die vorigen lassen sich über die Binormalstrahlen der Punkte einer Ebene anstellen. Die Richtungskosinus eines solchen Strahles sind nach § 31 S. 332 den Zahlen:

$$p_1\Sigma(q_1 + p_2\zeta - p_3\eta)^2 - (q_1 + p_2\zeta - p_3\eta)\Sigma p_1 q_1, \quad \text{usw.}$$

proportional. Für:

$$\xi = \xi_0' + ta'_\xi + \tau b'_\xi, \quad \text{usw.}$$

wird:

$$q_1 + p_2\zeta - p_3\eta = \chi_1 + t\frac{p_1\Sigma p_1 q_1 - w^2\chi_1}{W} - \tau\frac{\Sigma p_1 q_1}{\sqrt{\Sigma\chi_1^2}} a'_\xi$$

$$= c'_\xi\sqrt{\Sigma\chi_1^2} + t\frac{b'_\xi\Sigma p_1 q_1 - c'_\xi W}{\sqrt{\Sigma\chi_1^2}} - \tau\frac{\Sigma p_1 q_1}{\sqrt{\Sigma\chi_1^2}} a'_\xi,$$

woraus folgt:

$$\Sigma(q_1 + p_2\zeta - p_3\eta)^2 = \Sigma\chi_1^2 + w^2t^2 - 2tW + \frac{(\Sigma p_1 q_1)^2}{\Sigma\chi_1^2}\tau^2.$$

Soll der Binormalstrahl eines Punktes der Ebene zu ihr senkrecht sein, so müssen die Bedingungen bestehen:

$$\Sigma a'_\xi\{p_1\Sigma(q_1 + p_2\zeta - p_3\eta)^2 - (q_1 + p_2\zeta - p_3\eta)\Sigma p_1 q_1\} = 0,$$

$$\Sigma b'_\xi\{p_1\Sigma(q_1 + p_2\zeta - p_3\eta)^2 - (q_1 + p_2\zeta - p_3\eta)\Sigma p_1 q_1\} = 0.$$

Da:

$$p_1 = \frac{W}{\sqrt{\Sigma\chi_1^2}} b'_\xi + \frac{\Sigma p_1 q_1}{\sqrt{\Sigma\chi_1^2}} c'_\xi, \quad \text{usw.},$$

so erhalten die Bedingungen die Gestalt:

$$\tau = 0,$$

$$w^2 t^2 - 2tW - \frac{(\Sigma p_1 q_1)^2}{W} t + \Sigma \chi_1^2 = 0.$$

Die beiden Wurzeln der letzten Gleichung sind:

$$t_1 = \frac{\Sigma \chi_1^2}{W}, \quad t_2 = \frac{W}{w^2}.$$

Um die Lage des zu dem Werte t_2 gehörenden Punktes der Ebene zu bestimmen, ersetzen wir in den Gleichungen:

$$\xi = \xi'_0 + ta'_\xi + \tau b'_\xi, \quad \text{usw.}$$

die Zahl t durch t_2, die Zahl τ durch die Null. Dann folgt:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi'_0 + \frac{p_2 \chi_3 - p_3 \chi_2}{w^2} \\ &= \frac{p_2 q_3 - p_3 q_2 + p_1 \Sigma p_1 \xi'_0}{w^2} \\ &= \xi_1 + r_\xi \frac{\Sigma p_1 \xi'_0}{w}, \quad \text{usw.}\end{aligned}$$

Die zweite Wurzel t_2 entspricht daher dem Schnittpunkte der Ebene mit der Schraubungsachse. Da diesem Punkte überhaupt kein bestimmter Binormalstrahl zugehört, brauchen wir nur die Wurzel t_1 zu berücksichtigen und sehen, daß der Scheitelpunkt der vorhin betrachteten Parabel der einzige Punkt der Ebene ist, dessen Binormalstrahl auf der Ebene senkrecht steht.

Soll der Binormalstrahl eines Punktes der Ebene in der Ebene liegen, so muß die Bedingung:

$$\Sigma c'_\xi \{p_1 \Sigma (q_1 + p_2 \zeta - p_3 \eta)^2 - (q_1 + p_2 \zeta - p_3 \eta) \Sigma p_1 q_1\} = 0$$

erfüllt sein, oder:

$$w^2 t^2 + \frac{(\Sigma p_1 q_1)^2}{\Sigma \chi_1^2} \tau^2 - tW = 0.$$

Die fraglichen Punkte liegen also auf einer Ellipse, die durch den Nullpunkt der Ebene hindurchgeht, und deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte des senkrechten Abstandes des Nullpunktes der Ebene von der Schraubungsachse zusammenfällt.

Die Richtungskosinus eines in der Ebene liegenden Binormalstrahls sind den Zahlen:

$$\tau \frac{(\Sigma p_1 q_1)^2}{\sqrt{\Sigma \chi_1^2}} a'_\xi + (W - tw^2) \sqrt{\Sigma \chi_1^2}\, b'_\xi, \quad \text{usw.}$$

proportional, wenn t und τ der letzten Gleichung genügen.

Die Gleichungen eines solchen Strahles sind daher:

$$\xi = \xi_0' + ta'_\xi + \tau b'_\xi + h\{\tau(\Sigma p_1 q_1)^2 a'_\xi + (W - tw^2)\Sigma\chi_1{}^2 \cdot b'_\xi\}, \quad \text{usw.}$$

Da sich für:

$$h = -\frac{t}{\tau(\Sigma p_1 q_1)^2}$$

sowohl $\xi = \xi_0'$ als $\eta = \eta_0'$ und $\zeta = \zeta_0'$ ergibt, gehen alle in der Ebene liegenden Binormalstrahlen durch den Nullpunkt der Ebene hindurch, oder mit anderen Worten, die in einer nicht zur Schraubungsachse parallelen Ebene liegenden Komplexgeraden bilden einen Büschel, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt der Ebene ist.

Wir zeigen endlich, daß der Ort der Nullpunkte aller durch eine nicht zur Schraubungsachse parallele Gerade gehender Ebenen die Konjugierte der Geraden ist. Die Gerade denken wir uns durch ihre Richtungskosinus $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ und durch die Koordinaten $\xi_{00}, \eta_{00}, \zeta_{00}$ ihres Punktes kürzesten Abstandes von der Schraubungsachse bestimmt. Mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bezeichnen wir die Richtungskosinus der von dem Punkt $(\xi_{00}, \eta_{00}, \zeta_{00})$ auf die Schraubungsachse gefällten Senkrechten, mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Richtungskosinus der zu den Richtungen $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ und $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ senkrechten Richtung. Dabei sei:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 1.$$

Für eine durch die gegebene Gerade gelegte Ebene können wir:

$$a_\xi = \alpha_0, \quad b_\xi = \alpha_1 \cos\vartheta + \alpha_2 \sin\vartheta, \quad c_\xi = -\alpha_1 \sin\vartheta + \alpha_2 \cos\vartheta,$$

$$\xi_0 = \xi_{00}, \quad \eta_0 = \eta_{00}, \quad \zeta_0 = \zeta_{00}$$

setzen. Die Gleichungen für die dem Nullpunkte der Ebene entsprechenden Werte von t und τ (S. 356) werden:

$$\Sigma\psi_1\alpha_0 + \tau(\sin\vartheta\,\Sigma p_1\alpha_1 - \cos\vartheta\,\Sigma p_1\alpha_2) = 0,$$

$$\cos\vartheta\,\Sigma\psi_1\alpha_1 + \sin\vartheta\,\Sigma\psi_1\alpha_2 - t(\sin\vartheta\,\Sigma p_1\alpha_1 - \cos\vartheta\,\Sigma p_1\alpha_2) = 0.$$

Verschwindet $\Sigma\psi_1\alpha_0$, so verschwindet τ für jeden Wert von ϑ, d. h. die Nullpunkte der durch eine Komplexgerade gehenden Ebenen liegen auf der Geraden selbst.

Nun sei $\Sigma\psi_1\alpha_0$ von Null verschieden. Wir bemerken zunächst, daß sowohl $\Sigma\psi_1\alpha_1$ wie $\Sigma p_1\alpha_1$ verschwindet; denn das vom Nullpunkte der Geraden aus auf die Schraubungsachse gefällte Lot steht sowohl auf dem Translationsstrahl des Nullpunktes, wie auf der Schraubungs-

achse senkrecht. Für die ξ-Koordinate des Nullpunktes der zu ϑ gehörenden Ebene ergibt sich:

$$\xi = \xi_{00} - \alpha_0 \operatorname{tg} \vartheta \cdot \frac{\Sigma \psi_1 \alpha_2}{\Sigma p_1 \alpha_2} + (\alpha_1 \cos \vartheta + \alpha_2 \sin \vartheta) \frac{\Sigma \psi_1 \alpha_0}{\Sigma p_1 \alpha_2 \cdot \cos \vartheta}$$

$$= \xi_{00} + \alpha_1 \frac{\Sigma \psi_1 \alpha_0}{\Sigma p_1 \alpha_2} + \operatorname{tg} \vartheta \left(- \alpha_0 \frac{\Sigma \psi_1 \alpha_2}{\Sigma p_1 \alpha_2} + \alpha_2 \frac{\Sigma \psi_1 \alpha_0}{\Sigma p_1 \alpha_2} \right).$$

Nun ist:

$$\alpha_1 = \frac{p_2 \gamma_0 - p_3 \beta_0}{\sqrt{w^2 - (\Sigma \alpha_0 p_1)^2}}, \quad \alpha_2 = \frac{p_1 - \alpha_0 \Sigma \alpha_0 p_1}{\sqrt{w^2 - (\Sigma \alpha_0 p_1)^2}},$$

somit:

$$\xi = \xi_{00} + \frac{(p_2 \gamma_0 - p_3 \beta_0) \Sigma \psi_1 \alpha_0}{w^2 - (\Sigma \alpha_0 p_1)^2} + \operatorname{tg} \vartheta \frac{p_1 \Sigma \psi_1 \alpha_0 - \alpha_0 \Sigma p_1 q_1}{w^2 - (\Sigma \alpha_0 p_1)^2},$$

oder in den früheren Bezeichnungen (§ 34 S. 342, 343):

$$\xi = \xi_{00}' + \alpha_0' \frac{\sqrt{\Sigma \psi_1^2}}{\sqrt{w^2 - (\Sigma \alpha_0 p_1)^2}} \operatorname{tg} \vartheta.$$

Dies zeigt, daß in der Tat die Nullpunkte der Ebenen eines Büschels auf der Konjugierten der Achse des Büschels liegen.

Wir machen von dem vorstehenden eine Anwendung auf folgenden Fall. Es soll die Schraubenbewegung betrachtet werden, welche zu einer bestimmten Lage des Dreikants der Tangente, der Haupt- und Binormale gehört, so daß:

$$p_1 = -\frac{1}{r}, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = \frac{1}{\varrho},$$

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0.$$

Wir fassen zunächst die Tangentialebenen ins Auge. Für eine solche können wir:

$$a_\xi = 1, \quad a_\eta = 0, \quad a_\zeta = 0,$$

$$b_\xi = 0, \quad b_\eta = \cos \vartheta, \quad b_\zeta = \sin \vartheta,$$

$$c_\xi = 0, \quad c_\eta = - \sin \vartheta, \quad c_\zeta = \cos \vartheta,$$

$$\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$$

setzen. Dem Nullpunkte entspricht:

$$t = 0, \quad \tau = \frac{\varrho}{\cos \vartheta},$$

somit:

$$\xi_0' = 0, \quad \eta_0' = \varrho, \quad \zeta_0' = \varrho \operatorname{tg} \vartheta.$$

Die Nullpunkte der Tangentialebenen liegen also auf der Krümmungsachse und fallen mit den zu dem Kurvenpunkt (x, y, z) gehörenden Krümmungsmittelpunkten der senkrechten Projektionen der Kurve auf die Tangentialebenen

zusammen. Hiermit ist auf anderem Wege wie im § 35 S. 345 gezeigt, daß die Krümmungsachse die Konjugierte der Tangente ist.

Für die Schmiegungsebene ist ϑ gleich Null, und:

$$\xi_0' = 0, \quad \eta_0' = \varrho, \quad \zeta_0' = 0.$$

Ferner wird hier:

$$\chi_1 = 0, \quad \chi_2 = 0, \quad \chi_3 = -\frac{\varrho}{r}, \quad W = \frac{\varrho}{r^2},$$

$$a_\xi' = 0, \quad a_\eta' = -1, \quad a_\zeta' = 0,$$

$$b_\xi' = -\varepsilon, \quad b_\eta' = 0, \quad b_\zeta' = 0.$$

Dabei ist ε gleich $+1$ oder gleich -1, je nachdem r positiv oder negativ ausfällt. Die Gleichungen für die Gerade, deren Translationsstrahlen in der Schmiegungsebene liegen, nehmen die Form an:

$$\xi = -\varepsilon\tau_0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Die Gerade fällt also in Übereinstimmung mit dem § 35 S. 345 gefundenen Ergebnis mit der Tangente zusammen.

Um die von den Translationsstrahlen der Punkte der Tangente umhüllte Parabel zu finden, müssen wir die Zahlen t und τ mit Hilfe der Bedingung:

$$\tau^2 = -4\varrho(t-\varrho)$$

aus den Gleichungen:

$$\xi = -\tau, \quad \eta = \varrho - t$$

eliminieren. Man erhält:

$$\xi^2 = 4\varrho\eta.$$

Der Punkt der Schmiegungsebene, dessen Binormalstrahl senkrecht zu ihr liegt, ist offenbar der Kurvenpunkt selbst.

Der Ort der Punkte der Schmiegungsebene, deren Binormalstrahlen in ihr liegen, ist die durch die Gleichung:

$$\frac{\xi^2}{\varrho^2} + \left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}\right)(\eta-\varrho)^2 + (\eta-\varrho)\frac{\varrho}{r^2} = 0$$

bestimmte Ellipse.

Der Nullpunkt der Normalebene ist der Kurvenpunkt selbst. Der Ort der Punkte der Normalebene, deren Translationsstrahlen in ihr liegen, fällt mit der Krümmungsachse zusammen (vgl. § 35 S. 346). Diese Translationsstrahlen umhüllen die durch die Gleichung:

$$\zeta^2 = -4\varrho(\eta-\varrho)$$

bestimmte Parabel. Der Punkt der Normalebene, dessen Binormalstrahl senkrecht zu ihr liegt, ist der Mittelpunkt der ersten Krümmung der Kurve. Der Ort der Punkte der Normalebene, deren Binormalstrahlen in ihr liegen, ist die durch die Gleichung:

$$\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\eta^2 + \frac{\zeta^2}{r^2} - \frac{\eta}{\varrho} = 0$$

festgelegte Ellipse.

Die rektifizierende Ebene ist der Schraubungsachse parallel und besitzt somit keinen im Endlichen gelegenen Nullpunkt.

Hiermit beschließen wir die Theorie der Translations- und Binormalstrahlen der Punkte einer Ebene. Es leuchtet ein, daß sich die Anwendungen dieser Theorie erheblich vermehren lassen, wenn man entweder die durch die Tangente, Hauptnormale oder Binormale gelegten Ebenenbüschel betrachtet, oder die anderen Schraubenbewegungen zugrunde legt, von denen früher, im § 29, die Rede war.

Wir weisen noch auf die Aufgabe hin, die Schraubenbewegungen zu untersuchen, die sich einem außergewöhnlichen Kurvenpunkt zuordnen lassen. Hier tritt insofern eine Schwierigkeit auf, als sich in den Fällen, wo die Schraubungsachse im Unendlichen liegt, oder der Schraubungsparameter unendlich ist, von einer Schraubenbewegung nicht mehr reden läßt. Diese Frage gewinnt aber eine Bedeutung, wenn man die von irgendeiner Schraubungsachse längs der Kurve beschriebene geradlinige Fläche betrachtet. Die Gestalt einer solchen Fläche hängt wesentlich von dem Verhalten der Schraubungsachse bei der Annäherung an einen außergewöhnlichen Kurvenpunkt ab. Ob diese Fragestellung zu bemerkenswerten Ergebnissen führt, ist noch unsicher.

Zusätze und Verbesserungen.

S. 5 Z. 20 v. o. hinter Wendetangente lies: ihren Berührungspunkt einen Wendepunkt.

S. 216. Die Figur 26 ist so zu ändern, daß sich der rechte Winkel an der Ecke C befindet.

S. 276. An den Schluß des § 19 gehört folgender Zusatz:

3. Parallelkurven. Unter den einer Kurve parallelen Kurven versteht man die orthogonalen Trajektorien ihrer Normalebenen. Die Gleichungen einer beliebigen Trajektorie dieser Ebenen lassen sich in der Form:

$$x = g_1(s) + h(s)\Big(l \cos\varphi(s) + \lambda \sin\varphi(s)\Big), \quad \text{usw.}$$

darstellen. Man erhält:

$$\frac{dx}{ds} = \alpha\left(1 - \frac{h\cos\varphi}{\varrho}\right) + l\left(\frac{dh}{ds}\cos\varphi + \left(\frac{1}{r} - \frac{d\varphi}{ds}\right)h\sin\varphi\right)$$
$$+ \lambda\left(\frac{dh}{ds}\sin\varphi - \left(\frac{1}{r} - \frac{d\varphi}{ds}\right)h\cos\varphi\right), \quad \text{usw.}$$

Wenn die Tangente der Trajektorie parallel der Kurventangente sein soll, müssen hier die Koeffizienten von l und λ verschwinden, d. h.:

$$h = \text{const.} \quad \text{und} \quad \varphi = \int \frac{ds}{r} + \varphi_0,$$

wo φ_0 eine willkürliche Konstante bedeutet. Die beiden Bedingungen:

$$h = \text{const.} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r}$$

zeigen, daß man die sämtlichen Parallelkurven erhält, indem man auf den Erzeugenden der abwickelbaren Normalenflächen (§ 10 S. 227) von der Kurve aus nach derselben Seite hin gleiche Stücke abträgt.

Der geometrisch offenbare Satz, daß die Parallelkurven einer Kurve mit den Planevolventen des Ortes der Mittelpunkte ihrer Schmiegungskugeln, also der Pollinie, zusammenfallen, läßt sich mit Hilfe der Gleichungen für eine Planevolvente (§ 19 S. 276) folgendermaßen beweisen.

Die Koordinaten des Mittelpunktes der zu s gehörenden Schmiegungskugel sind (§ 6 S. 210):

$$x_2 = g_1(s) + l\varrho - \lambda r \frac{d\varrho}{ds}, \quad \text{usw.}$$

Für

$$A = \frac{\varrho}{r} + \frac{dr}{ds}\frac{d\varrho}{ds} + r\frac{d^2\varrho}{ds^2}$$

ergibt sich:

$$\frac{dx_2}{ds} = -A\lambda, \quad \text{usw.}$$

Die Richtungskosinus der Tangente der Pollinie bezeichnen wir mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, die Richtungskosinus ihrer Hauptnormale oder Binormale mit l_1, m_1, n_1, oder λ_1, μ_1, ν_1, ihre Bogenlänge mit σ. Bestimmen wir die letztere mit Hilfe der Gleichung:

$$\frac{d\sigma}{ds} = -A,$$

so nimmt sie mit wachsendem s zu oder ab, je nachdem A negativ oder positiv ist. Man hat dann:

$$\alpha_1 = \lambda$$

und:

$$\frac{d\alpha_1}{d\sigma} = -\frac{l}{rA}.$$

Wir verstehen unter ε die positive oder negative Einheit, je nachdem rA positiv oder negativ ist, unter $\frac{1}{\varrho_1}$ die erste Krümmung der Pollinie. Dann folgt:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{\varepsilon}{rA}, \quad l_1 = -\varepsilon l, \quad \lambda_1 = \varepsilon\alpha.$$

Für ϑ erhält man die Gleichung:

$$\vartheta = \int \frac{d\sigma}{\varrho_1} = -\varepsilon \int \frac{ds}{r},$$

so daß:

$$\sin\vartheta = -\varepsilon \sin \int \frac{ds}{r}, \quad \cos\vartheta = \cos \int \frac{ds}{r}.$$

Zunächst sind die Integrale:

$$\int \sin\vartheta \, d\sigma, \quad \int \cos\vartheta \, d\sigma$$

zu berechnen. Man hat, wenn $\int \frac{ds}{r}$ gleich τ genommen wird:

$$\int \sin\vartheta \, d\sigma = \varepsilon \int A \sin\tau \, ds.$$

Aber:

$$A = \frac{\varrho}{r} + \frac{d\left(r\frac{d\varrho}{ds}\right)}{ds},$$

$$\sin\tau = -r\frac{d\cos\tau}{ds},$$

somit durch partielle Integration:

$$\varepsilon \int \sin\vartheta \, d\sigma = -\varrho\cos\tau + r\frac{a\varrho}{ds}\sin\tau + a,$$

wo a eine Integrationskonstante bedeutet.

Auf demselben Wege ergibt sich:

$$\int \cos\vartheta \, d\sigma = -\varrho\sin\tau - r\frac{d\varrho}{ds}\cos\tau - b,$$

wo b ebenfalls eine Integrationskonstante bedeutet.

Wenden wir nun die Gleichungen für die Koordinaten der Planevolventen an, so ist $g_1(s)$ durch x_2, s durch σ, α durch λ, l durch $-\varepsilon l$, usw. zu ersetzen. Dann folgt:

$$x = g_1(s) + l(a\cos\tau - b\sin\tau) + \lambda(a\sin\tau + b\cos\tau), \text{ usw.}$$

Nehmen wir hierin:

$$a = h\cos\varphi_0, \quad b = h\sin\varphi_0,$$

so erhalten wir:

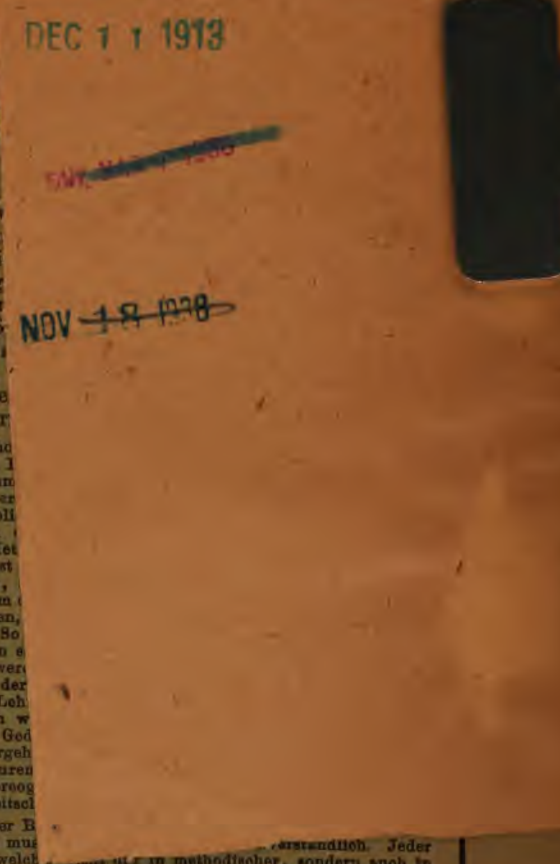
$$x = g_1(s) + h\big(l\cos(\tau + \varphi_0) + \lambda\sin(\tau + \varphi_0)\big), \text{ usw.}$$

und diese Gleichungen fanden wir für die Koordinaten der Parallelkurven.

Sachregister.

(Die Zahlen bedeuten die Seiten.)

Druck von B. G. Teubner in Dresden.



DEC 11 1913

